00049878

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

BOMBAY BRANCH
OF THE
ROYAL ASIATIC SOCIETY.
TOWN HALL, BOMBAY.

Digitized with financial assistance from
Observer Research Foundation
on 17 May, 2019

NOUVEAUX OUVRAGES

DE MONSIEUR

L' ABBÉ BOSCOVICH

APPARTENANTS PRINCIPALEMENT

A' L' OPTIQUE, ET A' L' ASTRONOMIE

EN CINQ VOLUMES

DÉDIÉS

AU ROI.

TOME CINQUIÈME.

A' BASSAN MDCCLXXXV.

& se vendent

A' VENISE, CHEZ REMONDINI.

Avec Approbation, & Privilége.

ROGERII JOSEPHI
BOSCOVICH
OPERA PERTINENTIA
AD OPTICAM, ET ASTRONOMIAM
Maxima ex parte nova, & omnia hucusque inedita,

IN QUINQUE TOMOS DISTRIBUTA

LUDOVICO XVI.

49878

GALLIARUM REGI POTENTISSIMO DICATA.

TOMUS QUINTUS.

LIBRARY OF THE BOMBAY BRANCH OF THE ASIATIC SOCIETY

BASSANI MDCCLXXXV.

PROSTANT

VENETIIS APUD REMONDINI.

Superiorum Permissu, ac Privilegio.

O

520

BOS/ROG

49878

00049878

INDEX
OPUSCULORUM, PARAGRAPHORUM &c.
Quæ in hoc quinto Tomo continentur.

OPUSCULUM I.

De apparitione, & disparitione annuli Saturni. Pag. 1

PROBL. I. *Dato radio circuli, & ratione diametri ad circumferentiam construere lineam sinuum* (*). 2

PROBL. II. *Invenire occursum puncti uniformiter progredientis in diametro circuli cum ordinata ejusdem diametri ducta per punctum uniformiter progrediens in ejusdem circuli circumferentia ex data ratione velocitatum, & dato loco secundi puncti pro eo momento temporis, quo primum punctum appellit ad centrum.* 14

PROBL. III. *Evolvere ope curvæ sinuum casus præcipuos.* 32

PROBL. IV. *Exhibere numerum, & qualitatem occursuum puncti primi cum* ordinata *secundi, qui haberi debeant, pro omni diverso genere casuum.* 39

PROBL. V. *Determinare effectum crassitudinis annuli, si qua habeatur.* 45

PROBL. VI. *Corrigere errorem ortum ab æqualitate motus minus accurata.* 49

PROBL. VII. *Applicare theoriam propositam ad phænomena annuli observanda e terra.* 52

PROBL. VIII. *Determinare per observationes locum nodi annuli in ecliptica.* 64

APPENDIX. 70

DE SUBNORMALI LINEÆ SINUUM. ibid.

DE CIRCULO OSCULATORE EJUSDEM CURVÆ. 71

DE QUADRATURA CURVÆ SINUUM. 73

OPUSC. II. *Sur les élements de la rotation du soleil sur son axe déterminés par l'observation de ses taches.* 75

PRÉFACE. ibid.

§. I. *Observations d'une tache du soleil faites à Noslon près de Sens, chez S. E. M.gr le Cardinal de Luynes au mois de 7.bre 1777.* 85

§. II. *Méthode pour en tirer la position géocentrique de la tache.* 89

§. III. *Réduction de la position géocentrique à l'héliocentrique.* 96

§. IV.

(*) In corollariis, & scholiis hujus problematis habentur multæ proprietates lineæ sinuum: in postremo scholio indicatur applicatio earundem proprietatum ad phænomena annuli Saturni.

§. IV. *Méthode pour trouver les interſections de l'équateur ſolaire sur ſon écliptique.* 100
§. V. *Méthode pour déterminer l'inclinaiſon de l'équateur ſolaire à l'écliptique.* 104
§. VI. *Méthode pour trouver le temps de la révolution avec une autre méthode pour en tirer le ſecond élément.* 107
§. VII. *Méthode pour trouver les deux premiers éléments par trois poſitions quelconques de la même tache.* 112
§. VIII. *Réflexions ſur quelques ſuppoſitions, qu'on a fait dans les paragraphes précédents.* 119
§. IX. *Application des nombres aux formules propoſées relativement aux obſervations du §. I. pour la poſition géocentrique, & héliocentrique de la tache.* 125
§. X. *Application du calcul numérique pour trouver la poſition du nœud.* 132
§. XI. *Application du calcul numérique pour trouver l'inclinaiſon de l'équateur.* 138
§. XII. *Application du calcul numérique pour trouver le temps périodique & ſynodique.* 141
§. XIII. *Application du calcul numérique pour trouver les deux premiers éléments par trois poſitions.* 145
§. XIV. *Réflexions ſur les derniers réſultats comparés avec les précédents & d'autres, & ſur quelque phénomènes, qui en dérivent.* 150
APPENDICE *Journal des Obſervations de pluſieurs taches du ſoleil faites à Noſlon près de Sens chez S. E. M.[gr] le Cardinal de Luynes l'année 1777.* 170
OPUSC. III. *De determinatione longitudinis penduli oſcillantis ad ſingula ſecunda temporis medii.* 179
§. I. *De materia maſſæ oſcillantis.* 183
§. II. *De figura maſſæ oſcillantis.* ibid.
§. III. *De magnitudine, & ejus menſura.* 184
§. IV. *De filo ſuſtinente maſſam oſcillantem.* 187
§. V. *De ſuſpenſione.* 191
§. VI. *De menſura diſtantiæ centri arcus oſcillando deſcripti ab aliquo puncto dato ipſius maſſæ.* 196
§. VII. *De determinando numero oſcillationum reſpondentium tempori longiori.* 202
§. VIII. *De determinando numero ſecundorum temporis medii, qui reſpondet eidem tempori.* 205

§. IX. *De determinanda magnitudine arcus deſcripti.* 213
§. X. *De reſtituendo motu.* ibid.
§. XI. *De determinanda acceleratione primæ oſcillationis poſt impulſum facta per vim extraneam.* 215
§. XII. *De reductione oſcillationum obſervatarum ad minimas.* 218
§. XIII. *Demoſtrationes nonnullæ huc reſervatæ.* 221
§. XIV. *De determinatione centri oſcillationis communis totius materiæ oſcillantis.* 224
§. XV. *De determinatione longitudinis penduli ſimplicis oſcillantis ad ſingula ſecunda temporis medii.* 232
§. XVI. *De effectu aeris, & ejus correctione.* 234
§. XVII. *De loco ad obſervationem inſtituendam idoneo.* 236
§. XVIII. *De harum obſervationum uſu.* 240
§. XIX. *Additamentum de centro oſcillationis.* 251
APPENDIX *Inſtructio practica.* 261
§. I. *De inſtrumentis præparandis.* ibid.
§. II. *De methodo obſervationis inſtituendæ.* 263
§. III. *Pro calculo diſtantiæ centri oſcillationis a ſuſpenſione.* 265
§. IV. *Pro numero oſcillationum ab uno appulſu fixæ ad ſequentem.* 266
§. V. *Pro reductione ejus numeri ad numerum oſcillationum minimarum.* 267
§. VI. *Pro numero ſecundorum temporis medii, quod reſpondet eidem tempori.* 268
§. VII. *Pro determinanda longitudine penduli ſimplicis oſcillantis ad ſingula ſecunda temporis medii.* ibid.
§. VIII. *Pro correctione effectus aeris.* 269
OPUSC. IV. *Notice abrégée de l'Aſtronomie pour un Marin.* 270
PRÉFACE. ibid.
§. I. *Des aſtres & de leurs mouvements apparents.* 271
§. II. *De la ſphère armillaire, & du globe céleſte.* 280
§. III. *Des mouvements vrais des aſtres & de leurs cauſes phyſiques.* 299
§. IV. *Du rapport de l'Aſtronomie avec la Marine.* 308
§. V. *Des inſtruments.* 317
TABLE SOMMAIRE. 326
§. I. *Des aſtres & de leurs mouvements apparents.* ibid.
§. II. *De la ſphère armillaire & du globe céleſte.* 328
§. III. *Des mouvements vrais des aſtres, & de leurs cauſes phyſiques.* 332
§. IV. *Du rapport de l'Aſtronomie avec la Marine.* 334
§. V. *Des inſtruments.* 336

OPU-

OPUSC. V. *Methodus determinandi accuratissime altitudinem poli ope gnomonis supplendo instrumenta ad id opportuna, ubi desint.* 338

OPUSC. VI. *Détermination du limbe éclairé de la lune qu'on doit attendre au méridien.* 363

OPUSC. VII. *Méthode pour employer le retour de Vénus à la même longitude par la rétrogradation pour la détermination des éléments moins certains de son orbite.* 372

OPUSC. VIII. *Méthode pour corriger les éléments d'une comète, dont on a la longitude du nœud, & l'inclinaison de l'orbite par un à-peu-près.* 383

OPUSC. IX. *Méthode analogue pour trouver l'orbite elliptique, quand la parabolique ne s'accorde assez avec les observations.* 388

OPUSC. X. *Méthode pour corriger les éléments d'une planète par trois observations.* 397

OPUSC. XI. *De orbitæ inclinatæ projectione in planum eclipticæ.* 404

OPUSC. XII. *De orbitæ inclinatæ projectione in aliud planum.* 409

OPUSC. XIII. *De calculanda aberratione astrorum orta e propagatione luminis successiva.* 417

§. I. *De natura, & binis generibus ejus aberrationis.* ibid.

§. II. *De primo aberrationis genere orto ab inclinatione lineæ visualis ad directionem radii advenientis.* 421

§. III. *De secundo aberrationis genere orto e motu objecti respondente tempori, quo lumen ab ipso devenit ad oculum.* 428

§. IV. *De aberratione composita e præcedentibus binis simul conjunctis.* 430

OPUSC. XIV. *Démonstrations simples de quelques beaux théorèmes appartenants aux triangles.* 438

EXTRAIT

Du Tome V, 444

§. I. *Du premier Opuscule.* ibid.

§. II. *Du second Opuscule.* 456

§. III. *De l'Opuscule III.* 461

§. IV. *De l'Opuscule IV.* 468

§. V. *De l'Opuscule V.* 469

§. VI. *Des Opuscules VI, & VII.* 471

§. VII. *Des Opuscules VIII, IX, X.* 474

§. VIII. *Des quatre derniers Opuscules.* 481

OPUSCULUM I.

De disparitione, et apparitione annuli Saturni.

1. Problema, quo quæritur disparitio, & apparitio annuli Saturni cum determinatione numeri solutionum possibilium pro quovis casu particulari, quod sublimi, & elegantissima methodo analytica solvit summus Geometra *Dionysius Du-Sejour* (*), admittit solutionem linearem per con-

(*) Is quidem *solutionem suam edidit Parisiis Opere egregio sub ipsam postremam horum phænomenorum epocham*. Statim post ejus Operis editionem ego hanc perquisitionem institui methodo geometrica, & paullo post absolvi hoc Opusculum, in quo post constructionem admodum simplicem ope lineæ sinuum fusâ admodum pertractatione evolvi duplici modo casus omnes, non eos tantum, qui possint occurrere spectanti e terra habente eam velocitatem, quam ipsa habet in orbita sua quamproxime triplam velocitatis Saturni, sed qui haberentur, quæcumque esset ratio velocitatum. Ea eorum casuum evolutio non pertinet ad usus astronomicos, pro quibus solis Opusculum hoc evaderet multo brevius, sed ad geometricam contemplationem haud sane inutilem, &, ut omnino spero, non injucundam Geometriæ amatoribus. Multa ex iis omisi in alio Opusculo, quod de hoc ipso argumento gallice conscripsi paullo post, retentâ hujus parte maximâ, & ad ipsum ejus Operis Auctorem detuli obsequii mei pignus, nullo ejus exemplari apud me retento, cum hoc fusius, & plura complectens jam tum destinaverim typis.
Porro cum meam hanc solutionem præstet linea sinuum, in hoc ipso initio exhibui ejus constructionem, & proprietates plures e simplicioribus, potissimum eas, quæ usui futuræ erant pro determinatione disparitionum, & apparitionum annuli, de qua agitur, & ea quidem continentur in problemate primo, & ejus corollariis. In fine Opusculi habetur numero 166 Appendix, in qua demonstrantur nonnullæ aliæ proprietates ipsius. Ea adjuncta huic problemati cum hisce corollariis continet seriem quandam elementorum hujus curvæ.

ſtructionem admodum elementarem, & ſimplicem, quæ ope circuli habentis diametrum minorem uno pede exhibeat determinationem ita proximam, ut plerumque aberret minus, quam una, vel altera hora, & calculo numerico admodum facili poſſit acquirere ſummam accurationem, uſque ad quoslibuerit limites. Proderit evolvere eam ſolvendi methodum, tam ut pateat conſenſus Geometriæ cum calculo, & vis Geometriæ ipſius in iis, quæ pertinent ad communes Aſtronomiæ uſus, quam ut ejus perquiſitionis fructus pertineat ad eos quoque, qui non ſunt ſatis exercitati in eo calculorum ſublimiorum genere.

2. Requiritur ad eam ſolutionem conſtructio lineæ ſinuum ſatis notæ Geometris, & conſideratio ejus naturæ, ac proprietatum præcipuarum, quæ itidem ſunt notiſſimæ, & facile obtinentur per Geometriam admodum elementarem, cujus ope, datâ ſemel ratione diametri ad circumferentiam veræ proximâ, ut 113 ad 355, admodum facile ea curva conſtruitur per puncta, inventis punctis ad ipſam quot libuerit, & ut libuerit proximis ſibi invicem.

PROBLEMA I.

3. *Dato radio circuli, & ratione diametri ad circumferentiam conſtruere lineam ſinuum.*

4. Deſcripto circulo (Tab. I fig. 1), cujus centrum C, radius datus CA, compleatur diameter ACB, ac per continuam biſectionem dividatur tota circumferentia in partes 4, 8, 16, 32 &c.: earum ſectionum binæ ſint F, *f*, ac e ſingulis ſectionibus demittantur perpendicula FE, *fe*. Aſſumatur (fig. 2) recta ACB, quæ ad radium CA habeat rationem circumferentiæ ad diametrum, proxime 355 ad 113: adjectâ in directum BA' huic æquali, ſecetur utraque per biſectionem continuam in eundem numerum partium, in quem ſecti ſunt illi radii, ac e ſingulis punctis E, *e* erigantur perpendicula EF, *ef* æqualia perpendiculis correſpondentibus figuræ 1 ita, ut in AB ducantur ſurſum incipiendo ordine directo AB, & in A'B deorſum ordine retrogrado, exiſtentibus A'E', A'*e*' æqualibus AE, A*e*. Per omnia puncta ita inventa ducatur linea continua, quæ erit quæſita linea ſinuum. Rectas

AB,

AB, BA' æquales semicircumferentiis appellabimus bases semicirculares, ac arcus integros ADB, BD'A' arcus semicirculares, alterum superiorem, alterum inferiorem.

5. Constructio patet; nam AB, BA' erunt æquales semicircumferentiis ADB, BD'A figuræ 1; adeoque singulæ abscissæ A*e*, AE arcubus A*f*, AF fig. 1, & ABE', AB*e*' arcubus ADBD'F', ADBD'*f*' figuræ ipsius: erunt autem ordinatæ EF, *ef* æquales sinubus EF, *ef* figuræ prioris, & E'F', *e*'*f*' sinubus EF', E*f*' illius ejusdem, qui sinus sunt ibi æquales prioribus EF, *ef*, sed cum directione contraria.

6. *Corol.* 1. Quoniam arcus incipiens ab A potest continuari utrinque in infinitum, redeuntibus semper iisdem sinubus; patet, lineam sinuum continuari utrinque a puncto A arcubus infinitis superioribus, ac inferioribus alternatim positis: ii omnes erunt inter se æquales, & axem abscissarum secabunt ad intervalla æqualia dimidiæ circumferentiæ: arcus singuli recessum habebunt *maximum* ab axe in medio singularum basium AB, BA' in C, C' æqualem radio circuli CD, eruntque similia, & æqualia singula arcuum dimidia AD, DB, BD', D'A', cum omnibus sequentibus, quæ *sola positione* different a se invicem. Quare satis erit in charta crassiore delineare solum arcum AD respondentem primo quadranti ad habendam sola idonea applicatione continua ipsius exsecti totam curvam productam utrinque, quantum libuerit in infinitum. Res facilius perficeretur constructo semel modulo exsecto e *lamina metallica*.

7. *Corol.* 2. Patet etiam, eandem curvam posse exhibere sinus EF, *ef* respondentes tam arcubus AF, A*f* figuræ 1 incipientibus ab A, quam arcubus BF, B*f* incipientibus a B ordine retrogrado, cum sinus post quadrantem redeant iidem.

8. *Corol.* 3. Ope curvæ jam constructæ facile habebitur sinus ex data recta æquali arcui, & viceversa recta æqualis arcui ex dato sinu. Datâ rectâ æquali arcui, capietur in fig. 2 AE ipsi æqualis, & erecto perpendiculo EF, id erit æquale sinui quæsito. Dato sinu, capietur in recta CD segmentum CI ipsi æquale, & ductâ per I rectâ parallela AB, donec occurrat curvæ in F, &

rectæ ductæ per A perpendiculari ad AB in K, erit FK recta quæsita respondens ei arcui.

9. *Schol.* 1. Hoc secundum problema habebit in singulis arcubus semicircularibus solutiones binas in F, & F'', si sinus datus sit minor radio; unicam in D, si sit ipsi æqualis; nullam, si exigatur sinus major radio, ut patet ex ipsa constructione. Habebuntur autem in primo, & secundo casu solutiones numero infinitæ in infinitis numero arcubus semicircularibus hinc, & inde ab A, binæ in singulis in primo, singulæ in secundo. Binæ cujusvis arcus semicircularis exhibebunt binos arcus pertinentes ad eundem sinum, qui arcus erunt sibi invicem supplementa: addendo ipsis *circumferentias integras quotcumque*, habebuntur solutiones reliquæ: *semicircumferentiæ additæ habent sinus ejusdem magnitudinis*, sed positionis contrariæ.

10. *Schol.* 2. Arcus quadranti proximus male definietur e suo sinu, cum differentiæ arcuum prope quadrantem sint nimis exiguæ, adeoque intersectio rectæ IF cum curva habente *ibi directionem* parum abludentem ab ipsius directione difficile discerni poterit.

11. *Corol.* 4. Dato puncto F in circumferentia circuli figuræ 1 invenietur recta æqualis arcui AF (*). Demisso enim sinu FE in-

(*) Patet ex hoc, & superiore corollario, ope hujus curvæ haberi non solum trisectionem anguli, sed sectionem in quacumque ratione data. Invenietur enim arcus circuli generantis hanc curvam, qui sit ejus mensura, tum recta æqualis huic arcui: secabitur ea recta in ratione data: invenietur sinus arcus æqualis parti sectæ ejus rectæ, & ex eo sinu is ipse arcus, adeoque & angulus, cujus is sit mensura. En autem seriem expeditam operationum pro constructione ejus problematis.

Fiat in fig. 1 angulus ACF æqualis dato: ducatur FI parallela AC: assumatur in fig. 2 CI æqualis ei, quæ habetur in fig. 1; ducatur IF parallela CA occurrens curvæ in F: ducatur FE perpendicularis ipsi CA: erit recta AE æqualis arcui AF figuræ 1. Secetur ea recta in fig. 2 in ratione data in *e*: ducatur *ef* parallela CD usque ad curvam in *f*: sumatur in fig. 1 C*i* æqualis huic *ef*: ducatur *if* parallela CA usque ad circulum: arcus A*f* erit æqualis rectæ A*e* figuræ 2, adeoque arcus AF figuræ 1 erit sectus in *f* in eadem illa ratione data, in qua erat secta recta AE in *e*, & si ducatur radius C*f*, is secabit angulum ACF in eadem ratione data.

invenietur in fig. 2, per corol. 3, recta FK æqualis arcui quæsito. Sed si punctum F fuerit parum remotum a puncto D; satius erit ducere cosinum FI, & captâ in fig. 2 rectâ CI æquali ei cosinui ducere rectam IF, quæ erit æqualis arcui quæsito. Erit enim FK æqualis arcui DF figuræ 1, & cum tota KI figuræ 2 = AC sit æqualis quadranti DFA figuræ 1, residuum IF hujus erit æquale illius residuo AF.

12. *Corol.* 5. Subtangens lineæ sinuum æquatur tangenti circuli in punctis habentibus eundem sinum. Si enim per puncta F, *f* figuræ utriusque ducatur recta, quæ occurrat axi in H, & recta ex *f* parallela basi occurrat rectæ EF in G; erit utrobique tam recta F*f* ad FH, quam E*e* ad EH in eadem ratione FG ad FE. Si ordinatæ EF, *ef* accedant ad se invicem in infinitum, donec congruant, desinente recta FH in eo casu in tangentem FT; ratio chordæ F*f* ad arcum figuræ 1 æqualem rectæ E*e* figuræ 2 accedet ad æqualitatem ultra quoscumque limites: adeoque & EH figuræ 2 accedet ad rationem æqualitatis respectu FH figuræ 1, cui evadet æqualis tum, cum congruentibus ordinatis abibit FH in *utraque figura in tangentem FT*, adeoque subtangens *ET figuræ* 2 erit æqualis tangenti *FT figuræ* 1 (*).

13. *Co-*

(*) Demonstratio subjicietur oculis melius ope harum binarum proportionum, quarum prior pertinet ad fig. 1, posterior ad fig. 2. { FG : FE :: F*f* : FH / FG : FE :: G*f* : EH

Priores bini termini proportionis primæ sunt æquales prioribus binis secundæ: tertius primæ est corda circuli, quæ non est æqualis suo arcui, & tertius secundæ G*f* est æqualis arcui ipsi, cum & arcus F*f* figuræ 1, & recta G*f* figuræ secundæ æquentur eidem rectæ E*e* hujus. Hinc nec quartus terminus primæ, nimirum secans FH (fig. 1) non est æqualis quarto secundæ, nimirum subsecanti EH (fig. 2): sed accedente utrobique puncto *f* ad F ultra quoscunque limites in se determinatos, ratio cordæ F*f* ad suum arcum accedit ad æqualitatem itidem ultra quoscumque limites: hinc & ratio secantis circuli, quæ est quartus terminus primæ ad subsecantem curvæ, quæ est quartus terminus secundæ, accedit ad rationem æqualitatis ultra quoscumque limites. Abeunte demum *f* utrobique in F evanescunt tertii termini, remanent quarti. Hi debent habere rationem illam, ad quam accesserant ultra quoscumque limites & ipsi, & tertii termini, nimirum rationem æqualitatis.

Illa appellatur a Newtono ratio ultima evanescentium, qua appellatione quando-

13. *Corol.* 6. Hinc facile erit ducere tangentem per quodvis punctum datum F (fig.2) lineæ sinuum. Ductâ FE perpendiculari ad axem, captâ CI in CD figuræ 1 ipsi æquali, ductâ ibi IF parallelâ AB, tum CF, & ipsi perpendiculari FT, quæ erit tangens circuli, capiatur ipsi æqualis ET in fig. 2, ducaturque FT: ea erit tangens quæsita.

14. *Corol.* 7. Quoniam tangens in circulo semper est major arcu, & ipsum eo majore excessu superat, quo magis acceditur ad quadrantem; etiam subtangens ET in fig. 2 erit major, quam abscissa AE, & AT erit æqualis excessui tangentis circuli supra arcum eo major, quo magis punctum F accedet ad D.

15. *Corol.* 8. *Poterit duci tangens lineæ sinuum, cujus subtangens ad ordinatam habeat rationem datam quamcumque.* Fiat enim *in fig.* 1 *ut terminus antecedens ejus rationis ad consequentem, ita CD ad CE: erigatur ordinata EF: ducatur tangens FT: tum in fig.* 2 *capiatur CI versus D æqualis EF figuræ* 1*: ducatur IF parallela axi: demittatur FE*: capiatur ET *æqualis FT* fig. 1: ducaturque FT, hæc erit *tangens* quæsita. Fore tangentem *patet ex coroll. 5: haberi* rationem quæsitam subtangentis TE ad ordinatam EF, patet ex eo, quod ob angulum TFC rectum

---

doque utor & ipse. Sed Newtonus addit, quam rationem eæ quantitates non habent neque antequam evanescant, neque posteaquam evanuerunt, sed tum cum evanescunt. Ea mihi expressio non placet. Tum cum evanescunt, jam sunt nihil: inde aliqui etiam primæ notæ Geometræ admiserant rationem inter nihila, ut aliquod nihil sit etiam duplum, decuplum alio. Quod jam est nihil, nullam habet proprietatem. Revera illa nec est ratio ultima illarum quantitatum, sed est limes ultimus rationum omnium, quas eæ habuerunt, antequam evanescerent, quam rationem eæ quidem nunquam assecutæ sunt, quia eo momento, quod fuit terminus ultimus eorum, ut ita dicam, vitæ, illæ jam non extiterunt: sed eam acquirunt eæ quantitates, quæ semper habuerant eandem rationem ac ipsæ, & ipsis jam pereuntibus remanserunt: cum eæ adhuc existant, debent habere rationem aliquam, nec omnino possunt habere aliam, nisi eam, ad quam ultra quoscumque limites accesserant. Chorda, & arcus jam non existunt: secans circuli evadit tangens, subsecans curvæ evadit subtangens: hæ remanent, & debent habere rationem æqualitatis, ad quam ultra quoscumque limites accesserant. Hæc est hujus methodi vis, quæcumque expressio ad eam significandam adhibeatur.

ctum in fig. 1 erit CF, sive CD ad CE, ut TF ad FE, nimirum ut in figura 2 TE ad FE.

16. *Corol. 9.* Angulus tangentis cum axe erit æqualis angulo CDE figuræ 1, qui semper erit minor semirecto præter puncta extrema A, B, in quibus evadet semirectus. Patet primum, quia cum sit TE ad EF in fig. 2, ut CD ad CE in fig. 1, & anguli iis lateribus intercepti sint recti, ea triangula erunt similia, & angulus ETF figuræ 2 æqualis angulo CDE figuræ 1. Porro angulus CDE in fig. 1 erit semper minor semirecto, donec abeunte E in A, vel in B, evadat semirectus: eo casu abibit in utraque figura F in A, vel B. Si autem CD sit minor quam CE; nec habebitur ordinata EF figuræ 1, nec tangens FT, cui subtangens evadat æqualis. Quævis tangens TF est major in fig. 1 sinu FE, & habet ad ipsum rationem, quæ, imminuto arcu AF ultra quoscumque limites, accedit in infinitum ad rationem æqualitatis. Quare in fig. 2 latus ET semper erit majus latere EF, adeoque angulus oppositus ipsi EF semper minor semirecto, donec productâ prius TF indefinite in V; & abeuntibus punctis E, F, T in A, *angulus CTV evadat semirectus.*

17. *Schol. 3.* Casus tangentis impossibilis erit is, in quo ratio subtangentis ad ordinatam debeat esse minoris inæqualitatis. Pro ratione æqualitatis contactus cadent in puncta, in quibus curva pervenit ad axem, ubi ipsa in eo casu rationis æqualitatis continebit cum axe ipso angulum semirectum: quævis ratio majoris inæqualitatis, vel quivis angulus minor semirecto inveniet tangentem sibi respondentem. Patet autem, in quovis arcu semicirculari tangentes fore duas anguli ejusdem respondentes rationi eidem: nam recta FI occurret eidem arcui in alio puncto F'', ubi ratio F''T'' ad F''E'' erit eadem, & angulus ad T'' erit idem: sed directio subtangentis erit opposita, & angulus erit obversus in plagam oppositam. Binæ aliæ ejusmodi tangentes habebuntur in arcu opposito BD'A' in punctis F', F''' determinatis a CI' directionis oppositæ. Eæ quatuor tangentes determinarentur a binis CE, CE' in fig. 1 directionis contrariæ relatis ad directiones oppositas CA, CB, & determinantibus quatuor puncta F, F', F'', F''',

qui-

quibus respondeant in fig. 2 quatuor contactus. Solum in casu subtangentis infinitæ habebitur in singulis arcubus tangens unica in punctis D, D'. Erunt autem parallelæ singulæ arcus superioris singulis arcus inferioris, ut FT, T'F', & F''T'', T'''F'''.

18. Si debeat definiri positio ejus tangentis calculo numerico; id facile præstabitur. Radius circuli fiat $= 1$, ratio data subtangentis ad ordinatam sit m ad 1, quæ erit itidem ratio tangentis FT figuræ 1 ad sinum FE, sive radii CF ad CE cosinum arcus AF. Quare is cosinus erit $= \frac{1}{m}$. Arcus habens eum cosinum dicatur a, & ejus tangens t: erit a valor rectæ EA figuræ 2, & t valor subtangentis ET, adeoque AT ibidem $= t - a$, angulus autem CDE figuræ 1, cujus cotangens $\frac{CD}{CE} = m$, erit æqualis angulo ETF. Recta AT haberi poterit etiam in partibus circuli, quæ sunt partes scalæ axis figuræ 2. Radius $= 1$ continet gradus 57°. 17'. 45'', sive minuta $3437\frac{3}{4}$, vel proxime *3438*, adeoque numerus miuutorum rectæ ET erit $3438t$. Hinc si a exprimat numerum minutorum arcus a habentis cosinum $= \frac{1}{m}$; erit numerus minutorum rectæ AT $= 3438t - a$.

19. Corol. 10. *Quivis arcus semicircularis lineæ sinuum obvertit ubique cavitatem axi, nec ulli rectæ potest occurrere in pluribus, quam duobus punctis, nec ab ulla recta tangi, nisi in unico puncto, ac arcus curvæ continuus in omnibus punctis, in quibus pertingit ad axem, ita ipsum secat, ut ibidem habeat flexum contrarium, & secet suam tangentem.*

20. Sit enim in fig. 3 semicirculus ADB idem, qui in fig. 1, & arcus ADB, idem in 4, qui in 2: sint autem in fig. 4 bina puncta curvæ F, f quæcumque, cum punctis F, f correspondentibus in fig. 3: ducatur utrobique recta Ff, seceturque bifariam in N, ac demittantur perpendicula FE, NP, fe in rectam AB: sit M concursus rectæ PN cum linea sinuum in fig. 4, ac rectæ CN cum arcu circuli in fig. 3, & demittatur ibidem perpendiculum MO in AB.

21. Pa-

21. Patet, fore utrobique PN semisummam sinuum EF, *ef*; qui cum sint ejusdem magnitudinis utrobique, erit & PN utrobique magnitudinis ejusdem. Porro in fig. 3 erit sectus bifariam arcus F*f* a radio CM secante bifariam ejus chordam, adeoque cum & recta Ee in fig. 4 ipsi respondens secta sit bifariam in P, arcus AM, & sinus MO illius respondebunt rectæ AP, & sinui PM hujus, adeoque PM hujus æquabitur OM illius. Porro ob CM majorem quam CN in fig. 3, etiam OM ibidem erit major quam PN: quare in fig. 4 PM erit major quam PN, & punctum M jacebit ultra rectam F*f* respectu axis AB. Eodem pacto si concipiantur chordæ FM, *f*M in fig. 4, & per ipsas bifariam sectas rectæ perpendiculares axi; eæ occurrent arcui curvæ ultra eas chordas, quæ chordæ itidem jacent ultra chordam F*f*. Quare & illa puncta, & alia omnia, ad quæ deveniretur ductis perpetuo novis chordis, & factis novis bissectionibus, jacent ultra chordam F*f*, quod fieri non potest, nisi omnia puncta ejus arcus jaceant ultra ipsam, cum ea continua bissectione debeat accedi ad quodvis punctum ipsius arcus ultra limites quoscumque per puncta ita inventa, quorum singula posita erunt ultra ipsam chordam, & ab ea distabunt per distantiam quandam in se determinatam. Cum vero arcus quivis jaceat totus ultra chordam respectu axis, patet, obverti ubique cavitatem axi ipsi.

22. Inde facile deducitur, nullam rectam posse occurrere arcui ADB in pluribus, quam in duobus punctis: si enim haberetur occursus in punctis tribus; punctum medium non jaceret ultra rectam, quæ conjungeret extrema, sed esset in ipsa.

23. Contactum non posse haberi nisi in unico puncto, patet ex eo, quod arcus perpetuo cavus versus axem, ultra quem non transeat, debet jacere utrinque a contactu inter tangentem, & ipsum axem. Quare aliqua pars arcus jaceret citra rectam, quæ conjungeret binos contactus, non ultra ipsam.

24. Haberi in A flexum contrarium, & tangentem secari ab arcu, patet ex eo, quod si OAV sit tangens, & BA producatur in T, arcus DA debet jacere in angulo BAV, & ejus continuatio in angulo OAT, ut jaceat inter tangentem, & axem;

quod requiritur, ut obvertat utrobique cavitatem axi.

25. Corol. 11. *Nulla recta totam lineam sinuum utrinque infinitam tangit in punctis pluribus, quam duobus præter binas rectas axi parallelas, quæ tangunt in vertice altera omnes arcus superiores, altera omnes inferiores. Recta, quæ transiens per quampiam intersectionem curvæ cum axe tangit arcum aliquem ex una parte, tangit ex parte opposita ad eandem distantiam alium æque distantem ab eadem intersectione: cæteræ omnes tangentes habent unicum contactum unius arcus tantummodo.*

26. Consideretur (fig. 2) punctum F'' delatum motu continuo retrogrado a puncto B usque ad D: linea BT'' augebitur, donec punctum T'' deveniat ad A'. In eo casu ejus productio incipiet incurrere in primum arcum inferiorem, qui occurret post superiorem contiguum arcui $BD'A'$. Si enim tota figura relicto vestigio suæ positionis prioris convertatur circa punctum A' motu semicirculari sine inversione plani ita, ut totus axis, qui jacebat ultra A' ad dexteram, congruat cum toto axe præcedentis positionis, qui jacet ab A' ad sinistram; patet, omnes arcus inferiores ita translatos debere congruere cum superioribus positionis præcedentis sitis in eadem distantia ab A', & superiores cum inferioribus: productio tangentis $F''T''$ jam transeuntis per punctum conversionis A' redibit supra ipsam $T''F''$, & in puncto curvæ, quod abiit in F'', habebit similem contactum, ad eandem distantiam $T''F''$. Idem accidet tangentibus omnibus transeuntibus per quamvis sequentem intersectionem curvæ cum axe. Cum, factâ dimidiâ conversione figuræ, omnes arcus inferiores jacentes ad dexteram debeant abire in superiores ad lævam positos ad eandem distantiam, productio tangentis rediens supra se ipsam tanget in puncto æque distante arcum congruentem cum arcu contactus prioris.

27. Continuo motu puncti F'' tangens $F''T''$ producta deveniet ad contactum cum arcu inferiore primo post A' in appulsu T'' ad A', uti ex parte superiore tendens ad lævam in eodem appulsu T'' ad A' tangit primum superiorem BDA in quodam puncto F'' propiore puncto D, quam sit id, quod figura exhibet. In appul-

pulsibus singulis ipsius T^{v} ad singulas intersectiones sequentes ea recta deveniet ordine suo ad contactum arcus inferioris tertii, quarti &c, secabit autem omnes intermedios: solum ubi F^{v} adveniet ad D, tangens facta parallela axi tanget omnes reliquos arcus in punctis respondentibus ipsi D. Porro ea, quæ deveniet ad aliquod ex iis punctis, producta debebit post numerum arcuum æqualem numero præcedentium interceptorum inter ipsum, & illum arcum, quem ea primo contigit, contingere in eadem distantia ab eodem puncto alterum habentem directionem oppositam, cum nimirum tota figura subsequens sit prorsus similis, & æqualis præcedenti, sola directione arcuum *mutata ita*, ut inferiores sequentes respondeant superioribus inde æque distantibus, & dimidia conversione facta circa id punctum, omnes ii inferiores debeant ita abire in superiores cum productione tangentis abeunte in tangentem ipsam præcedentem, ut omnia congruant. Recta autem ipsa inter eos binos contactus secabit omnes arcus intermedios, & *utrinque* ultra ipsos producta ita recedet ab axe, ut nulli e præcedentibus, vel sequentibus possit ultra occurrere. Quamobrem nulla recta, quæ non transit per unam ex ejusmodi intersectionibus, potest contingere *binos* arcus, nec ulla ex iis, quæ transeunt per aliquod ex iis punctis, poterit habere plures, quam illos duos contactus oppositos, quos tamen omnino habebit quævis tangens transiens per unum ex ejusmodi punctis (*).

28. *Schol.* 4. Ope harum proprietatum lineæ sinuum facile expediuntur per constructionem linearem, & admodum simplicem, ut innuimus numero 1, ea, quæ pertinent ad disparitiones, & apparitiones annuli Saturni, cujus constructionis consideratio deducit ad calculum numericum itidem simplicem. Eam omnem

B 2 theo-

(*) Ad habendum complementum theoriæ hujus curvæ subjicienda est huic numero Appendix, cujus mentio est injecta in adnotatione ad numerum 1: ea habetur in fine hujus Opusculi numero *166*. Habentur ibi quæ pertinent ad subnormalem, ad circulum osculatorem, & ad areæ quadraturam, quorum omnium determinatio obtinetur per constructionem admodum facilem, & expeditam post analysim non algebraicam, sed linearem, & demonstrationes per linearem Geometriam institutas, quam hic etiam huc usque adhibuimus.

theoriam Sejourius reduxit ad combinationem binorum motuum æquabilium binorum punctorum, alterius in peripheria circuli, alterius in ejus diametro, additis correctionibus nonnullis ob hypothesim motus circularis substitutam motui elliptico, & velocitatem constantem motus utriusque velocitati nonnihil variatæ.

29. Annulus Saturni videri non potest, 1°. cum directio ejus plani transit per solem, a quo in ea positione neutra ejus facies illuminatur, 2°. cum eadem transit per terram, respectu cujus neutra facies tunc est conspicua, 3°. cum id planum transit inter solem, & terram, quo casu obvertitur terræ facies aversa a sole, & idcirco obscura. Priores duæ positiones sunt momentaneæ, tertia durat aliquandiu, & semper vel incipit, vel desinit per alteram ex iis binis prioribus.

30. Centrum terræ motu annuo transfertur circa solem in orbita proxime circulari, & velocitate parum admodum mutata, dum interea Saturnus progreditur in orbita sua, & secum transfert suum annulum motu proxime parallelo. Intersectio plani ipsius annuli cum plano eclipticæ est recta linea, quæ itidem progreditur motu parallelo, & is motus est proxime uniformis toto eo tempore, quo ea recta percurrit orbitam terrestrem tanto minorem orbitâ Saturni. Si concipiatur diameter orbitæ terrestris perpendicularis ei rectæ mobili, ejus intersectio cum ipsa recta erit punctum illud percurrens diametrum motu uniformi, dum centrum terræ percurrit motu itidem uniformi circumferentiam. Ad determinandam vel disparitionem momentaneam, vel initium, & finem disparitionis permanentis usque ad novam apparitionem oportet determinare momentum, in quo illud punctum in motu suo per diametrum incidit in solem, & momenta, in quibus incidit in ordinatam circuli transeuntem per punctum secundum, quod percurrit circumferentiam: tum enim terrâ, cujus locus est illud punctum, positâ in illa intersectione, planum annuli transit per ipsam.

31. Primum illud momentum facile invenitur dato loco primi puncti in ea diametro pro dato quopiam momento temporis, quod præcedat nonnihil appulsum ipsius ad centrum, & datâ ipsius velocita-

cita-

citate, quæ duo facile inveniuntur. Cum enim id punctum digressum a loco solis redeat ad ipsum circiter post dimidiam revolutionem Saturni in orbita sua, nimirum post annos circiter 15, facile est, ex postremo ejus appulsu ad solem facto in postrema horum phænomenorum serie judicare de momento nonnihil præcedente eum regressum. Facile autem inveniuntur pro eo momento assumpto illa duo ope calculi astronomici, datis motibus Saturni, & positione annuli respectu *eclipticæ* : *ope* ipsius calculi facile invenitur etiam locus secundi puncti, nimirum centri terræ pro eodem momento, adeoque & celeritas ejusdem centri, unde habebitur ratio earundem celeritatum. Si fiat, *ut celeritas primi* puncti ad celeritatem terræ, ita *distantia loci ejusdem primi puncti a sole eruti ex illo* calculo astronomico ad arcum interea descriptum ab ipso terræ centro; invenietur is arcus, qui additus loco priori terræ in ecliptica exhibebit locum ipsius terræ pro eo momento, quo primum punctum pervenit ad solem: ex loco terræ invento invenitur ope calculi astronomici momentum quæsitum appulsus primi puncti ad centrum circuli, quod erat primo inveniendum: tum invenietur arcus interceptus eo momento inter ipsum locum terræ, & utrumvis verticem diametri perpendicularis illi priori diametro. Is arcus, & ratio velocitatum erunt elementa, ex quibus ope lineæ sinuum invenientur omnes concursus primi puncti cum ordinata circuli transeunte per secundum.

32. Velocitas terræ est major velocitate primi puncti (*); sed ad plenam problematis solutionem considerabimus rationem velocitatum quamcumque, sive supponatur velocitas circularis minor rectilineâ, sive ipsi æqualis, vel eâ major. *Sed hìc in antecessum*

(*) Prima est tantillo major, quam tripla secundæ, quod habebitur infra in applicatione theoriæ generalis ad phænomena videnda e terra, quæ habebitur in problemate VII num. 123: Saturnus enim planum sui annuli defert secum motu parallelo, & intersectio illa ibi progreditur velocitate proxime æquali velocitati ipsius Saturni: velocitates autem mediæ terræ & Saturni sunt in ratione reciproca subduplicata distantiarum a sole, sive proxime ut $\sqrt{9,559} = 3,089$ ad 1.

sum *notabimus* quædam pauca, quæ pertinent ad generalem comparationem illorum motuum.

33. Dum punctum secundum motu suo uniformi describit circulum; ordinata per ipsum transiens in initio, & fine ejus diametri habebit velocitatem imminutam in infinitum, quæ perpetuo crescet in accessu ejus ordinatæ ad centrum, decrescet in recessu: semper autem est minor velocitate puncti secundi in circulo ob obliquitatem arcus ipsius respectu diametri præter momentum, in quo ea ordinata transit per centrum: ibi ob arcum perpendicularem ei ordinatæ velocitas ipsius erit æqualis velocitati ejusdem puncti secundi in circulo. Exhibebimus solutionem problematis, quo quæritur concursus ordinatæ puncti secundi cum puncto primo, ope lineæ sinuum: tum adjiciemus animadversiones nonnullas in plura, quæ huc pertinent, & evolvemus casus singulos, ac proponemus rationem instituendi calculum numericum, & adhibendi correctiones.

PROBLEMA II.

34. *Invenire occursum puncti uniformiter progredientis in diametro circuli cum ordinata ejusdem diametri ducta per punctum uniformiter progrediens in ejusdem circuli circumferentia ex data ratione velocitatum, & dato loco secundi puncti pro eo momento temporis, quo primum punctum appellit ad centrum.*

35. Sit in fig. 5 MD diameter circuli, quam percurrit punctum I motu uniformi ascendendo ab M versus D, dum aliud punctum F percurrit circumferentiam directione ADBM: sit AB diameter perpendicularis priori, & punctum secundum F abeat motu uniformi ascendendo ad lævam in semicirculo superiori per AD, & descendendo per DB, tum in inferiori ad dexteram descendendo per BM, & ascendendo per MA: dum autem primum punctum appellit ad centrum C, sit secundum in semicirculo superiori in T, vel in inferiori in T'. Quæritur ordinata IF, ad quam pervenient simul in I, & F.

36. Ordo litterarum A, & B hic immutatus est respectu figuræ 1, positâ A ad dexteram, quæ ibi fuerat ex parte læva, ut

ascen-

ascensus ad lævam imitetur motum planetarum post solem, qui fit abeundo ad lævam respectu aspicientis solem ipsum. Posita est itidem littera M pro D', ad servandam melius quandam analogiam geometricam in linea sinuum, quæ adhibebitur in sequentibus figuris pro solutione problematis, & determinatione diversorum casuum, quam ob causam in ipsa etiam respectu figuræ 2 mutabitur & ordo litterarum, & littera D'.

37. Fiat in fig. *6* linea sinuum, in qua *primus arcus* semicircularis ascendat ab A per AD ad lævam, descendat per DB respondens semicirculo superiori ADB figuræ 5, tum descendat per BM, ascendat per MA', sed progrediendo semper ad lævam, licet respondeat semicirculo BMA figuræ 5 *regredienti* versus dexteram. Ex parte vero dextera descendat primus arcus per A*m*, ascendat per *mb*, respondens semicirculo AMB, tum ascendat secundus per *bd*, descendat per *da'*, respondens semicirculo BDA. Continuabuntur plures ii arcus in sequentibus figuris Tabulæ II (*): *debent autem* concipi infiniti utrinque, qui distinguendi sunt per accentus adjectos ex parte læva per novos arcus A'D'B', B'M'A'', A''D''B'', B''M''A''' &c., & ex parte dextera per novos *a'm'b'*, *b'd'a''*, *a''m''b''*, *b''d''a'''* &c.

38. Capiatur in eadem figura *6* (Tab. I) num. 8 recta AT versus B, vel AT' versus *b* æqualis arcui AT, vel AT' figuræ 5: capiatur CL versus A, quæ sit ad radium circuli = CD, ut est velocitas secundi puncti in circulo ad velocitatem primi in diametro

(*) Ad coarctandam eam Tabulam bases arcuum ibi delineatæ sunt respectu altitudinum breviores justo: deberent esse, ut in figuris 2, 4, *6*, *7*, ad altitudinem singulorum arcuum in ratione semicircumferentiæ circuli ad radium, nimirum paullo etiam longiores, quam triplæ: factæ autem sunt tantummodo duplæ, & arcus ipsi circulares. Ad ea, quæ subsequentur, sistenda oculis necessarius erat ille arcuum numerus, qui cernitur in figuris sequentibus: si bases assumptæ fuissent respondentes altitudinibus ejus magnitudinis, quæ ibi habetur; tabula evasisset nimis lata: si altitudines respondentes iis basibus; plures rectæ evasissent nimis parum distantes a se invicem. Facile autem mente suppletur forma debita, quam in iis, ad quæ hæ figuræ adhibentur, satis supplet semicircularis assumpta.

tro (*): ducatur DL, tum ex T, vel T' recta ipsi parallela, cujus occursus cum linea sinuum in F, vel F' solvet problema. Ducto nimirum FE, vel F'E' perpendiculo in axem, & assumpta in fig. 5 CI, vel CI' ipsi æquali cum directione eadem, ducatur IF, vel I'F' versus A, vel B, prout punctum F, vel F' in fig. 6 ceciderit ante, vel post dimidium arcum semicircularem lineæ sinuum: ordinata FI, vel F'I' ita inventa erit illa, quæ quæritur, ad quam nimirum simul appellent primum punctum in I, vel I', & secundum in F, vel F'.

39. Demonstratio est facilis. Quoniam AT est ejusdem longitudinis in utraque figura (idem dicendum de AT'), & ex natura lineæ sinuum arcus AF figuræ 5 æquatur rectæ AE figuræ 6; erit & arcus TF illius æqualis rectæ TE hujus, ac CI illius, & EF hujus æquabuntur per constructionem. Est autem in hac TE ad EF, ut CL ad CD, nimirum ut est velocitas puncti secundi ad primum. Igitur erit ibi arcus TF ad rectam CI in eadem ratione, adeoque dum punctum primum percurrit rectam CI, secundum percurrit arcum TF, & simul appellunt ad eam ordinatam, ut oportebat (**).

40.

(*) Hic assumpta est CL minor radio CD, ut figura evaderet simplicior: respondet velocitati minori, & in ejusmodi casu ubicumque sit D, non habetur nisi unicus occursus rectæ parallelæ huic LD cum tota curva etiam in infinitum producta. Sed pro terra, cujus velocitas est plus quam triplo major, recta CL multo longior requirit inclinationem rectæ LD, adeoque etiam rectæ TF multo majorem, angulo ad L, & T multo minori, quod admittit multos incursus. Ea, quæ respondent velocitati terræ, occurrent inferius relata ad figuram 7. Pro velocitatibus multo majoribus multo adhuc plures habebuntur occursus, ut patebit inferius in longa casuum evolutione relata ad figuras sequentes.

(**) Puncta T', T figuræ 6 posita in ejus basibus A*b*, AB respondent iisdem punctis positis in semicirculis AMB, ADB figuræ 5, qui semicirculi respondent iis basibus, ut patet ex iis, quæ dicta sunt: sed punctis F', F hujus respondent non illius puncta F', F, sed puncta E', E. Computando tempora in axe figuræ 6, punctum, in quod cadit ordinata curvæ transiens per intersectionem rectæ ductæ per locum, quem occupat terra tum, dum primum punctum advenit in fig. 5 ad centrum C, exhibet momentum, in quo fit in eadem figura conjunctio primi puncti cum ordinata ad axem MD ducta per locum puncti secundi, ut hic punctum E', vel E figuræ 6, in quod cadit ordinata F'E', vel FE,

40. *Schol.* 1. Non erit opus in applicatione ad annulum Saturni reductione arcus AT figuræ 5 ad rectam figuræ *6* per num. 8. Calculus astronomicus exhibebit numerum graduum, & minutorum pro eo arcu. Hinc satis erit habere scalam, quæ exhibeat semicircumferentiam AB figuræ *6* in minutis. Radius continet minuta $3437\frac{3}{4}$. Si fiat scala, quæ rectam paullo minorem 4 pollicibus dividat ope transversalium in partes 1000, quæ utique erunt in ipsa sensibiles, assumi poterunt *pro* radio circuli partes 1719, *quæ singulæ* continebunt bina minuta: is radius erit magnitudinis mediocris, nimirum circiter pollicum *6*: semicircumferentia AB habebit earum partium $180 \times 30 = 5400$: in applicatione autem ad phænomena videnda e *tellure singulæ partes respondebunt tempori breviori* horis singulis, cum ea percurrat singulis diebus circiter singulos gradus, sive partes ejusmodi 30. Pro tellure satis erunt bini arcus ADB, A*mb*, ut patebit *inferius*, adeoque tota longitudo B*b* esset paullo *major* pedibus tribus, altitudine existente pedis unius. Radius triplo minor partium 573 requirens longitudinem totam unius pedis exhiberet tempora breviora horis ternis in eo phænomeno, cujus observatio a solo discrimine telescopiorum, & oculorum est incerta per plures dies.

41. Major numerus arcuum requireretur a multo majore celeritate motus circularis respectu rectilinei; si per constructionem determinandi essent singuli concursus rectæ ductæ ex T cum curva. Sed in iis omnibus ipsa constructio ita fieri posset, ut priores bini arcus soli gerant vices omnium, & res ad unicum etiam reduci posset. Verum abunde erit sola eorum consideratio sine actuali constructione ad determinandum calculo numerico admodum

exhibet id momentum. Cum id punctum jacet ad dexteram respectu A, ut E', ordinata F'E' exhibet spatium I'C figuræ 5 æquale ipsius spatio EF', quod remanet percurrendum puncto primo ejusdem figuræ 5 a concursu cum ordinata F'P' usque ad ejus appulsum ad centrum C: e contrario cum id jacet in fig. *6* ad sinistram, ut E, ordinata EF exhibet spatium CI figuræ 5 æquale ejus spatio EF, quod debet percurrere punctum primum a suo appulsu ad illud centrum usque ad concursum cum ordinata FI: interea percurritur a puncto secundo in fig. 5 arcus F'T', vel TF' æqualis rectæ E'T', vel ET figuræ *6*.

simplici numerum solutionum, qui pro variis casibus diversæ magnitudinis rationis velocitatum haberi possit, ac debeat, ut patebit inferius: id autem unum abunde est ad habendam ideam generalem problematis applicati ad celeritates quascunque. Pro nostra hominum Astronomia abunde est determinatio phænomenorum pendentium a celeritate motus annui terræ combinati cum motu Saturni, quæ non indiget in tota sua extensione nisi arcubus primis ADB, A*mb* (*).

42. Pro casu generali rationis velocitatum cujuscumque (**) punctum T, per quod ducenda est recta parallela LD, quæ per suos occursus cum curva sinuum exhibere debet solutiones omnes, non potest *jacere*, *nisi vel* in arcu ADB ut T, vel in arcu A*mb* ut T', prout primum punctum advenerit in fig. 5 ad C post adventum secundi ad A, vel ante ipsum. Intersectio F rectæ solventis problema poterit cadere in quemvis ex arcubus infinitis hinc & inde ab A, & ejusmodi punctum erit unicum, vel erunt plura, ac determinatio numeri eorum punctorum, & positio singulorum pendebit a positione puncti T, vel T', & a diversa inclinatione rectæ per ipsum ductæ, quæ inclinatio pendet a ratione data velocitatum.

43. Ap-

(*) Id patebit inferius, sed interea facile hic etiam perspicitur, Cum enim celeritas terræ sit circiter tripla celeritatis puncti primi juxta adnot. ad num. 32, & semicircumferentia circuli sit circiter triplo major ejus radio; dum primum punctum in fig. 5 percurrit radium MC, non potest terra percurrere spatium majus semicirculo BMA, qui respondet basi *b*A figuræ *6*, & dum illud percurrit radium CD in fig. 5, non potest hæc percurrere spatium majus *semicirculo* ADB, qui respondet basi AB figuræ *6*. Hinc cum punctum primum advenit in fig. 5 ad centrum C, non potest terra in fig. 5 distare a puncto A plusquam per semicirculum BMA, vel ADB, adeoque non potest punctum T', vel T in fig. *6* distare a puncto A plusquam per basim *b*A, vel AB. Quin immo cum ratio celeritatum sit 3,089 ad 1, & ratio dimidiæ peripheriæ ad radium 3,142 ad 1, distantia puncti T', vel T in fig. *6* ab A maxima omnium, quæ, habitâ ratione harum velocitatum mediarum, haberi possunt, est adhuc tantillo minor, quam basis *b*A, vel AB.

(**) Sequens perquisitio rationis velocitatum cujuscumque non habet usum pro nostra hominum Astronomia, sed est utilis, & jucunda geometricarum contemplationum amatori, ut supra etiam monuimus.

43. Appulsus primi puncti ad ordinatam secundi præcedet appulsum primi ad centrum, & secundi ad T', vel T, prout E', vel E jacuerit ad dexteram respectu ipsius T', T, vel ad sinistram, & T'E', vel TE indicabit in scala minutorum arcum, quem secundum punctum interea debet describere ante, vel post eum appulsum. Determinato puncto A, & momento, quo punctum secundum appellit ad ipsum, habebitur occursus ante, vel post id momentum, prout punctum F', vel F, ceciderit in arcum curvæ infinitæ jacentem ad dexteram puncti A, vel ad lævam; & recta AE', vel AE exhibebit arcum assumendum in fig. 5 ab A directione AM, vel AD; ut deveniatur ad F', vel F. Si F transcurrat in fig. 6 ultra plures arcus integros semicirculares; arcus ipsi respondens continebit totidem semicircumferentias, quæ omitti possunt, si determinari debeat punctum F in fig. 5 per magnitudinem arcus determinatam in axe figuræ 6: sed id punctum determinatur (num. 38) ope sinus EF.

44. *Sive* T *in fig.* 6 jaceat ad lævam puncti A, sive ad dexteram in T'; poterit & punctum F in primo casu, & F' in secundo jacere tam ad lævam, quam ad dexteram respectu puncti A. Sed ut F possit jacere ad lævam, vel F' ad dexteram, requiritur certa non exigua ratio velocitatis puncti secundi ad velocitatem primi, & ubi hæc ratio est admodum ingens, potest tam recta ducta per T, quam recta ducta per T' occurrere plurimis arcubus utrinque a puncto A secando singulos in binis punctis, & tangendo unum, vel binos oppositos in singulis. Nam eo casu recta CL erit ingens, & angulus L exiguus, adeoque recta ducenda ex T, vel T' non recedet ab axe ad distantiam majorem altitudine arcuum, sive radio CD, nisi post ingentem numerum arcuum semicircularium. Is numerus poterit augeri ex parte utraque in infinitum, aucta in infinitum ratione velocitatis puncti secundi ad velocitatem primi. Si ea ratio sit exigua; punctum primum curret per diametrum citius, quam punctum secundum per circumferentiam, adeoque adhuc citius, quam ordinata puncti secundi, quæ juxta num. 33 movetur lentius, quam id punctum. Hinc ubi semel punctum primum appulerit ad ordinatam, sive ea

tum regrediatur, sive etiam progrediatur, evadet ultra totam reliquam diametri partem, quin ea ordinata possit ipsum assequi iterum. Sed si ea ratio sit ingens; poterit punctum secundum peragere plurimas conversiones integras ante, quam punctum primum elabatur e diametro: in singulis debebit ipsi occurrere saltem semel. Hinc habebuntur saltem totidem occursus, quot integræ conversiones puncti secundi eo tempore, quo punctum primum percurrit suam diametrum.

45. Jam vel inde patet, posse determinari eum numerum occursuum necessarium. Si enim fiat ut velocitas primi puncti ad velocitatem secundi, ita radius ad numerum quendam, & hic divisus per valorem totius circumferentiæ habeat quotum quendam *n*; saltem habebitur utrinque numerus occursuum *n*. Poterit autem in una ex iis integris conversionibus haberi alius occursus, vel alii duo, adeoque tres in eadem: poterunt binæ conversiones habere alium singulæ, ut & in residuo arcu, quem relinquit divisio exhibens quotum *n*, potest haberi unus occursus, vel duplex. Ea omnia exhibebuntur, & subjicientur oculis a constructione. Sed etiam ante evolutionem totam ipsius constructionis persequemur eos casus omnes singillatim in scholio sequenti.

46. *Schol.* 2. Exponemus hic casus diversos, & discrimen inter varios occursus per solam considerationem figuræ 5, ex diversa ratione velocitatum, & positione puncti T, vel T', indicando, quid constructio debeat exhibere in singulis casibus per suas intersectiones cum curva, vel suos contactus: sed præmittemus considerationem transituum primi puncti per centrum.

47. Si in *transitu primi puncti* per centrum punctum secundum est in semicirculo superiore ADB; habetur semper initium occultationis, sive disparitio annuli; quia tum ejus planum subibit inter solem, & punctum secundum, cui idcirco tum incipiet obverti facies ejus obscura: succedet apparitio, dum ascensu continuo primi puncti *id ita incurret* in ordinatam puncti secundi, ut transeat ultra ipsam, quod omnino debebit accidere alicubi ante, quam id punctum elabatur e radio CD, per quod ordinata ipsa digressa ab A ascendit usque ad D, tum descendit usque ad C; adeo-

adeoque is incursus habebitur saltem semel vel in ascensu ipsius ordinatæ, vel in D, vel in descensu.

48. Si in eo transitu primi puncti per centrum punctum secundum fuerit in B; habebitur disparitio, sed momentanea. Disparitio haberi debet; quia tum planum annuli obvertitur & soli, & puncto secundo, quorum utrumvis est satis ad disparitionem: sed disparitio erit momentanea, quia tam ante, quam post id momentum sol erit inter planum annuli, & id punctum. Momentanea quidem erit geometrice, non physice; nam nimis exigua altitudo tam oculi, quam solis supra id planum efficiet, ut optimis etiam telescopiis lumen nimis tenue delatum ad annulum in positione adeo obliqua, & inde reflexum ad oculum percipi non possit: pendebit mora ejus occultationis a vi telescopii, & oculi, ut & ab aliis impedimentis visionis. Cum apparitionem, & disparitionem nominaverimus, intelligemus semper geometricam, non physicam.

49. Si transitus idem primi puncti per centrum fiat, dum punctum secundum est in semicirculo inferiore BMA; habetur semper initium apparitionis; quia tum sol incipiet esse inter planum annuli, & punctum secundum: debebit autem præcessisse saltem una disparitio; quia ante adventum primi puncti ad M debuit punctum secundum esse inter planum annuli, & solem, adeoque non potest ipsum primum punctum advenire ad centrum, puncto secundo morante in semicirculo inferiore, nisi transierit per ejus ordinatam, ac se collocaverit inter ipsam, & solem.

50. Quod si demum is transitus fiat puncto secundo existente in A; id poterit contingere, puncto primo habente velocitatem vel majorem, vel æqualem, vel minorem velocitate puncti secundi. In primo casu punctum primum transcurret simul ultra centrum, & ordinatam secundi pariter ascendentem, sed lentius; adeoque habebitur disparitio, sed momentanea: disparitio quidem ob planum annuli obversum & soli, & puncto secundo, momentanea vero, quia tam ante, quam post sol erit inter planum annuli, & punctum secundum. In secundo casu adhuc habebitur occultatio momentanea; quia ordinata in punctis omnibus arcuum AM,

AD

AD aſcendet lentius, quam punctum ipſum ob obliquitatem arcus, adeoque lentius, quam punctum primum: ſed quoniam diſcrimen celeritatis erit perquam exiguum prope A, ob obliquitatem ibi perquam exiguam, diu hærebunt fere ſibi proxima punctum, & ordinata tam ante, quam poſt tranſitum, & occultatio phyſica erit ibi multo longior. In tertio caſu ibi habebitur tantum momentanea diſparitio: ordinata habens in A velocitatem æqualem velocitati puncti ſecundi habebit illam majorem velocitate puncti primi per aliquem arcum hinc, & inde ab ipſo puncto A; adeoque ita ibi tranſcurrent ſimul, ut punctum primum ſit inter centrum, & ordinatam tam ante, quam poſt.

51. *In hac evolutione diverſorum tranſituum primi puncti per centrum habuimus jam binos occurſus ipſius cum ordinata puncti ſecundi in* B, & A. In primo punctum T debet eſſe in fig. 5 in B, adeoque in fig. 6 in B, vel *b*: in ſecundo idem erit in A Quæcumque ſit ratio velocitatum, nimirum quæcumque ſit directio rectæ ſolventis problema parallelæ LD, ſemper in primo caſu habebitur interſectio *ipſius cum* curva; quam ibi non poterit ſimul contingere ea recta ob paralleliſmum cum recta DL inclinata verſus *A*; *tangens enim in* B, vel *b* debet habere inclinationem *oppoſitam*. Nullus alius incurſus rectæ ejuſdem haberi poterit cum arcu BMA', ut nullus novus concurſus puncti primi aſcendentis per CD in fig. 5 cum ordinata primi puncti percurrentis ſemicirculum inferiorem BMA. *Illa* interſectio exhibebit occultationem, utut momentaneam. In ſecundo caſu recta ipſa ſecabit curvam in A, quæcumque ſit ratio velocitatum: ſed ſi velocitates *ſint æquales*; ipſam ibi ſimul continget: nam in eo caſu erit CL = CD, adeoque angulus CLD ſemirectus, quæ eſt inclinatio (num. 16) tangentis in A ad axem.

52. Pro reliquis occurſibus diſtinguendi ſunt ii, qui fiunt in deſcenſu puncti ſecundi per binos quadrantes DB, BM figuræ 5, quibus reſpondent arcus DB, BM figuræ *6*, ab iis, qui fiunt in aſcenſu per MA, AD figuræ 5, quibus in fig. *6* reſpondent *m*A, AD. Ii arcus figuræ *6* reſpondent iis arcubus in binis ſemiconverſionibus puncti ſecundi, quæ fiunt in ea ejus converſione, in

qua

qua primum punctum pervenit ad centrum : si dum idem punctum primum percurrit diametrum totam MD ascensu continuo , punctum secundum perficiat plures revolutiones ; pro singulis quadrantibus singularum conversionum figuræ 5 habebuntur in fig. 6 quadrantes lineæ sinuum ipsis respondentes , qui erunt æquales hisce quatuor , & similiter positi jacentes ad dexteram pro conversionibus præcedentibus , ad lævam pro sequentibus , singuli ad intervalla trium quadrantium *intermediorum a singulis* ; & quæcunque dicentur de occursibus pertinentibus ad hosce quatuor quadrantes hujus conversionis , eadem habebunt locum in omnibus , qui pertinent ad conversiones reliquas : eos quadrantes , qui redeunt post ternos intermedios , *appellabimus similes inter se* , *nimirum similes non sola magnitudine* , *quæ est eadem pro omnibus* , sed etiam positione .

53. Ad habendam totalitatem motus continuati in eandem plagam pro omnibus casibus oporteret habere arcus curvæ sinuum circulares *plurimos* , tam præcedentes , quam consequentes , & abire ad illum , qui pertinet ad ingressum primi puncti in M figuræ 5 . Is esset unus è præcedentibus ad dexteram similibus arcui *mA* : *prima positio puncti secundi haberet punctum sibi respondens in axe* , & *verticem sui sinus vel in eo arcu curvæ* , vel in tribus proxime consequentibus ad lævam , & positio ejus sinus in uno ex iis quatuor arcubus quadrantalibus facile definiri potest ex dato puncto T , quod respondet appulsui primi puncti ad centrum , & data ratione velocitatum . Inde id punctum in axe progrederetur motu continuo ad lævam : transiret per punctum T respondens appulsui puncti primi ad *centrum* ; *progrederetur* adhuc ad lævam usque ad distantiam ab ipso T æqualem priori , vertice F sui sinus ab ipso secum delati percurrente omnes arcus intermedios (*) . Verum hic referemus omnes diversos casus ad solos binos quadrantes , qui præcedunt immediate , & binos , qui consequuntur punctum A .

54. Si

(*) Puncta curvæ , quæ respondent loco puncti secundi in ingressu puncti primi in diametrum , & egressu ex ipsa , determinabuntur infra num. *99* .

54. *Si occursus puncti primi cum ordinata secundi habeatur in descensu hujus per arcus DB*, BM figuræ 5; semper habebitur transcursus, illo ascendente, dum hæc descendit. Eum occursum exhibebit in fig. 6 intersectio rectæ solventis problema cum quadrante curvæ DB, vel *bm*, vel cum aliquo e quadrantibus similibus. Sed pro occursibus, qui haberi possint, dum punctum secundum ascendit in fig. 5 per arcus MA, AD, consideranda est velocitas ipsius ordinatæ. *Licet* punctum secundum moveatur motu uniformi; ordinata perpendicularis diametro MD ducta per id punctum movetur, ut jam diximus, motu admodum inæquali ob diversam inclinationem arcus circuli ad eam diametrum in diversis ejus punctis. Ejus velocitas prope M est infinite parva, tum crescit usque ad A, ac decrescit usque ad D, prope quod punctum evadit iterum infinite parva. Hinc semper in initio ascensus, & fine descensus velocitas ejus ordinatæ est minor, quam velocitas primi puncti ascendentis per diametrum. Si velocitas hujus est major velocitate puncti secundi, vel ipsi æqualis; semper remanet major quam velocitas ordinatæ præter solum punctum A in casu secundo, in quo evadit ipsi æqualis; cum in eo unico puncto ordinata puncti secundi acquirat velocitatem eandem, quam habet id punctum ipsum.

55. Verum si velocitas primi puncti est minor velocitate secundi; tum ante appulsum hujus ad A velocitas ordinatæ evadit æqualis velocitati primi puncti, & incipit esse major usque ad distantiam supra A æqualem ei, ante quam fuerat minor prius. Ea puncta, in quibus velocitas ordinatæ evadit æqualis velocitati primi puncti, dicemus limites æqualitatis inferiorem, & superiorem. Sint ea in fig. 5 F', F. Arcus AF = AF' facile invenitur. Sit (Tab. I fig. 1) ordinata *if* infinite proximæ ordinatæ IF; erit velocitas puncti F ad velocitatem ordinatæ IF in ratione ultima lineolæ F*f* ad I*i* = FG, sive FH ad FE, quæ ratio ultima desinit in rationem tangentis FT ad FE, sive CF ad CE cosinum arcus AF. Quare erit velocitas puncti secundi ad velocitatem primi, ut radius ad cosinum distantiæ limitum æqualitatis a puncto A.

56. Si

56. Si in fig. 6 punctum E respondeat eidem limiti F figuræ 5; CT evadet major quam CA, abeunte T in rectam A*b*, quia FT debebit evadere tangens: nam est ET ad EF, ut CL ad CD, nimirum ut velocitas puncti secundi (num. 38) ad velocitatem puncti primi; adeoque cum ea sit in eo casu ratio tangentis FT figuræ 1 ad FE, & FE sit utrobique eadem; debebit esse ET figuræ 6 æqualis tangenti FT figuræ 1: hinc (num. 12) ipsa ET figuræ 6 debebit esse subtangens lineæ sinuum, & FT tangens, puncto T cadente extra basim BA: Quo autem ratio velocitatum magis accedit ad æqualitatem, eo ii arcus AF, AF' in fig. 5 evadunt minores ob cosinum *majorem*, *qui in casu velocitatum æqualium* evanescunt, *facto cosinu æquali radio*, & in casu velocitatis puncti secundi minoris evadunt impossibiles.

57. Jam vero in ascensu puncti secundi cum sua ordinata duplex habetur casus respectu puncti primi pariter ascendentis: vel enim ea ordinata præcedit id punctum, vel consequitur. Concursus *haberi* non potest, nisi in primo casu hoc velocius assequatur illam *lentiorem*, & *in secundo illa* velocior *assequatur* ipsum lentius. Cum id punctum non *sit* velocius, nisi ante primum *limitem* æqualitatis, & *post secundum*; non potest in primo *casu illam* assequi, nisi vel ante appulsum ad primum *limitem*, vel in ipso primo limite, vel post limitem secundum: illa autem in secundo non poterit ipsum assequi, nisi inter binos limites, vel in ipso limite secundo. Cum punctum primum appellit ad ordinatam ante limitem primum, vel post secundum, debet transcurrere ultra ipsam: si id *accidat* ante; habebitur disparitio, plano annuli abeunte inter punctum secundum, & solem: si id accidat post limitem secundum; habebitur apparitio, eo plano abeunte ultra id punctum respectu solis. Pariter dum ordinata appellit ad punctum primum inter binos limites, debet transcurrere ultra ipsum: si id fiat ante appulsum primi puncti ad centrum; habebitur apparitio, puncto secundo subeunte inter id planum, & solem: si id fiat in ipso transitu primi puncti per centrum; habebitur disparitio, sed momentanea, ut vidimus num. 50: si fiat post transitum puncti primi per centrum, ha-

bebitur disparitio, puncto secundo abeunte ultra id planum respectu solis.

58. Considerationem peculiarem merentur bini reliqui casus, in quorum primo punctum advenit ad ordinatam in ipso limite primo, in secundo ordinata ad ipsum in limite secundo. Habetur quidem in iis concursus, sed sine transitu: nam in priore punctum, quod prius erat velocius, incipit ibi esse lentius, adeoque relinquitur infra ab ordinata præcurrente, & in posteriore idem accidit ordinatæ, quæ ibi incipit esse lentior, adeoque remanet inferior ipso præcurrente. Hinc in utroque casu pro disparitione, quæ habuisset locum, si punctum primum transcurrisset ultra ordinatam, vel ordinata ultra id punctum, continuatur apparitio: annulus latet eo momento, in quo ordinata transit per punctum ipsum, sed apparet & ante, & post, eâdem ordinatâ jacente inter id punctum, & solem.

59. Si in priore casu punctum transcurrat ultra ordinatam paullo ante primum limitem; tum ordinata poterit transcurrere ultra ipsum paullo post, & habebitur disparitio, consequente paullo post nova apparitione, & si in casu posteriore ordinata transcurrat ultra punctum paullo ante limitem secundum, tum ipsum punctum poterit transcurrere ultra ordinatam paullo post, adeoque pariter brevi disparitioni succedet apparitio. Sed si primum punctum post ordinatam non attingat ipsam ante limitem primum, vel ordinata currens post punctum non attingat ipsum ante limitem secundum; tum in ipso limite habebitur distantia minima, quæ prius minuebatur ob velocitatem consequentis majorem, postea vero iterum augetur ob eandem factam iterum minorem.

60. Omnes occursus, qui fiunt extra limites cum transcursu, exhibentur a recta solvente problema per ejus intersectionem cum curva, & respondent radicibus æquationis realibus inæqualibus in Algebra: occursus facti in binis limitibus sine transcursu exhibentur a contactu curvæ facto ab ea recta juxta num. 56, & æquivalent binis radicibus æqualibus: accessus mutuus cum sola distantia minima sine transcursu exhibetur a recta transeunte extra arcum ultra tangentem cum accessu anteriore ad curvam convexam

ver-

versus ipsam rectam, & recessu posteriore, quod respondet radicibus Algebræ imaginariis, in quibus omnibus mira ubique habetur Geometriæ analogia cum Algebra.

61. Occursus in eadem semiconversione puncti secundi per semicirculum MAD figuræ 5 haberi nequit in utroque limite; quia si is habeatur in limite primo, in quo punctum primum adveniat ad ordinatam; ipsa ordinata ibi facta celerior, manente excessu celeritatis usque ad limitem secundum, adveniet ad hunc limitem ante id punctum. Adeoque ut habeatur occursus in hoc secundo limite, oportet in transitu ordinatæ per limitem primum id punctum jam fuerit altius ipsâ. Verum post occursum factum in priore limite, fieri potest, ut dum punctum secundum post unam, vel etiam plures conversiones integras rursus ascendit, ordinata instans a tergo eidem puncto primo lentius ascendenti ipsum assequatur etiam in limite secundo. Eum casum exhiberet recta tangens binos arcus alterum superiorem, alterum inferiorem: sed in eo casu haberi deberet unus occursus etiam in transitu primi puncti per centrum, appellente secundo vel ad A, vel ad B. Id patet ex eo, quod tam punctum primum, quam ordinata puncti secundi debet impendere idem tempus in ascensu a primo limite ad centrum, & a centro ad secundum. Adeoque si pro primo puncto accedant adhuc plures conversiones integræ; dimidium temporis intermedii requiret totidem semiconversiones, post quarum numerum imparem erit ipsum punctum secundum in B, post numerum parem in A. Id congruit cum num. 25, per quem recta solvens problema non poterit contingere curvam bis, nisi ipsam simul secet in aliquo ex ejus appulsibus ad axem, & bini contactus pertineant ad binos arcus oppositos æque distantes hinc & inde ab ea intersectione.

62. Consideremus (*) jam seriem casuum, qui possint accide-

(*) Quæ habentur hìc usque ad num. 73, omitti possunt ab eo, qui tantum quærat theoremata exposita; nam numerus & qualitas occursuum, de quibus hìc agitur, multo facilius, & prorsus accurate determinatur ibi ope curvæ sinuum: adhuc tamen nec inutilia erunt, nec injucunda iis, qui methodorum varietate, & consensu delectantur.

re toto tempore, quo punctum primum percurrit diametrum MD. Ubicumque fuerit punctum secundum in appulsu primi ad M, quæcunque fuerit ratio velocitatum, debebit semper haberi saltem unus hujus occursus cum ordinata illius; cum debeat absque ultra ipsam, ut evadat ultra totum circulum. In casu, in quo ejus velocitas est major, vel æqualis velocitati puncti secundi, haberi non poterit nisi unicus occursus; quia sive is fiat in descensu, sive in ascensu ordinatæ, hæc in iis casibus semper lentior non poterit assequi ipsum semel altius. At in casu velocitatis primi puncti minoris haberi poterunt occursus plurimi, ut jam diximus. Non solum in singulis conversionibus, quæ a puncto secundo fiant integræ, dum primum moratur in ea diametro, debent haberi saltem singuli occursus; sed in singulis semiconversionibus factis interea ascendendo per MAD, vel descendendo per DBM habebuntur saltem singuli occursus. In descensibus singulis habebuntur tantummodo singuli; cum post occursum ordinata pergat descendere, & punctum primum ascendere: at in ascensibus singulis fieri poterit, ut non habeatur nisi unicus, vel ut habeantur duo, vel etiam tres.

63. Occursus erit unicus in ascensu puncti secundi cum transcursu; si punctum primum assequatur ordinatam ante primum limitem, tum ita assurgat, ut adveniat ad secundum, antequam ordinata ipsum assequatur. Id accidet, ubi excessus velocitatis puncti secundi fuerit exiguus; tum enim punctum primum transcurret totam diametrum, antequam punctum secundum absolvat unicam semiconversionem. Habebitur itidem unicus occursus sine transcursu; si is fiat in ipso limite primo, tum ordinata ita celeriter ascendat, ut incipiat descendere, antequam punctum secundum possit ipsam assequi. Habebitur unicus cum transcursu; si ordinata assequatur punctum inter binos limites, tum itidem perficiat ascensum antequam possit punctum primum eam attingere: unicus habebitur sine transcursu; si ordinata assequatur punctum primum in limite secundo: demum unicus cum transcursu, si punctum secundum primo pertingat ad ordinatam post limitem secundum, quin in eam ascendentem prius inciderit, qui po-

postremus casus itidem haberi non poterit, nisi in exiguo velocitatum discrimine, puncto secundo non absolvente integrum ascensum, dum punctum primum percurrit totam diametrum.

64. Bini occursus haberi poterunt cum transcursu, si punctum primum transcurrat ultra ordinatam ante primum limitem, & ordinata ultra ipsum post, quin in toto reliquo ascensu hoc illam possit assequi, licet iterum occurrat ipsi jam descendenti: bini haberi poterunt, alter *sine transcursu in primo limite*, alter cum transcursu post secundum; sed id ipsum non accidet, nisi in exiguo discrimine velocitatum, puncto primo transcurrente totam diametrum, antequam punctum secundum absolvat totum ascensum: bini habebuntur cum transcursu; si ordinata assequatur punctum ante secundum limitem, & punctum transeat ultra ipsam post eum limitem. Demum habebuntur tres occursus cum transcursu; si punctum adveniat ad ordinatam ante primum limitem, ordinata ad punctum inter duos limites, punctum ad ordinatam iterum post limitem secundum.

65. In hoc postremo casu, ut fere in omnibus præcedentibus, integer ascensus puncti secundi non fiet puncto primo transcurrente diametrum; cum ii casus fere omnes requirant vel ingressum puncti primi, dum jam secundum ascendit, vel egressum antequam id perficiat ascensum. Ut totus ascensus puncti secundi fiat, dum punctum primum moratur in diametro; debet in initio ejus ascensus punctum ipsum vel esse in ipso ingressu in M, vel altius: præterea debet punctum secundum devenire ad limitem secundum antequam punctum primum assurgat ad eam altitudinem, quia si punctum primum eo adveniat simul, vel ante, evadet e tota diametro antequam punctum secundum perficiat totum ascensum. Si bina puncta sint simul in ipso ingressu puncti primi in M; is occursus poterit tribui descensui præcedenti, ad quem itidem pertinere potest, cum fiat in ejus fine. Post eum occursum factum in eo initio, debebit fieri alter, & is unicus inter duos limites. Novus occursus fieri non poterit, nisi post limitem primum, quia debet ordinata ipsum transcurrere, ut facta velocior possit assequi punctum præcedens: debebit fieri ali-

alicubi, cum ordinata debeat absolvere ascensum, dum id adhuc moratur in diametro: id autem debet accidere ante limitem secundum, dum adhuc ordinata est velocior: nec potest fieri in limite secundo; nec posteaquam est factum ante limitem secundum, potest haberi novus occursus post ipsum, quia in utroque casu punctum primum jam celerius evaderet e diametro antequam absolveretur hujus ascensus. Quare attributo præcedenti descensui eo occursu, qui forte fiat in fine ipsius, non poterunt haberi nisi singuli occursus in iis ascensibus singulis, qui toti fiant puncto primo percurrente diametrum, ut non nisi singuli in singulis descensibus. Habebuntur autem omnino in singulis singuli.

66. Non solum in quovis descensu integro puncti secundi habebitur occursus, & is unicus cum transcursu; sed etiam in quavis ejus parte postrema, intra quam id punctum incipiat ascendere, vel prima, intra quam id desinat ascendere: nam in utroque casu in initio ejus partis ordinata erit altior, & in fine depressior eo puncto. At in eo ascensu, cujus habeatur pars, poterunt haberi occursus tres, vel duo, vel unus, vel etiam nullus, qui postremus casus haberetur, si punctum primum evaderet e diametro antequam ordinata subsequens ad ipsum pertingeret. In parte tamen ascensus, quæ incipiat, puncto primo jam ingresso diametrum, non poterunt haberi tres; quia non poterit haberi ea, quæ præcedit limitem primum, ante quem ordinata movetur lentius, quam punctum primum jam præcedens. Numerus occursuum pendebit a magnitudine ejus partis ascensus, & ratione velocitatum, quæ determinat limites æqualitatis, ac in singulis casibus facile definiri poterit.

67. Porro ex iis, quæ dicta sunt, facile definiri potest, quot occursus haberi omnino debeant, quot possint, ubi detur ratio velocitatum, & positio puncti secundi in circulo pro eo momento, quo punctum primum ingreditur diametrum. Sit velocitas puncti primi ad velocitatem secundi, ut 1 ad *m*: punctum secundum in toto ascensu primi percurret diametros numero *m*: quorum quævis cum contineat gradus 114, minuta 36, sive adhibitis decima-

libus

ibus 114,6, percurret gradus 114,6*m*. Et quidem hæc ipsa formula exhibebit locum puncti secundi in ingressu primi ex loco illius in appulsu hujus ad centrum, quo usi sumus in fig. 5 pro puncto T : satis erit ab eo loco abire ordine retrogrado per gradus 57,3*m*, qui respondent ascensui per radium, sive abire per excessum hujus numeri supra integras circumferentias graduum 360.

68. Si eo momento, quo *punctum primum ingreditur* diametrum, *punctum secundum est* in descensu, dicatur *c* numerus graduum ab initio ejus descensus, & si id est in ascensu, dicatur itidem *c* numerus graduum ab initio ascensus. Addito eo numero, habebitur ab initio descensus, vel ascensus præcedentis numerus graduum 114,6*m* + *c*. Dividatur is per 180, & numerus integer quoti sit *n*, residuum *r*. Considerentur casus quatuor : 1. pertineat *c* ad descensum, & sit *n* numerus par : 2. pertineat *c* ad descensum, & sit *n* numerus impar : 3. pertineat *c* ad ascensum, & sit *n* par : 4. pertineat *c* ad ascensum, & sit *n* impar.

69. In primo *casu residuum r* pertinebit *ad descensum*, & habebuntur *integri* ascensus $\frac{1}{2}n$, descensus integri $\frac{1}{2}n - 1$ cum parte primi residua post *c*, & parte postremi *r*. Singuli ascensus, & descensus integri debent habere singulos occursus, & binæ illæ partes descensuum singulæ itidem singulos. Quare in hoc primo casu habebuntur occursus numero $n + 1$, qui omnes erunt cum *transcursu*.

70. In secundo casu pertinebit *residuum r* ad ascensum : habebuntur descensus integri $\frac{1}{2}(n - 1)$ *cum parte postrema primi* residua post *c*, & ascensus integri $\frac{1}{2}(n - 1)$ cum parte prima *r* novi ascensus. Hinc habebuntur necessario occursus $n - 1$ pertinentes ad descensus, & ascensus integros, tum 1 pertinens ad partem descensus, adeoque necessario habebuntur occursus *n* : in parte ascensus postrema, si ea non sit satis magna, nullus habebitur, quia antequam ordinata adveniat ad limitem superiorem, jam punctum primum habebit partem residuam diametri exiguam, adeoque jacebit jam ultra cum limitem, & evadet sine novo occursu : si ea pars sit ingens, habebuntur fere semper binæ paullo

lo ante, & paullo post limitem superiorem, vel unica in eo i-pso limite: tres haberi non poterunt juxta num. *66*.

71. In tertio casu pertinebit ad ascensum etiam r: habebuntur ascensus integri $\frac{1}{2}n - 1$ cum binis partibus, ac descensu integri $\frac{1}{2}n$. Hinc occursus respondentes ascensibus, & descensibus integris saltem $n - 1$. Binis partibus ascensus poterit non respondere ullus occursus; sed poterit respondere vel unicus sine transcursu *in solo limite inferiore*, vel *bini cum transcursu ante*, & post ipsum, vel bini cum transcursu prope solum limitem superiorem ante, & post, vel bini sine transcursu in *binis limitibus*, vel quatuor, *nimirum bini circa utrumque limitem*. Facile esset ex *sola* ratione velocitatum, & *magnitudine utriusque* partis determinare ipsum numerum eorum occursuum. Satis erit determinare locum puncti primi in diametro in appulsu ordinatæ ad binos limites, quod facile fit, cum, data ratione velocitatum, habeatur arcus distantiæ utriusque limitis a puncto *medio A*, & ex ratione velocitatum habeatur pars diametri *jam* percursa, vel percurrenda a puncto primo.

72. In quarto casu pertinebit r ad descensum. Quare habebuntur tam ascensus quam descensus integri $\frac{1}{2}(n - 1)$ cum parte r descensus novi superiore, & parte ascensus *primi superiore* itidem, nimirum residua ad partem c jam absolutam. Hinc necessario habebuntur occursus n cum transcursu, quibus poterunt accedere vel nullus, vel 1, vel 2, *vel 3 in illa* parte residua ascensus primi.

PROBLEMA III.

73. *Evolvere ope curvæ sinuum casus præcipuos*. Expositis paullo fusius iis, quæ pertinent ad diversos casus; jam evolvemus præcipuos eorum ope schematum, quæ ipsos melius subjiciant oculis ipsis.

74. Quod pertinet ad casum velocitatis primi puncti majoris velocitate secundi, vel ipsi æqualis, videre est in fig. *6*. Erit ibi CD major, vel æqualis CL, adeoque angulus CLD major, vel æqualis semirecto. Hinc ubicumque sit punctum T,

recta

recta parallela DL secabit curvam in puncto unico, quam tanget quidem, sed simul etiam secabit in casu æqualitatis, puncto T abeunte in A. Quamobrem in utroque casu habebitur semper occursus, isque unicus, & cum transcursu.

75. Si velocitas puncti secundi fuerit major; tum CL erit major quam CD, & angulus CLD minor semirecto: habebuntur binæ tangentes ejus directionis habentes eam rationem subtangentis ad ordinatam juxta num. *17*, *quæ facile invenientur sumendo* in fig. 7 *AE*, *AE'* *æquales arcui*, *cujus cosinus ad radium sit*, ut velocitas puncti primi ad velocitatem secundi, qui arcus in fig. 5 est distantia limitis utriuslibet a puncto A. Erectis ordinatis EF, E'F', *quæ erunt eorum arcuum sinus*, & *assumptis ET'*, *E'T*; quæ sint *æquales* tangenti ejusdem arcus, *habebunt* FT', F'T *directionem*, quam debet habere recta solvens *problema*, & AT, AT' erunt excessus tangentis ejus arcus supra ipsum inveniendi juxta num. 18. Si ratio velocitatis puncti secundi ad velocitatem *primi* fuerit nimis magna; accedet AE ad quadrantem, & excessus tangentis supra ipsum erit ingens, adeoque AT, AT' poterunt ita *excrescere*, *ut abeant ultra arcus plurimos*. *Figura 7 exprimit* casum, *in* quo ea *ratio non est nimis* magna; ac idcirco ibi puncta T', T cadunt in *bases* *Ab*, AB, qui quidem *est casus theoriæ* applicatæ ad phænomena observanda e terra.

76. Jam vero ipsæ rectæ FT', F'T productæ occurrent adhuc arcubus A*mb*, ADB in *f'*, *f*. Concipiantur rectæ in eadem directione *ductæ per b*, per quodvis *punctum r1* segmenti *b*T', per T', per quodvis punctum *r2* segmenti T'A, per A, per quodvis punctum *r3* segmenti AT, per T, *per quodvis punctum r4* rectæ TB: punctum B respondet eidem puncto circuli figuræ 5 ac *b*, adeoque considerata recta, quæ transit per *b*, non est considerandi alia transiens per B. Prima ducta per *b* secabit curvam in eodem unico puncto *b*: recta quævis ducta per *r1*, vel *r4* secabit itidem in unico puncto *n1*, vel *n4*: recta ducta per T, vel T' tanget curvam in F', vel F, & simul secabit in *f*, vel *f'*: recta ducta per *r2* secabit arcum superiorem in binis punctis *n2*, *n'2*, & inferiorem in unico *n''2*: recta ducta per A se-

cabit curvam ibidem, & præterea arcum superiorem in Q, inferiorem in q: recta ducta per $r3$ secabit superiorem in unico puncto $n3$, & inferiorem in binis $n'3$, $n''3$.

77. Inde vel sine constructione facile calculo numerico inveniuntur numeri, & species occursuum, qui respondent omnibus positionibus puncti, per quem ducenda est recta solvens problema, nimirum omnibus positionibus puncti T in fig. 5. Si id sit in fig. 7 in b, vel distet ab A *utravis* ex parte magis, quam per illam AT inventam, habebitur unicus occursus in fig. 5 cum transgressu expressus ab intersectione in b, vel $n1$, vel $n4$: si illud sit in ea distantia, ut in T, vel T'; habebitur unus occursus cum transgressu respondens intersectioni f, *vel* f', & alius sine transgressu respondens contactui F', vel F: si illud *habuerit* distantiam ab A minorem; habebuntur tres occursus cum transgressu expressi per tres intersectiones in $n2$, $n'2$, $n''2$, vel Q, A, q, vel $n3$, $n'3$, $n''3$. Quare si capiantur in fig. 5 arcus hinc & inde ab A æquales excessui illi tangentis supra arcum, distantiæ puncti limitis ab A; habebuntur ibi arcus pro situ puncti secundi in *appulsu primi ad centrum exhibente* unicum occursum cum transgressu, vel binos, quorum alter cum transgressu, alter sine, vel ternos cum transgressu. Perpendicula vero ex iis punctis intersectionum, vel contactuum demissa *in axem figuræ* 6 definirent ipsa puncta circumferentiæ figuræ 5, in quibus ii occursus acciderent, ad quæ puncta invenienda hac methodo requireretur constructio, quæ *non requiritur* ad determinandos tantummodo eos arcus, & puncta, in quibus habetur una solutio realis, *vel duæ*, quarum altera æquivalet binis, vel tres; nam ad eam rem sufficit inventio arcus, cujus cosinus sit ad radium, ut est velocitas puncti primi ad velocitatem secundi, & excessus ejus tangentis supra arcum redactus ad valorem arcus circularis juxta num. 18.

78. Ibidem si $r2$, $r3$ sint puncta proxima punctis T', T, in quæ desinant; binæ intersectiones $n2$, $n'2$, vel $n'3$, $n''3$ abirent in contactum F, vel F': & $n1r1$, $n4r4$ productæ, ac transeuntes extra arcus ultra contactus F, F' exhibent binos concursus post

coa-

coalescentiam factos impossibiles, cum distantia minima determinata ab ipso contactu juxta num. *60*.

79. In fig. 8, & 9 (*) exhibentur tangentes transeuntes per aliquam intersectionem curvæ cum axe, quæ habent binos contactus oppositos ad distantiam æqualem hinc & inde: & in fig. 8 is transitus fit per punctum A, in fig. *9* fit per punctum *b*. In fig. 8 exhibentur binæ rectæ transeuntes per A, quæ tangunt binos arcus *oppositos ad distantiam hinc & inde æqualem*, prima secundum superiorem ad lævam in P', & secundum inferiorem ad dexteram in *p'*, secunda hinc tertium superiorem in P, & inde tertium inferiorem in *p*. *Infinitæ aliæ tangerent* quartum, quintum, sextum, & *ita porro*. *In fig. 9* exhibentur itidem binæ *transeuntes per b*, quarum prima tangit primum superiorem in P', & secundum inferiorem in *p'*, secunda secundum superiorem in *P*, & tertium inferiorem in *p*, ac infinitæ *aliæ* itidem transeuntes per *b* tangerent tertium, quartum, quintum superiorem, *quartum*, quintum, sextum inferiorem. Hæc respondent iis, quæ dicta sunt *num. 25*, & *61*.

80. Ii *casus respondent determinatis quibusdam rationibus velocitatum determinantibus* quasdam inclinationes rectæ solventis problema: rationes intermediæ, & inclinationes intermediæ exhibent singulæ non unicam tangentem binorum arcuum, sed binas tangentes binorum parallelas: ibi considerandi erunt bini casus præcipui, in quorum *altero tangens* arcuum superiorum occurret axi in basi arcus *superioris*, & *tangens inferiorum* in basi arcus inferioris: in altero tangens arcus *superioris* occurret axi in basi arcus inferioris, & tangens inferioris in *basi superioris*: eos casus exhibemus in fig. 10, & 11.

81. Data *ratione* velocitatum facile invenitur, ad quam ex iis quatuor speciebus pertineant tangentes ipsis respondentes: an transeant per aliquod e punctis A, *a*, an per aliquod B, *b*, an per

E 2 basim

(*) In hisce, & binis sequentibus figuris juxta adnotationem ad num. 37 factæ sunt bases AB, *Ab* cum præcedentibus, & sequentibus multo breviores justo ob rationem ibi expositam.

basim alicujus arcus suæ speciei, nimirum tangens superioris per basim superioris, & tangens inferioris per basim inferioris; an transeant per basim alicujus arcus contrarii. Sit ratio velocitatis puncti primi ad velocitatem secundi, ut 1 ad m: ea erit num. 56 ratio ordinatæ lineæ sinuum ad subtangentem. Hinc si juxta numer. 18 capiatur arcus, cujus cosinus ad radium $= 1$ sit $\frac{1}{m}$, ac is redactus ad minuta dicatur a, ejus vero tangens ad radium 1 sit t; erit $3438t - a$ distantia occursus tangentis lineæ sinuum cum axe ab initio arcus contacti. Is numerus dividatur per 10800 numerum minutorum semicircumferentiæ; & quotus dicatur e. Si divisio fuerit accurata sine residuo; tangens transibit per unam ex intersectionibus curvæ cum axe: si habeatur residuum; occursus tangentis cum axe cadet inter binas ejusmodi intersectiones intra basim arcus cujuspiam. Quotus e exhibebit numerum semicircumferentiarum, sive basium pertinentium ad arcus semicirculares ab initio arcus contacti usque ad occursum tangentis cum axe, qui si fuerit par, is concursus erit in aliquo e punctis A, a, ut in fig. 8 in A: si is quotus fuerit impar; abibit tangens in aliquod e punctis B, b. Si in divisione habeatur residuum; abibit ipsa tangens in casu numeri e imparis in basim arcus ejusdem directionis, ut in fig. 10: in casu vero numeri e paris abibit in basim arcus directionis contrariæ, ut in fig. 11.

82. In fig. 8 pro tangente P'Ap' quotus e erit $= 2$, pro PAp $= 4$: at in fig. 9 pro P'bp' erit $e = 1$, pro Pbp $= 3$. In fig. 10 binæ tangentes parallelæ sunt PG, pg: quotus e ibi erit impar, & exhibebit pro priore, quæ tangit arcum superiorem B''D''A'', tres bases A''B', B'A', A'B: idcirco ibi G cadit in basim arcus ADB itidem superioris, ac pro posteriore, quæ tangit arcum inferiorem $a''m''b''$ exhibebit tres bases $a''b'$, $b'a'$, $a'b$, & idcirco ibi g cadit in basim bA arcus bmA itidem inferioris: residuum autem ex divisione exhibebit in priore casu BG, in posteriore bg, quæ sunt supplementa arcuum AG, Ag. In fig. 11 binæ tangentes parallelæ sunt itidem PG, pg; sed ibi quotus e erit par, & exhibebit bases quaternas hinc A''B', B'A', A'B, BA, inde

inde $a''b'$, $b'a'$, $a'b$, bA, cadente G in basim arcus inferioris A*mb*, & *g* in basim arcus superioris ADB, residua autem sunt ipsæ distantiæ AG, A*g* ab A.

83. *Schol.* Sola inspectione harum quatuor figurarum facile cognoscitur numerus, & qualitas occursuum primi puncti cum ordinata secundi. In iis omnibus figuris arcus $m'a'd$, *m*AD, MA'D', & iis similes respondent ascensui puncti secundi in fig. 5 per semicirculum *MAD; arcus vero dbm, DBM, & iis similes descensui per* DBM ipsius figuræ 5.

84. Porro patet, in fig. 8, vel 9 omnes arcus tam ascensuum, quam descensuum intermedios ab A, *vel b usque ad eos, qui habent* contactus oppositos P, *p*, debere habere unam intersectionem, quibus accedit *intersectio* in A, vel *b* cum binis contactibus in P, *p*. Post singulas bases semicirculares occurrunt singuli ejusmodi arcus, adeoque computatis etiam postremis contactuum, habentur arcus numero 2*e*, existente *e* numero integro fractionis $\frac{3438t-a}{10800}$ (num. 81). Quare ubi *valor ejus fractionis est* numerus integer; habebuntur *intersectiones 2e − 1 cum binis contactibus; id habebit locum existente præterea in fig. 5 in appulsu puncti primi* ad C puncto secundo in A, vel B, quo casu recta solvens problema debet duci per A, vel *b* posteriorum figurarum. Quod si punctum secundum fuerit ubicunque alibi in appulsu primi ad C; numerus intersectionum *erit 2e* + 1 sine ullo contactu. Si enim ipsum punctum *secundum fuerit tum in* arcu ADB in fig. 5 in T, vel in AMB in T'; punctum, per quod ea *recta* duci deberet in figuris reliquis, erit vel in basi AB, vel *in Ab. Porro recta* parallela P*p* transiens per quodvis punctum basis AB figuræ 8, vel basium AB, A*b figuræ 9* secabit omnes eosdem arcus, & pro contactu P' arcus postremi superioris ad lævam habebit binas intersectiones infra ipsum, sed ex parte dextera evitabit arcum postremum inferiorem transiens respectu ipsius infra *p*. Recta autem parallela ipsi P*p* ducta in fig. 8 per aliquod punctum basis A*b* evitabit ipsum arcum *postremum* ad lævam transiens supra contactum P, & secabit arcum postremum ad dexteram in duobus punctis, supra *p*.

85. Hinc

85. *Hinc* quotiescumque divisio valoris $3438t - a$ per 10800 habebit pro quoto numerum e accuratum sine residuo; habebuntur occursus $2e + 1$ primi puncti cum ordinata secundi: eorum bini erunt in ipsis limitibus æqualitatis sine transcursu, si unus ex occursibus sit, puncto primo deveniente ad centrum: puncto secundo existente tunc alibi, omnes occursus erunt cum transcursu.

86. In fig. 10 GP debet secare omnes arcus descensuum, & ascensuum, qui *occurrunt a G ad lævam usque ad* postremum, quem tangit in P; sunt autem totidem, quot bases, nimirum e, & idem præstat gp ex parte dextera: debet autem utraque secare ex parte opposita totidem præter mAD. Quare utraque habebit intersectiones $2e + 1$, & præterea unum contactum. Quævis recta parallela ipsis secans axem in quovis puncto segmenti Gg secabit eosdem arcus, evitando tam contactum P, quam p, adeoque habebit solum intersectiones $2e + 1$. Quævis autem transiens per quodvis punctum segmenti BG, ut per T, incluso B, substituet contactui P binas sectiones, & *quævis transiens per puncta segmenti bg, incluso b, substituet* contactui p binas sectiones, adeoque habebit *intersectiones* $2e + 3$.

87. Inde *eruitur hujusmodi* regula. Quotiescumque illa *divisio* habebit quotum imparem cum residuo, habebuntur saltem occursus $2e + 1$ cum transcursu, & is erit numerus omnium occursuum, si in appulsu primi puncti ad centrum in fig. 5 punctum secundum distiterit ab A per arcum AT, vel AT' minorem supplemento residui ejus *divisionis*: accedet *iis* unus occursus sine transcursu, si ea *distantia* ab A fuerit æqualis illi supplemento residui: habebuntur occursus $2e + 3$ cum transcursu, si ea distantia ab A fuerit major.

88. In fig. 11 a G usque ad P habebuntur *tot* intersectiones, quot arcus ascensuum, & descensuum, nimirum quot bases, sive e, cum contactu postremi, & ex parte opposita accedet una ultra p, adeoque habebuntur intersectiones $2e + 1$ cum uno contactu in P, quod accidet iterum rectæ pg. Pro rectis omnibus intermediis, quæ secabunt axem inter G, & g, contactui P, vel p succedent binæ intersectiones, quæ idcirco erunt $2e + 3$:

rectæ

rectæ autem transeuntes per bG incluso b amittent contactum P abeuntes supra ipsum, & rectæ transeuntes per Bg amittent contactum p abeuntes infra ipsum; adeoque habebunt tantummodo intersectiones $2e + 1$.

89. Quare habebitur hujusmodi regula. Si quotus ejus divisionis fuerit numerus par cum residuo, habebuntur occursus $2e + 1$ cum transcursu, puncto secundo distante a puncto A in appulsu puncti primi ad centrum per *distantiam majorem residuo* divisionis; tum $2e + 2$, *quorum* unus sine transcursu, eâ distantiâ existente *æquali* eidem quoto; ac demum $2e + 3$ omnes cum transcursu, eadem distantia existente minore.

PROBLEMA IV.

90. *Exhibere numerum, & qualitatem occursuum puncti primi cum ordinata secundi, qui haberi debeant, pro omni diverso genere casuum.*

91. Solutio hujus problematis continetur in superioribus omnibus, quorum fructum hic colligemus proponendo regulas generales erutas e singulis *determinationibus jam factis*. Si *velocitas puncti* primi sit major *velocitate* puncti secundi, *vel* ipsi æqualis; habebitur semper occursus cum transcursu, isque unicus (num. 74).

92. Si velocitas puncti primi sit minor; fiat, ut velocitas puncti secundi ad velocitatem primi, ita radius ad cosinum anguli, qui reductus ad minuta dicatur a, ac ejus tangens t (num. 75, & 87). Dividatur *valor* $3438t - a$ per 10800, & quotus integer dicatur e, ac distinguantur casus 4. In 1 sit e numerus par sine residuo, in 2 impar sine residuo, in 3 impar cum residuo, in 4 par cum residuo. In singulis casibus oportet considerare locum puncti secundi pro eo momento, quo punctum primum devenit ad centrum: eum, quem id punctum tum occupat in fig. 5, intelligemus, cum dicemus locum puncti secundi.

93. In primo, & secundo casu numerus occursuum erit $e + 1$, quorum duo soli erunt sine transcursu; si locus puncti secundi fuerit A, vel B: omnes erunt cum transcursu; si is locus fuerit ubivis alibi in T, vel T' (num. 85).

94. In

94. In tertio casu occursus erunt vel $2e + 1$ omnes cum transcursu, vel $2e + 2$, quorum unus solus sine transcursu, vel $2e + 3$ omnes cum transcursu; prout distantia AT, vel AT' loci puncti secundi ab A fuerit minor supplemento residui illius divisionis, vel ipsi æqualis, vel eo major (num. 87).

95. In quarto casu occursus erunt $2e + 1$ omnes cum transcursu, vel $2e + 2$, quorum unus sine transcursu, vel $2e + 3$ omnes cum transcursu; *prout e contrario* distantia AT, vel AT' loci puncti secundi ab A fuerit major, *æqualis*, vel *minor* respectu residui illius divisionis (num. 89).

96. *Schol.* 1. Numerus occursuum respondet numero radicum realium æquationis, quæ *exprimat conditiones* ejus problematis; sed occursus, qui fiunt sine transcursu, in *hisce* postremis quatuor casibus, & determinantur a contactu, non ab intersectione, respondent singuli radici duplici, & occursus, qui in casu velocitatum æqualium est quidem cum transcursu, sed exhibetur a recta tangente simul in fig. 6, & secante curvam in A', respondet radici triplici.

97. *Æquatio respondens ei problemati invenitur* admodum facile. Fiat in *fig.* 5 arcus $AT = b$, qui *si sit* AT', erit b valoris negativi, & arcus $AF = z$, ac ratio velocitatis puncti primi ad velocitatem secundi 1 ad m. Erit $CI = sin.z$, $TF = z - b$. Est autem (num. 39) $1 : m :: CI : TF$. Quare erit $m sin.z = z - b$, sive $m sin.z - z + b = 0$. Hæc æquatio cum habeat mixtum arcum cum sinu, est *transcendens*, & requirit quadraturam circuli: idcirco *requirit* curvam transcendentem, ut est linea sinuum, ad *inventionem* radicum per constructionem. Supposita autem ratione diametri ad circumferentiam, quæ exhibet numerum minutorum contentum in radio circuli, invenitur numerus radicum realium per considerationem curvæ sinuum methodo multo simpliciore, quam per calculum, qui ad eam rem debet esse sublimior.

98. *Schol.* 2. Si e punctis P, p ducatur, ut in fig. 10, recta PE, pe perpendicularis in axem; puncta E, e respondebunt limitibus æqualitatis figuræ 5 (num. 75), & valor A''E $= a''e$ erit $= a$,

$= a$, nimirum valor arcus, cujus cosinus ad radium est ut velocitas puncti primi ad velocitatem secundi. Quare habebuntur e scala partium axis puncta E, e ad determinanda accuratius per constructionem ipsa puncta contactuum: habebitur itidem recta PE, & pe sinus arcus inventi a. Bini arcus A''E, $a''e$ pertinebunt ad ascensum indicatum ab arcubus curvæ pa'', A''P, & habebunt directiones oppositas.

99. Dato loco *puncti secundi* (*) *in fig.* 1, *adeoque & in posterioribus*, facile invenietur in his per constructionem, & per calculum numericum punctum, quod in axe respondet loco puncti secundi in ingressu puncti primi in M figuræ 5, & punctum, quod respondet ejus egressui ex *D*. *Si T sit ibi locus puncti secundi in appulsu primi ad centrum*; invenietur in reliquis punctum axis, ipsi respondens, ut T in fig. 10, capiendo in his rectam AT æqualem arcui AT figuræ 5 ex scala partium axis respondente partibus arcus circularis, nimirum valorem b numeri 97: tum factis, *ut* velocitas primi puncti ad velocitatem secundi, ita radius circuli ad quartum *terminum*, hic erit recta æqualis arcui, quem *in peripheria circuli percurrit punctum secundum*, dum punctum *primum* percurrit ejus *radium*. Quare *satis erit* assumere TR ad lævam in fig. 10, & Tr ad dexteram æquales rectæ inventæ: erunt *enim* r, & R bina puncta quæsita.

100. Ductis RL, rl perpendicularibus ad axem, & æqualibus radio circuli, determinaretur etiam positio rectæ LTl solventis problema. Ea *positio potest etiam* determinari immediate, determinando *ope calculi* numerici *angulum RTL* factis, ut velocitas puncti secundi ad velocitatem primi, ita *radius ad tangentem* ejus anguli. Cum vero ea sit etiam ratio radii ad *cosinum arcus* a, capiendus erit angulus, cujus tangens æquatur sinui ipsius a, eodem numero exhibente utrumque in tabula sinuum. Productis lr, LR

(*) Oportet meminisse, locum *puncti* secundi appellatum esse numero 92 punctum illud figuræ 5, ad quod id ibi *devenit tum*, cum punctum primum appellit ad centrum, Eo dato in fig. 5, habetur *etiam in* reliquis punctum ipsi respondens, assumpto in iis segmento axis æquali arcui, quo illud punctum distat in ipsa figura a suo A.

usque ad curvam in u, V, sola curva ab u usque ad V responderet ei casui rationis velocitatum, & loci puncti secundi in appulsu primi ad centrum (*): positio punctorum u, V respectu punctorum m, d, M, D exhiberet residua ad integros arcus ascensuum, & descensuum adhibitos a numero 54 ad determinandum numerum, & qualitatem occursuum.

101. *Schol.* 3. Dato valore AT, & invento per calculum numericum valore TR, *ac angulo RTL*, poterunt facile inveniri omnes intersectiones rectæ TL cum *curva* ope solius partis bmADB continentis binos solos arcus semicirculares, nimirum singulos hinc & inde ab A. Quærantur occursus F,f cum arcu quovis, ut A''D''B'', posito *post* quotvis bases AB, BA', A'B', B'A''. Cum detur numerus minutorum in AT; si is dematur a numero 10800 minutorum unius basis multiplicato per numerum earum basium, vel ipsi addatur, prout T fuerit in basi AB, vel Ab, dabitur TA''. *Ducatur* ex T *in* angulo invento initium rectæ TL solventis problema, quæ exhibebit *occursus* cum arcu bmADB, & concipiatur ejus *continuatio* usque ad rectam perpendicularem axi *ductam per* A'', *cui occurrat in N*: factis TR : TA'' :: RL = 1 : A''N, *habebitur* hujus valor in *partibus* radii: assumatur *in recta perpendiculari* axi ducta per A hic valor pro An, ducaturque ex n recta *parallela initio jam ducto* rectæ TL: hujus occursus cum arcu ADB in Q, q exhibebit puncta respondentia punctis F, f: si ex Q, q ducantur perpendicula in axem; eorum distantiæ ab A exhibebunt *distantias ab* A'' perpendiculorum, quæ concipiantur *ducta* in axem ex punctis F, f, & ipsa perpendicula. *Addito* numero basium ab A ad A'', nimirum numero semicircumferentiarum, habebitur numerus minutorum circuli, quos percurret punctum secundum in fig. 5 ab appulsu ad A usque ad eos occursus puncti primi cum ordinata secundi, unde eruetur & tempus eorum occursuum, & locus; dum perpendicula ad

(*) Nec vero tota ea curva, sed ejus pars ab occursu rectæ habentis directionem, quam habet recta TL transeuntis per b cum arcu $b'm'a'$, usque ad concursum transeuntis per B cum arcu A''D''B'', cum punctum T debeat omnino contineri inter b, & B.

ad axem exhibebunt motus interea factos a puncto primo per diametrum post appulsum ad centrum. Eodem pacto pro occursibus præcedentibus inveniretur $a'N'$, quæ assumpta in An' exhiberet rectam ducendam ex n', ad habendas intersectiones q', Q' pro f', F'. Quin immo possent omnia haberi per solum arcum ADB. Assumptâ enim etiam An' versus n, & ductâ ex eo n' rectâ antiparallelâ rectæ ductæ per T, nimirum rectâ inclinatâ ad axem in eodem angulo, *sed ex parte opposita*, *haberentur in arcu ADB* etiam puncta, quæ supplerent vices punctorum Q', q', cum, facta semiconversione circa punctum A, arcus Amb debeat abire in ADB.

102. Si ageretur de *phænomenis annuli Saturni pro planeta* multo velociore; *posset occurrere usus hujusce supplementi*. Verum pro *Mercurio solo* tangens excurrit parum admodum ultrà primam basim: pro planetis omnibus aliis continetur citra (*). Hinc pro hisce omnibus abunde sunt soli bini arcus priores, alter superior, alter inferior. Et quidem sola telluris consideratio sufficit ad *usus astronomicos* in hoc genere pro nobis spectantibus utique e tellure: ac *videbimus infra*, *ut supra* etiam monuimus, pro ipsa *nihil requiri*, *præter illos priores* duos arcus hinc & inde ab A, *cum* casibus expressis *in fig.* 7.

103. *Schol.* 4. Si recta solvens problema sit proxima tangenti; constructio non poterit exhibere satis accurate ipsius intersectionem cum arcu ob nimiam hujus obliquitatem: at in eo casu res facilius, & accuratius *perficitur* calculo numerico admodum simplici. Ipsum *exponemus* in *fig.* 12, in qua retinebimus plures e litteris figuræ 4 relatæ ad tertiam.

104. Sit MT' tangens cum sinu MP, qui *secet* in N rectam ipsi parallelam ductam per punctum axis H parum remotum a puncto T', *occurrentem* arcui in F, f, & sint FE, fe perpendiculares axi. Habetur arcus a respondens AP, cujus cosinus ad radium est (num. 98) ut velocitas puncti primi ad velocitatem

(*) Verum pro planetis superioribus, qui tanto minus distant a Saturno, non potest adhiberi hæc eadem theoria, quia non potest accipi motus lineæ nodorum annuli per totam eorum orbitam pro æquabili.

secundi : dato etiam arcu, qui respondet rectæ HT', quærentur PE, P*e*. Eæ lineæ erunt quamproxime æquales inter se ; quia cum in fig. 3 omnes chordæ arcuum F*f*, qui sint secti bifariam in M, sint parallelæ inter se ; differentia sinuum FE, *fe* ad chordam F*f* habebit ibi rationem constantem, dum arcus ipse minuitur, donec evanescat : arcus autem ipse, si sit exiguus, est quamproxime æqualis chordæ, a qua differt per quantitatem exiguam respectu ipsius *sagittæ MN*, *quæ jam est* exigua respectu ipsius chordæ. Hinc in fig. 12 ; recta E*e* æqualis arcui F*f* figuræ 3 habebit rationem quamproxime constantem ad differentiam sinuum FE, *fe*, adeoque chorda F*f* respondens E*e* bifariam sectæ in P habebit *directionem quamproxime* eandem usque ad contactum M.

105. Quod si in fig. 3 concipiatur N*n* parallela BA ; ea abscindet O*n* = PN ; cumque PM, PN figuræ 4 æquentur rectis OM, PN figuræ 3 (num. 21), æquabuntur itidem iisdem in fig. 12, eritque MN in hac æqualis M*n* figuræ 3. Est *autem in* ipsa fig. 3 CO cosinus, MO sinus arcus AM, qui est idem, ac arcus *a* numeri 98 habens *juxta num. 18 pro cosinu* $\frac{1}{m}$. Quare erit CO = *cos.a*, MO = *sin.a*. Facto autem radio circuli = 1, erit MN $= \frac{FM^2}{2CM} = \frac{1}{2}FM^2$, tum CM = 1 : MO = *sin.a* :: MN $= \frac{1}{2}FM^2 : Mn = \frac{1}{2}FM^2 \times sin.a$. Quare in fig. 12 erit MN $= \frac{1}{2}PE^2 \times sin.a$, posito MN ipsius pro M*n* figuræ 3 ipsi æquali, & PE pro chorda arcus *MF* exigui figuræ 3 ipsi æqualis.

106. Porro in fig. 12 est T'H ad MN, ut PT' ad PM, sive ut in fig. 3 MT ad MO, vel ut CM = 1 ad CO = *cos.a*. Quare in fig. 12 erit 1 : *cos.a* :: T'H : MN = T'H × *cos.a*. Fuerat prius MN $= \frac{1}{2}PE^2 \times sin.a$. Quare erit $PE^2 = 2T'H \times \frac{cos.a}{sin.a} = 2T'H \times cot.a$. Hinc facili calculo invenietur valor PE = P*e* $= \sqrt{2T'H \times cot.a}$ ope anguli *a*, cujus cosinus $\frac{1}{m}$.

107. Proderit invenire ipsum angulum ad habendum arcum, cui respon-

respondet AP, & debet addi, ac ſubtrahi valor inventus ad habendos valores AE, Ae, qui exhibeant in fig. 5 locum puncti ſecundi in iis occurſibus. Verum ſi libeat habere eum valorem per ſolam rationem velocitatum, ſatis erit ponere $\frac{1}{m}$ pro *cos.a*, & $\surd(1 - \frac{1}{m^2})$ pro *ſin.a*: inde habebitur $\frac{sin.a}{cos.a} = \surd(m^2 - 1)$, & $PE = Pe = \surd 2TH : \sqrt[4]{(m^2 - 1)}$.

PROBLEMA V.

108. *Determinare effectum craſſitudinis annuli, ſi qua habeatur. Craſſitudo annuli, ſi qua adſit, efficiet, ut pro apparitione, & diſparitione annuli non debeat conſiderari occurſus plani tranſeuntis per mediam ejus craſſitudinem, quod dici poteſt planum centrale, ſed alterum e planis tranſeuntibus per ſuperficies ampliores; quorum id, quod præcedit, dicemus præcedens, alterum vero ſubſequens*. Oportet 1°. determinare, utrum conſiderari debeat in ſingulis *caſibus*, 2°. *definire* correctionem loci, quem occupat *punctum ſecundum in* occurſu plani centralis cum ſole, vel cum *puncto* primo ad habendum occurſum plani conſiderandi. Ex ea locorum correctione eruetur etiam correctio temporis. Porro primum caput expedietur per conſiderationem caſuum ſingulorum, pars prima capitis ſecundi per ſolam rationem velocitatum, ſecunda *per proprietates* lineæ ſinuum.

109. *Diſparitio plani centralis accidit* in tranſitu puncti ſecundi per ſolem, ſi punctum primum *ſit in ſemicirculo* ſuperiore figuræ 1: fit apparitio, ſi id ſit in *ſemicirculo inferiore*. In primo caſu obvertitur puncto ſecundo facies ſuperior, quæ eſt præcedens, & *ipſa appellente* ad centrum ceſſat *ejus* illuminatio: in ſecundo caſu facies, quæ obvertitur puncto ſecundo, eſt inferior, nimirum *ſubſequens*, & ut incipiat illuminari, debet ipſa tranſire per centrum. Quare in primo caſu conſiderandum eſt planum præcedens, in *ſecundo* ſubſequens. Si habeatur craſſitudo annuli reducta ad planum orbitæ puncti ſecundi, a quo ipſa ſecatur oblique, & *fiat*, ut velocitas puncti primi ad velocitatem

ſecun-

secundi, ita dimidia ea craſſitudo habita in partibus radii circuli ad quartum, is terminus reductus ad minuta erit correctio adhibenda loco puncti secundi, quæ nimirum erit subtractiva in primo casu, additiva in secundo, cum in illo occursus cum plano illuminato fiat prius, quam cum centrali, in hoc posterius. Si ratio velocitatum sit, ut prius, 1 ad *m*, & dimidia craſſitudo *h*, erit *mh* correctio in partibus radii = 1, & 3438*mh* correctio ipsa in *minutis circuli*.

110. Si in iis casibus punctum secundum distaret in fig. 5 a diametro AB minus quam per dimidiam craſſitudinem annuli; apparitio non fieret in *transitu plani præcedentis*, vel *subsequentis per centrum*, sed in *occursu alterius cum puncto secundo*: oportet evolvere effectum in hisce occursibus, ubicumque in occursu plani centralis sit punctum secundum. Puncto secundo existente infra centrum, illuminatur ejus planum præcedens: eo existente supra, illuminatur subsequens, nisi distet a centro minus quam pro dimidia sua craſſitudine. *Quare si agitur de occursu ante centrum; considerandum est planum præcedens: si vero agitur de occursu post centrum; considerandum est planum subsequens tam pro apparitione, quam pro disparitione*. Hinc in primo casu considerandus est pro T' figuræ 5 locus puncti secundi anterior eo, qui assumptus est pro momento appulsus plani centralis, in secundo pro T posterior. Correctio adhibenda erit ipsi puncto T', vel T. Ea erit *illa ipsa* 3438*mh* numeri præcedentis subtractiva pro puncto T' *posito in semicirculo inferiore, additiva pro T posito in superiore*.

111. Correctio adhibenda ei puncto debet applicari in omnibus figuris sequentibus puncto, per quod ducenda erit recta solvens problema. Si id punctum jacuerit in basi *b*A, assumenda erit lineola respondens ei correctioni ad dexteram, si in basi AB, ad lævam. Nimirum in utroque casu augenda erit distantia ab A puncti, per quod duci debet recta solvens problema.

112. Inventa correctione, quæ adhiberi debet puncto, per quod ducenda est recta solvens problema; facile invenietur locus puncti secundi in sua orbita, qui exhibeat tempus. Sit in fig. 13 T' lo-

T' locus ipsius puncti secundi in appulsu primi ad centrum, T'H correctio inventa numero superiore: recta solvens problema pro plano centrali sit T'F cum sinu FE. Ducatur ex H recta parallela T'F, quæ concursu suo in f cum linea sinuum, exhibebit per sinum fe correctionem Ee loci puncti primi, ex qua habetur differentia temporis ipsi respondens inter occursum puncti secundi cum plano centrali, & occursum cum plano anteriore, vel posteriore.

113. Lineola Ee *facile invenietur accuratius calculo numerico*. Chorda Ff producta occurrat axi in P, & erit PT' : PF :: HT' : $Ff = \frac{HT' \times PF}{PT'}$, tum PF : PE :: $Ff = \frac{HT' \times PF}{PT'}$: $Ee = \frac{HT' \times PE}{PT'}$. Porro habetur PE e *solutione priore*, & *habita FP* pro tangente curvæ, erit *PE ejus* subtangens, nimirum (*num.* 12) tangens arcus circuli æqualis AE, quæ assumpta e tabula sinuum, & ducta in 3438 reducetur ad minuta exhibita a scala partium axis, quæ exhibet immediate tam minuta arcus æqualis AE, quam minuta *contenta* in T'E. Si numerus minutorum in T'E fiat = x, in AE = y; erit PE = $tan.y$, & numerus minutorum in ipsa $3438 tan.y$, $T'P = x - 3438 tan.y$: cumque sit $T'H = \pm 3438 mh$; erit correctio $= \pm \frac{(3438)^2 mh tan.y}{x - 3438 tan.y}$.

113. Ubicunque fuerit punctum T', & ubicunque recta solvens problema occurrat curvæ, ut in F', vel F''; formula ipsa habebit semper locum, & exhibebit semper valorem quæsitum, dummodo, si T'E = x *habeat* directionem contrariam progressui puncti secundi, ut eam habet T'E'', habeatur pro negativo valor x, & si AE sit valor positivus, nimirum directionis *ejusdem*, & major gradibus 90 = 5400', valor $tan.y$ habeatur pro negativo, ut in F', ubi idcirco T'P' est summa, non differentia T'E', E'P'. Esset valor $tan.y$ negativus etiam existente y minore 90°, sed negativo: erit autem positivus, si AE sit valor negativus, & major quadrante, quam ob causam existente tam T'E'', quam E''P'' negativo, est T'P'' ipsorum *summa* negativa. Geometria per directionem linearum exhibet positiva, & negativa, ut calculus per sua signa.

114. *Schol.* Quæ dicta ſunt huc usque, ſupponunt datam rationem velocitatum puncti primi ad velocitatem ſecundi, & poſitionem hujus reſpectu diametri, quam illud percurrit, pro momento, quo illud pervenit ad centrum. Ratio velocitatum mutatur nonnihil, quia ob ellipticitatem tam Saturni, quam planetæ, ex quo obſervari debent phænomena ejus annuli, ambæ velocitates mutantur nonnihil: poſitio diametri, quam percurrit interſectio plani annuli cum *plano orbitæ ejus planetæ*, pendet a poſitione lineæ nodorum ipſius annuli in ea orbita: *locus* puncti ſecundi eſt locus ejus planetæ pro momento, quo planum ipſius annuli tranſit per ſolem: id momentum pendet a linea nodorum annuli reſpectu Saturni, *qua data*, *datur locus*, quem tum debet habere Saturnus in ſua orbita, unde eruitur per *tabulas* aſtronomicas primo tempus ei loco debitum, tum locus planetæ in orbita ſua reſpondens ei tempori.

115. Poſitio lineæ nodorum reſpectu *orbitæ* Saturni habetur itidem ex tabulis aſtronomicis; ea deduci poteſt *etiam* ex obſervatione diſparitionis, vel apparitionis cujuſpiam factæ in tranſitu per ſolem. *Si detur ejuſmodi momentum per obſervationem;* dabitur ex calculo aſtronomico *locus heliocentricus* Saturni eo tempore in *orbita* ſua, per quem tranſit linea nodorum. Poteſt autem *is locus* haberi accuratior, ſi tabularum *locus* corrigatur per obſervationes immediatas Saturni factas iis diebus: quin immo per binas ejuſmodi obſervationes factas ad intervalla temporum ſatis magna poteſt inquiri etiam in *motum ipſum nodorum* ad perficiendam ejus theoriam, & *inveniendum* locum nodorum pro alio tempore dato (*).

116. Invento eo nodo, ſi habeatur præterea inclinatio ejus plani vel ad orbitam Saturni, vel ad orbitam ejus planetæ, invenietur locus nodorum in orbita ipſa. Si enim in fig. 14 ſit N locus nodi orbitæ planetæ cum orbita Saturni, P locus nodi annuli in

(*) Si nodus habeat motum, & inæqualem, requirentur plures ejus determinationes ad eam rem, per quas obtineatur lex ipſius, vel ſaltem ad obtinendum ejus locum per interpolationem pro apparitione, & diſparitione proxime ſequentibus.

Ni in orbita Saturni, dabitur arcus NP. Datur etiam angulus N inclinatio earum orbitarum, & erit P inclinatio annuli ad planum orbitæ Saturni, Q inclinatio ipsius ad planum orbitæ alterius planetæ. Quare si detur alter ex iis angulis, habebitur alter, & habebitur NQ, nimirum positio lineæ nodorum in orbita planetæ.

117. Innotescit Astronomis inclinatio annuli ad planum orbitæ Saturni, & ad planum eclipticæ cum loco nodorum, tam respectu orbitæ Saturni, quam *respectu eclipticæ*. *Inquiri potest in ea* omnia ope horum phænomenorum, rite combinando transitus plani nodi per solem, & per terram erutos ex observatione. Docebimus paullo inferius post applicationem *theoriæ* ad terram methodum determinandi immediate per hasce *observationes* arcum NQ, nimirum distantiam nodi annuli in ecliptica, a nodo orbitæ Saturni N, dato ipso nodo orbitæ, qui cum inclinatione orbitarum debet determinari aliunde, nimirum per generalem theoriam planetarum, & observationes ipsi applicatas. Habitis NP, NQ cum *angulo* N obtinerentur ambæ inclinationes plani annuli P, & Q. Sed exiguus *error in iis* arcubus posset inducere errorem satis *magnum in eos angulos : eum autem errorem potest* inducere potissimum *difficultas* determinandi crassitudinem annuli, si qua habetur sensibilis, & discrimen inter momentum, quo planum annuli incipit, vel desinit obverti soli, vel oculo, & momentum, quo incipit apparere, quod intervallum temporis pendet a vi telescopiorum, & oculorum. Sed de iis omnibus agemus infra. Interea hic *docebimus* methodum corrigendi errorem, qui oriri potest ab æquabilitate motuum *falso* supposita.

PROBLEMA VI.

118. *Corrigere errorem ortum ab æquabilitate motus minus accurata.*

119. Sit in fig. 15 T' locus puncti secundi in axe *lineæ* sinuum, T'F recta *solvens* problema, FE sinus arcus *æqualis* AE. Habito momento temporis *appulsus* primi puncti ad centrum, habetur punctum orbitæ puncti secundi *respondens* puncto T', & habita linea nodorum in ipsa orbita, habetur punctum A in ea-

dem, adeoque arcus respondens T'A. Angulus in T' determinatus per rationem velocitatum mediarum determinabit rectam T'F, & punctum F, unde demisso perpendiculo FE habebitur numerus minutorum in arcu, qui respondet AE, adeoque punctum E in orbita puncti secundi, unde innotescet momentum, quo id punctum eo devenit: pro eo momento poterit inveniri locus Saturni in orbita sua, & inde locus primi puncti in sua diametro calculo astronomico simili ei, *quo invenitur tempus appulsus ejusdem* puncti ad centrum. Quare habebitur distantia ejus puncti a centro, quæ sit EF'.

120. Si EF' inveniatur æqualis EF, nulla correctione opus erit. Cum distantia puncti secundi a centro sit EF', & EF sinus arcus respondentis AE sit distantia ab eodem ordinatæ puncti secundi; habebitur ibi occursus quæsitus. Sed si eæ rectæ non sint æquales; distabit punctum primum ab ea ordinata per F'F; & quærendum erit punctum f, in quo EF, EF' debeant fieri æquales. Oportebit invenire rationem velocitatum a*ctualem* nonnihil diversam a media, quæ ratio inveniri poterit ex datis per calculum astronomicum distantiis veris Saturni, & secundi planetæ a sole pro illo momento temporis, quod respondet puncto E. Nam velocitates angulares circa solem sunt in ratione reciproca subduplicata distantiarum, ac datis actualibus distantiis a sole, velocitatibus angularibus, & inclinatione annuli ad planum orbitarum Saturni, & alterius planetæ, haud difficulter invenitur ratio vera velocitatis, quam habet *tunc intersectio lineæ* nodorum annuli cum recta plani orbitæ posterioris transeunte per solem sibi perpendiculari, ad velocitatem, quam habet planeta ipse relatus ad circumferentiam circuli habentis distantiam mediam per ordinatam perpendicularem eidem rectæ. Si ea ratio sit 1 ad m', ac fiat $EI = m' \times EF'$, ut est $ET' = m \times EF$, & ducatur IF': ejus occursus in f cum linea sinuum exhibebit id punctum, & ope sinus fe quæsitam correctionem Ee.

121. Si enim concipiatur ex f recta parallela axi occurrens EF in L; erit F'L ad Lf = Ee, ut F'E ad EI, nimirum ut velocitas actualis puncti primi ad velocitatem secundi, adeoque tempore,

pore, quo punctum secundum percurrit arcum æqualem eE, punctum primum debet percurrere spatiolum æquale $F'L$, unde fit, ut, ordinatâ illius habente distantiam a centro ef, eandem habeat hoc etiam.

122. *Schol.* 1. Facile invenietur correctio eE calculo numerico. Sit $AE = y$, erit $EF = \sin.y$, Ee differentia arcus $= dy$, LF differentia sinus $= d\sin.y = dy\cos.y$, cumque ratio velocitatum actualis *sit* m', *erit* $m' : 1 :: eE = dy : F'L = \frac{dy}{m'}$. Error inventus FF' *dicatur* e, eritque $dy\cos.y - \frac{dy}{m'} = e$, adeoque correctio quæsita $eE = dy = \frac{e}{\cos.y - \frac{1}{m'}}$. *Si* FT' fuerit tangens; *tum erit* $\cos.y = \frac{1}{m}$ (*num.* 18). Quare valor quæsitus $\frac{e}{\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}}$. In eo casu ob valorem m' parum admodum diversum ab m, divisor erit perquam exiguus: hinc in eo casu, & prope ipsum formula posset evadere nimis erronea: *nam valor* $FL = d\sin.y$ non est accurate $=$ $dy\cos.y$: *negliguntur ibi termini multiplicati per potentias ipsius* dy *elevatiores: habenda tum erit ratio saltem unius termini inferioris*. Sed quotiescumque valor $\cos.y$ fuerit satis remotus a valore $\frac{1}{m'}$; tum ii termini inferiores tuto negligi poterunt: quin immo etiam adhiberi *poterit* $\frac{1}{m}$ *pro* $\frac{1}{m'}$, quotiescumque valor $\cos.y - \frac{1}{m}$ non fuerit *nimis exiguus*, cum nimirum agatur de valore Ee exiguo: adeoque omitti poterit perquisitio molestior rationis velocitatum actualium. Casus, in quo FT' est tangens, est is, in quo occursus debet fieri in limite æqualitatis, vel prope ipsum; in quo casu fieri etiam potest, ut pro occursu indicato a solutione erronea habeatur potius minima distantia, quod accidit prope limitem æqualitatis. In distantia ab eo limite non nimis exigua, adhiberi tuto poterit ea formula admodum simplex. Prope ipsum vel adhibendus est calculus numericus operosior, vel constructio, inventâ EI per valorem m', & ductâ IF', quæ determinet punctum f.

PROBLEMA VII.

123. *Applicare theoriam propositam ad phænomena annuli observanda e terra.*

124. Ratio velocitatum mediarum terræ in sua orbita habita pro circulari, & intersectionis lineæ nodorum annuli cum diametro sibi perpendiculari erit subduplicata reciproca distantiarum mediarum terræ, & Saturni a sole. Eæ distantiæ sunt ut 1 ad 9,53937, cumque radix hujusce numeri posterioris sit 3,089, hæc erit ratio velocitatis Saturni ad velocitatem terræ, adeoque erit $m = 3,089$. Hinc $\frac{1}{m} = 0,3238$, qui est cosinus 72°. 3' = 4323': tangens ejus arcus est 3,08685, quæ multiplicata per 3438 exhibet minuta 10613, & si inde dematur arcus 4323', remanebit excessus tangentis supra arcum ipsum 6290'.

125. Cum velocitas terræ obvenerit major; habebitur casus numeri 75, in quo recta solvens problema poterit evadere tangens lineæ sinuum, & in quo habebitur limes æqualitatis (num. 55). Contactum, & eum limitem exhibebit subtangens æqualis tangenti arcus, cujus cosinus $\frac{1}{m}$ (num. 56), adeoque is arcus pro terra erit 72°. 3'. Excessus 6290' tangentis supra arcum est minor divisore 10800', adeoque (num. 18) tangens non distat a puncto A lineæ sinuum, quod respondet puncto A figuræ 5 (num. 81), per numerum basium semicircularium accuratum, quin immo nec excurrit ultra unicam basim. Hinc pro terra habebitur casus figuræ 7, in qua tangentes F'T, FT' terminantur ad bases primas AB, Ab, quod innuimus num. 40, & 75.

126. Erit ibi AE = AE' = 72°. 3' = 4323', AT = AT' = 6290; cumque sit AB = Ab = 180° = 10800', remanebunt BT, bT' = 4510'. Si distantia terræ in fig. 5 ab A eo momento, quo planum annuli pervenit ad solem, fuerit major quam 6290', sive 104°. 50'; habebitur unicus occursus plani ipsius cum terra, qui cum transitu ejusdem plani per solem inducet unam disparitionem, & unam apparitionem. Si ea distantia terræ ab A fuerit æqualis 104°. 50'; habebuntur duo occursus, quorum alter

cum

cum transcursu, & alter sine ipso: occursus cum transcursu exhibebitur a puncto f', vel f, & alter sine transcursu habendus in ipso limite æqualitatis a puncto contactus F, vel F': in concursu indicato a puncto f' pertinente ad arcum inferiorem habebitur disparitio, in altero indicato a puncto f pertinente ad arcum superiorem apparitio: in concursu indicato ab utrovis contactu disparitio, sed *momentanea*. Si distantia terræ ab A in appulsu primi puncti ad centrum *fuerit minor* quam 104°. 50'; habebuntur tres occursus *cum transcursu indicati* ab intersectionibus $n''2$, $n'2$, $n2$, *vel* $n''3$, $n'3$, $n3$, qui conjuncti cum transitu plani annuli per solem exhibebunt binas disparitiones, & totidem apparitiones. Demum si illa distantia *fuerit* = o; *habebitur disparitio indicata a puncto* q *in primo transcursu plani ipsius ultra terram*, & apparitio indicata a puncto Q in postremo ejus transcursu: coeunte autem cum A puncto $n'3$, vel $n'2$, a quo indicatur concursus, *evanescet* apparitio cum nova disparitione, & disparitio præcedens *continuabitur* in ipso transitu simultaneo plani, & ordinatæ per centrum. Ea omnia congruunt cum iis, quæ dicta sunt a num. 47.

127. *Schol. 1. Numerus, & qualitas occursuum cum numero, & tempore apparitionum, & disparitionum pendent fere unice a loco terræ in appulsu plani annuli ad solem. Ratio velocitatum mediarum* m *perstat ad sensum eadem diutissime: ratio velocitatum actualium* m' *mutatur nonnihil, sed ea ipsa non mutatur ad sensum, nisi dependenter ab eo loco: nam inclinatio plani annuli mutatur parum admodum, si forte mutatur, adeoque id planum transit per solem, Saturno adveniente ad punctum suæ orbitæ fere idem, in quo ejus distantia a sole, & velocitas angularis circa solem vix quidquam mutantur ab exiguis perturbationibus motuum ipsius: mutatio fere tota rationis velocitatum debet provenire a loco terræ in occursu, quo mutato, mutatur nonnihil ipsius distantia a sole, & velocitas: ea ipsa mutatio est exigua, & cum loca occursuum pendeant a loco terræ in appulsu plani annuli ad solem, & ratione velocitatum, determinante inclinationem rectæ solventis problema; si terra redeat ad idem punctum suæ orbitæ in appulsu plani annuli ad solem, redibunt eadem phænomena dispari-

paritionum, & apparitionum: nam manente inclinatione plani annuli, manet directio diametri perpendicularis ejus intersectioni cum plano eclipticæ, adeoque, redeunte terra ad idem punctum ipsius eclipticæ, redit eadem positio ipsius in basi *b*AB figuræ 7, nimirum idem punctum, per quod duci debet recta solvens problema, redit eadem inclinatio ejusdem rectæ, redeunt iidem occursus ipsius cum curva sinuum, eadem correctio ejus inclinationis respondens iis occursibus singulis.

128. Sed mutato loco terræ in appulsu plani annuli ad solem, debet mutari etiam series eorum phænomenorum. Si is locus distet ab A per intervallum majus illis rectis AT, AT' determinatis a ratione velocitatum; habebitur, ut diximus, unica apparitio, & disparitio, & quidem si terra tum fuerit in semicirculo inferiore figuræ 5, existente ejus loco in fig. 7 in *r*1; habebitur concursus indicatus ab *n*1 terræ descendentis cum plano annuli ascendente; adeoque in eo concursu disparitio, & in transitu plani annuli per solem apparitio: sed si e contrario terra tum fuerit in fig. 5 in semicirculo superiore, sive in *r*4 figuræ 7; habebitur concursus indicatus ab *n*4 terræ itidem descendentis cum plano ascendente; sed in eo concursu habebitur apparitio post disparitionem præcedentem in transitu per solem. Si illa distantia loci terræ fuerit æqualis ei intervallo, loco ipso existente momento ejus transitus in fig. 7 in T', vel T; præter eam disparitionem, vel apparitionem indicatam ab *f*' pro descensu terræ in semicirculo inferiore figuræ 5, vel ab *f* pro ejus descensu in superiore prope B cum apparitione, vel disparitione in transitu plani per solem, habebitur disparitio momentanea indicata ab F, vel F', quæ fiet, terra appellente ad ea ipsa puncta figuræ 5. Si illa distantia loci terræ fuerit minor, loco ipso existente in fig. 7 in *r*2, vel in *r*3; habebuntur binæ disparitiones, & totidem apparitiones. In primo casu fiet prima disparitio in descensu per semicirculum inferiorem figuræ 5 indicata ab *n*2 pro concursu primo, tum apparitio in transitu plani per solem, secunda disparitio in ascensu per semicirculum superiorem indicata a concursu *n*'2, ac apparitio subsequens in descensu per eundem semicirculum superiorem indicata ab *n*2. In secundo vero

casu

casu fiet prima disparitio in descensu, vel ascensu indicata ab $n3$ pro primo occursu, apparitio in ascensu indicata ab $n3$ pro occursu secundo, disparitio nova in transitu per solem, & apparitio nova in descensu indicata ab $n3$ pro occursu tertio.

129. Patet igitur, mutato eo loco terræ in appulsu plani annuli ad solem, mutari totam seriem phænomenorum, ut & distantiam temporariam inter eas apparitiones, & disparitiones, quæ pendet a magnitudine chordarum interceptarum inter diversa puncta pertinentia ad intersectionem rectæ solventis problema cum curva sinuum, & mutatur plurimum, mutato loco puncti r, potissimum prope puncta T, T', ubi sufficit paucorum graduum discrimen ad mutandum punctum $r1$ in $r2$, vel $r3$ in $r4$. Ille arcus respondens AT, & AT' est ex ratione velocitatum mediarum (num. 125) minutorum 6290 = 104°. 50'. Corrigi potest adhibendo velocitates actuales debitas locis ipsis terræ, quæ respondent singulis iis punctis, & quæ remanent ad sensum eædem pro loco eorum punctorum correcto, qua correctione adhibita, jam ipsæ AE, AE' æquales arcubus æqualitatis non erunt prorsus æquales inter se, nec F'T, FT' prorsus parallelæ: ea correctio semel adhibita perstaret diutissime, quia pertineret ad eadem loca Saturni in orbita sua, & terræ in sua.

130. Si ratio temporis periodici Saturni in orbita sua esset accurate multipla temporis periodici terræ in ecliptica, quam contineret quopiam numero vicium accurato p; post singulas conversiones Saturni, & numerum annorum p rediret eadem series phænomenorum: si eorum temporum ratio esset ut quipiam numerus p ad quempiam q accurate; post numerum annorum q rediret iterum series eadem, quia locus terræ rediret ad idem punctum baseos bAB. Verum ea tempora non sunt accurate ut numerus saltem non immanis ad numerum, & non sunt utcumque satis proxime in ratione numeri brevis ad alium non nimis longum. Quamobrem periodus nulla habetur accurata, & nonnisi post longam annorum seriem redit saltem proxime eadem series. Locus terræ respondens appulsui plani Saturni ad solem post singulas periodos mutatur plurimum. Bini sunt ii appulsus singuli, nimirum

mirum Saturno exiſtente in partibus oppoſitis ſuæ orbitæ, nec velocitas actualis ipſius eſt eadem in utroque, nec inter eos habetur intervallum dimidium temporis periodici ob excentricitatem orbitæ Saturni, & quidem non exiguam, nec velocitas actualis terræ eſt pariter eadem in utroque caſu ob ejus excentricitatem. Quamobrem etiam ſi haberetur illa ratio temporum periodicorum accurata numeri ad numerum, adhuc tamen ſeries in iis eſſet diverſa. Verum periodus remaneret eadem pro utrovis nodo; quia a diſceſſu a nodo utrovis ad regreſſum ad eundem impenditur quamproxime idem tempus, quod eſt quamproxime idem pro quovis puncto determinato orbitæ Saturni, ut tempus periodicum annuum eſt idem pro quovis eodem puncto orbitæ terræ.

131. Si pro horis, & minutis adhibeantur fractiones decimales unius diei; tempus annuum periodicum terræ eſt dierum 365,256, & Saturni dierum 10761,609, nimirum eorum annorum 29, & dierum 169,185, & ſi aſſumantur fractiones decimales unius anni, una periodus Saturni continet annos 29,4632. *Quamobrem* poſt unam periodum longiorem *annis* 29, locus terræ diſtabit a loco præcedenti per $\frac{4632}{10000}$ basis *b*AB, adeoque ſeries *phænomenorum* occurret admodum diverſa. Quid accidere debeat poſt plures revolutiones, apparebit ex tabella hic appoſita pro 10 revolutionibus Saturni.

1	29,4632
2	58,9264
3	88,3896
4	117,8528
5	147,3160
6	176,7792
7	206,2424
8	235,7056
9	265,1688
10	294,6320

132. Post duas conversiones desunt ad annos 59 partes anni $\frac{736}{10000}$, quibus respondent minuta circuli 1590 = 26°. 30'. Hinc si *locus terræ* in quodam appulsu plani annuli ad solem sit in *r2* supra limitem æqualitatis inferiorem per gradus 10; in reditu ejusdem nodi ad solem post annos fere $29\frac{1}{2}$ erit alicubi in *r3*, & post annos fere 59 erit in *r1* infra ipsum limitem per gradus 26°. 30'. In primo casu habebuntur *binæ apparitiones*, & totidem disparitiones, *in secundo unica* apparitio, & disparitio. Quamobrem licet partes, quæ desunt, non sint nisi $\frac{736}{10000}$, ea periodus non potest reddere eandem seriem *phænomenorum* nec *accurate*, nec *satis proxime*. *Post omnes sequentes conversiones* vel redundat, vel deest *multo plus* ad periodum accuratam.

133. Combinationes eorum numerorum, assumendo simul plures, vel eorum decupla, ostendent periodos minus aberrantes, *sed nulla invenietur* non nimis longa, quæ nec relinquat defectum, nec excessum cujuspiam *centesimæ*, & singulæ centesimæ inducunt discrimen 216 = 3°. 36'. *Si fiat* summa conversionum 6 = 176,7792, & 7 = 206,2424, habetur pro 13 conversionibus *Saturni* 383,0216, nimirum anni 483 cum $\frac{216}{10000}$, *quibus* respondent minuta 457 = 7°. 37'. Discrimen in phænomenis erit exiguum, si initium periodi sit procul a limitibus T, & T'; sed erit *aliquod satis sensibile* prope eos limites. Periodus minus erronea habebitur, si fiat summa periodorum 40 = 1178,528, & 1 = 29,4632, quæ exhibet 1207,9910, *nimirum* annos 1208 $-\frac{91}{10000}$. His respondent minuta 196 = 3°. 16'. Verum ne ea quidem, licet sit longior mille annis, est prorsus accurata. Est adhuc accuratior periodus conversionum Saturni 95. Nam 90 exhibent 2651,688, & 5 = 147,3160, quorum summa 2799,004 habet pro excessu $\frac{4}{1000}$, sive minuta 86 = 1°. 26'. Verum nec ipsa est penitus accurata, nisi numeri adhibiti pro periodis non

prorsus certi intra limites tam arctos corrigant eum errorem ; & est nimis longa cum requirat sæcula 28.

134. *Schol.* 2. Proponemus hic post applicationem theoriæ ad terram methodum instituendi calculum pro inventione plurium, quæ in superioribus diximus inveniri ope calculi Astronomici, uti sunt inventio loci terræ pro momento, quo primum punctum advenit ad centrum circuli (num. 31), inventio erroris orti ex suppositionibus non prorsus accuratis, & ex defectu constructionis (num. 119), inventio rationis celeritatum actualium, & ejus correctio (num. 120).

135. Sint in fig. 16 (Tab. III) puncta N, P, Q eadem, ac in fig. 14: nimirum N nodus orbitæ Saturni NPN' relatæ ad superficiem heliocentricam sphæræ cælestis cum ecliptica cælesti VQXR, P nodus plani annuli cum orbita Saturni, Q eum ecliptica, existente RPQ intersectione plani transeuntis per solem *C* paralleli plano annuli cum eadem superficie cælesti. Patet, *angulos* in P, & Q fore inclinationes plani annuli ad *planum orbitæ* Saturni, & ad *planum eclipticæ*. *Patet itidem*, loco Saturni *deveniente* ad P, *debere planum annuli transire per* solem, & loco terræ *deveniente ad* Q, *idem planum debere transire per ipsam* terram.

136. Sit MADB in plano eclipticæ circulus referens orbitam terræ habitam pro circulari, quæ occurrat in A, B radiis CQ, CR, & in M, D diametro VX perpendiculari ad QR: *patet*, intersectionem plani annuli translati a Saturno *motu parallelo cum* plano eclipticæ fore semper parallelam diametro RCQ; adeoque si loco Saturni existente ubicumque alibi in L, & ipso Saturno in radio CL alicubi in S, planum annuli transiens per S occurrat diametro VX in I, & plano eclipticæ in recta KI; ea recta erit parallela rectæ QR, & perpendicularis diametro VX. Patet inde, circulum MADB fore illum ipsum figuræ 5, in quo terra convertatur per MADB, dum intersectio I plani annuli ascendit ibi per diametrum MD.

137. Saturno existente in P, erit id punctum in C, & ascendet per MD eo tempore, quo intersectio KI abibit a contactu

or-

orbitæ terrestris in M usque ad contactum in D. Porro communi methodo calculi astronomici dato tempore invenitur locus heliocentricus Saturni, & terræ, & dato loco, invenitur tempus. Hinc si ex elementis Astronomiæ habeatur locus nodi in orbita Saturni; invenietur tempus, quo id punctum deveniet ad centrum C; quia innotescet tempus, quo Saturnus erit in P. Si autem e contrario innotescat ex observatione tempus, quo planum annuli transit per solem, invenietur punctum P orbitæ Saturni, adeoque dato ex iisdem elementis loco N nodi orbitæ Saturni, invenietur arcus NP distantia alterius nodi ab altero. Punctum P tutius innotescet, si locus Saturni heliocentricus erutus e tabulis corrigatur per observationes ejus loci geocentrici habitas per eos dies.

138. Habito ex theoria jam determinata loco nodi P, & per ipsum ope calculi astronomici momento temporis, quo Saturnus eo deveniet, habebitur locus terræ pro eodem momento. Habito ex theoria arcu NP, ac inclinatione orbitæ Saturni ad eclipticam, & plani annuli ad eam orbitam, nimirum angulo PNQ, NPQ, habebitur arcus NQ, ut innuimus num. 115, & cum innotescat in ecliptica locus N nodi orbitæ Saturni, innotescet locus Q nodi annuli in ecliptica, adeoque & ejus distantia a loco terræ invento, quæ erit arcus AT, vel AT'.

139. Habito eo loco cum ratione velocitatum m, habebitur constructio exhibita in fig. 7, quæ præbebit occursus rectæ solventis problema cum linea sinuum. Si e singulis punctis occursuum demittantur perpendicula in axem lineæ sinuum, habebitur arcus eclipticæ interceptus inter A, & locum terræ in eo occursu; cumque detur locus A in ipsa ecliptica; innotescet punctum eclipticæ, in quo erit terra in eo occursu, quo loco cognito, innotescet tempus ejus occursus.

140. Ea solutio erit incorrecta, ob suppositionem motus terræ æquabilis in circulo, & motus puncti I suppositi æquabilis cum velocitate media ipsius Saturni. Utraque suppositio est nonnihil erronea. Excentricitas terræ exigua inducit errorem, sed exiguum ejus suppositionis: excentricitas Saturni est major, sed æquabili-

tas motus ipsius Saturni, & puncti I turbatur parum eo tempore, quo id punctum percurrit diametrum MD: nam arcus interea descriptus a Saturno habebit chordam circiter æqualem ei diametro, adeoque sinus dimidii ejus arcus erit ad radium, ut 1 ad 9,53937, unde obvenit is sinus 0,10483, & arcus $= 6^{\circ}. 1'$, cujus duplum $12^{\circ}. 2'$. Saturnus, & intersectio plani annuli cum ipso translati non possunt habere nisi exiguam inæqualitatem celeritatis.

141. Verum hæ inæqualitates, utut exiguæ, inducunt errorem, quem præstat corrigere, & pro invenienda correctione præscribitur num. 119 inventio loci intersectionis annuli pro dato momento temporis, quod respondet loco terræ exhibito a constructione pro quopiam occursu. Assumpto eo loco terræ invenitur calculo astronomico momentum temporis, quod ipsi respondet: hinc eodem calculo astronomico invenitur locus Saturni in orbita sua respondens ei momento: videndum, quomodo invenienda sit distantia intersectionis I plani annuli a centro C pro eo momento.

142. Sit L locus Saturni inventus in ejus orbita cælesti respondens ejus loco reali S. Cum detur & nodus N in orbita Saturni, dabitur arcus NL, qui est argumentum latitudinis LO: quæ invenitur. Invenietur ex tabulis Saturni tam ea, quam NO distantia a nodo reducta, adeoque ob datam distantiam NQ nodorum orbitæ, & annuli, habebitur OQ. Sit SG perpendicularis plano eclipticæ, & per ipsam planum, quod occurrat rectis CQ, IK in H, K. Erit SKG inclinatio plani annuli IKS ad planum eclipticæ IKG. Quamobrem habitâ etiam distantiâ Saturni CS, fiet, ut radius ad cosinum latitudinis, ita CS ad CG, tum ut radius ad sinum arcus OQ, ita CG ad GH. Rursum ut radius ad sinum latitudinis, ita CS ad SG, & ut radius ad cotangentem inclinationis annuli, ita SG ad GK. Habitis HG, GK, habetur HK, quæ erit earum summa, vel differentia, adeoque quæsita CI = HK.

143. Differentia distantiæ CI inventæ a sinu arcus exhibiti a constructione pro loco terræ, & assumpti pro calculo loci puncti I est error, qui debet corrigi. Ad eam correctionem propositus

ſitus eſt num. 120 valor m' rationis velocitatum actualium : docendum eſt, quo pacto ea ratio poſſit inveniri. Poſſet quidem inveniri per formulas differentiales ratio velocitatis mediæ Saturni in orbita circulari habente pro radio ejus diſtantiam mediam ad velocitatem actualem puncti I : nam valores HG, GK pendent a diſtantia actuali Saturni, & ab arcubus LO, OQ, præter valorem conſtantem inclinationis annuli, & arcus LO, OQ pendent ab arcu NL, & conſtanti *inclinatione* annuli. Quare omnia reducuntur *ad motum puncti* L, & diſtantiæ CS : velocitas puncti L *eſt velocitas* angularis puncti S, quæ ob areas conſtantes eſt in ratione reciproca duplicata diſtantiæ CS. Ipſius autem diſtantiæ variatio pendens ab *excentricitate, & anomalia poſſet determinari per formulam generalem :* ex iis *omnibus* emergeret expreſſio *mutationis*, *quam* dato tempuſculo debet ſubire HK, *ſive* CI. Inde emergeret ratio velocitatis mediæ Saturni ad velocitatem actualem puncti I. Itidem inveniretur per formulas differen*tiales ratio* mutationis puncti F figuræ 17 ad mutationem loci motus medii : ex iis rationibus, & ratione m velocitatum mediarum emergeret ratio m' *velocitatum actualium*. *Sed formulæ*, quæ exhiberent *eas expreſſiones*, eſſent admodum complicatæ.

144. Verum ratio velocitatum actualium *poteſt haberi multo facilius*, *determinando* pro alio quopiam momento, *ut poſt intervallum* unius diei, tam novum locum Saturni, & ipſam novam diſtantiam CI, quam novum locum terræ, cum locis, ad quæ *ipſa referatur per illas ordinatas*. Ratio arcus intercepti inter ea loca in orbita *media terræ* ad differentiam rectæ CI exhibebit valorem m'. Ratio calculi numerici *pro binis diſtantiis* CI patet ex iis, quæ poſita ſunt initio *hujus ſcholii*. Pro loco terræ in orbita circulari media calculus ſic facile inſtitui poteſt. Sit in fig. 17 ADBM *circulus* habens pro radio diſtantiam mediam terræ a ſole, *ille idem*, pro quo constructa eſt curva ſinuum. Habito puncto eclipticæ A, cui reſpondet locus terræ eo momento, quo punctum I *advenit ad centrum* C, *& alio* quovis loco H pro alio momento, *habebitur arcus* AH, *& ejus* complementum MH cum angulo MCT. Habebitur etiam diſtantia actualis terræ CT, a-

deo-

deoque etiam CI $=$ CT$\times$*cos*.MH. Si IT producta, si opus sit occurrat circulo medio in F; & radius ipsius fiat 1, erit CI cosinus arcus MF, qui proinde dabitur. Si is arcus inveniatur pro binis locis terræ, qui respondent illis ipsis momentis, pro quibus in fig. 16 determinatæ sunt illæ binæ distantiæ CI, ac differentia ipsarum reducatur ad minuta, multiplicando per 3438; erit differentia binarum distantiarum CI figuræ 16 ita reducta ad differentiam binorum arcuum MF, ut 1 ad valorem quæsitum *m*'. Nam occursus terræ cum plano annuli fiet modo, quo fieret, si terra esset non in T, sed in F, & semper haberet eam velocitatem, quam tunc habet punctum F, definitam per eam differentiam binorum arcuum MF.

145. Verum etiam sine inventione arcus MF, & sine linea sinuum res præstabitur per solos valores CI inventos in fig. 16 pro intersectione plani annuli, & in fig. 17 pro ordinata terræ, si fiat CI $=$ CT$\times$*cos*.MH pro binis, vel ad summum tribus locis terræ parum remotis a se invicem, quorum unus sit is ipse exhibitus a constructione innixa valori *m* minus exacto, & inveniantur totidem CI figuræ 16. Sit in fig. 18 recta AB æqualis arcui intercepto inter bina loca terræ, quibus respondent calculi, & AE differentia binarum CI figuræ 17, & 16 respondentium primo loco, BG differentia respondentium secundo. Concipiatur recta EG occurrens rectæ AB in C, & GF parallela ipsi AB occurrens AE in F. Erit EF:EA::AB:AC, & erit AC correctio adhibenda loco primo terræ A. Nimirum si bini errores AE, BG dicantur e, e', & arcus AB fiat $= a$; erit EF $=$ $\overline{e - e'}$: EA $= e$::FG $=$ AB $= a$:AC $= \frac{ae}{e' - e}$. Hæc est methodus solita falsæ positionis, in qua valores e, e' possunt relinqui in partibus radii, & valor a in minutis: obveniet AC itidem in minutis sine ulla reductione.

146. Hæc correctio erit satis accurata, ubi in prima constructione in fig. 15 punctum T' fuerit satis remotum a puncto tangentis P. Tum enim differentiæ errorum erunt satis proxime proportionales differentiis temporum, & locorum terræ. Si punctum T' sit

T' ſit ibi parum remotum a puncto P ; tum in fig. 18 locus C ita inventus poterit eſſe erroneus , quod an ita accidat , facile patebit , inventis binis CI binarum figurarum , quæ reſpondeant novo loco terræ C . Si eæ non ſint æquales ; ipſarum differentia erit novus error , cui concipiatur æqualis CH . Tum invenietur locus terræ , in quo error ſit $= 0$ methodo itidem ſolita ope trium errorum e, e', e'' cum binis differentiis loci terræ a, a'.

147. Sit relatio inter loca terræ proxima indicata a conſtructione , & errores iis reſpondentes expreſſa per æquationem $px^2 + qx + r = y$. Facta $x = 0, a, a'$, erit $y = e, e', e''$: hinc tres æquationes $r = e$, $a^2p + aq + e = e'$, $a'^2p + a'q + e = e''$. Inventis per poſteriores binas valoribus p, & q ; æquatio $px^2 + qx + e = 0$ exhibebit correctionem x, cui reſpondeat error $= 0$. Præſtabit autem pro ea methodo aſſumere tria tempora , quæ exprimantur a tribus punctis A , B , C , & pro iis computare loca terræ , & Saturni , ac binas illas CI , quæ exhibeant tres errores , cum facilius ex tabulis eruatur accurate locus verus terræ pro dato tempore, quam tempus pro loco vero dato. AD $= x$ erit immediate correctio temporis primo aſſumpti . Calculus evadet ſimplicior, ſi intervalla temporum aſſumantur æqualia, ut ſit $a' = 2a$. Binæ æquationes pro p, & q erunt $ap + q = \frac{e' - e}{a}$, & $2ap + q = \frac{e'' - e}{2a}$, ſubtrahendo primam a ſecunda fiet $ap = \frac{e'' - e}{2a} - \frac{e' - e}{a} = \frac{e'' - 2e' + e}{2a}$, $p = \frac{e'' - 2e' + e}{2a^2}$ tum $q = \frac{e' - e}{a} - \frac{e'' - 2e' + e}{2a} = - \frac{e'' - 4e' + 3e}{2a}$.

148. *Schol.* 4. Supereſt illud tantummodo, quod promiſimus numer. 117. ; nimirum methodus eruendi immediate ex obſervationibus in fig. 16 diſtantiam NQ loci nodi orbitæ Saturni in ecliptica a loco nodi annuli in eadem : id pertinet eo , ut inveniatur punctum Q , ſive A , quod ipſi reſpondet ; nam , ut ibi monuimus , aliunde determinari debet in Aſtronomia tam locus N nodi orbitæ , quam earum orbitarum inclinatio . Id præſtabimus ſolutione problematis ſequentis .

PRO-

PROBLEMA VIII.

149. *Determinare per observationes locum nodi annuli in ecliptica.*

150. Adhibeantur observationes anni cujuspiam, in quo habitæ fuerint binæ disparitiones, & binæ apparitiones, quarum una erit in transitu plani annuli per solem, & reliquæ tres in ejus occursu cum terra. Illa distinguitur ab his ex ipso tempore, quo debet haberi: facile est ex iis, quæ dicta sunt a num. 127, & ex loco ipso nodi in orbita Saturni proxime cognito discernere illud ex iis quatuor phænomenis, quod pertinet ad transitum annuli per solem, per quod determinabitur locus nodi P in orbita Saturni juxta id, quod diximus num. 115. Oportet habere observationes binorum e reliquis tribus.

151. Si habeantur bina tempora binorum ex iis tribus occursibus; habebuntur ex tabulis astronomicis, vel ex observationibus habitis per eos dies bina loca terræ in ecliptica, adeoque habebitur arcus iis locis interceptus. Capiatur e scala minutorum respondentium segmentis axis lineæ sinuum recta respondens ei intervallo, & fiat (fig. 19) in charta rectangulum HL*lh* habens basim L*l* (quidquid dicemus de litteris H, F, E, L, I, æque intelligendum erit de H', F', E', L', I', si id intervallum sit majus) æqualem ei rectæ, & altitudinem saltem æqualem diametro circuli respondentis lineæ sinuum: per ejus rectanguli medium ducatur recta E*e* parallela basi L*l*, cui erit æqualis, & capta EI ad E*e* in ratione velocitatis annuli ad velocitatem terræ, nimirum 1000 ad 3089, ducatur *e*I: tum id rectangulum excindatur, ut possit promoveri antrorsum retrorsum excurrentibus punctis E, *e* per axem ipsius lineæ sinuum: sint autem F, *f* puncta, in quibus ejus latera secabunt curvam. Exploretur identidem distantia IF, & *ef* circino, donec deprehendantur æquales. Notetur ibi punctum E, vel *e*, & capiatur numerus minutorum contentus in A*e*, vel AE: arcus ipsi respondens erit interceptus in fig. 16 inter punctum A, & locum terræ in ea observatione, qui cum detur ex

dato tempore observationis ipsius, dabitur etiam locus puncti A, & punctum eclipticæ Q, cui respondebit nodus annuli.

152. Demonstratio patet ex eo, quod ita recta FF' debet evadere parallela rectæ *e*I. Nam recta F'*f*F solvens problema debet habere directionem, quam habet ipsa *e*I, & abscindere chordam F*f*, cui respondeant in axe bina loca terræ habentia illud intervallum E*e*. Verum puncta E, *e* ita inventa, erunt tantummodo veris proxima, & adhibenda erit correctio analoga iis, quas proposuimus in scholiis problematis superioris, respondens hypothesi assumptæ rationis velocitatum mediarum.

153. *Schol.* 1. Facilior erit determinatio, si ducantur intra rectangulum plures rectæ parallelæ ipsi *e*I, & inter se proximæ, quarum ope sola inspectione patebit positio rectanguli mobilis exhibens chordam F*f* parallelam iis rectis, vel saltem sola inspectione adducetur rectangulum idem ad positionem proximam debitæ, quod ope circini acquiret determinationem accuratam.

154. *Schol.* 2. Major difficultas oritur ex ignota crassitudine annuli, & e difficultate observandi tempora apparitionum, & disparitionum. Crassitudo quidem videtur censenda esse prorsus insensibilis; nam si ea esset sensibilis, deberet reflectere satis luminis, ut videri posset etiam tum, cum planum annuli obvertitur soli, vel oculo: cum enim reliquæ omnes partes omnium planetarum, & ambæ annuli facies reflectant lumen, quod sensum afficiat; videtur analogia quædam requirere, ut ipsa superficies crassitudinis reflectat satis luminis, nisi sit summæ tenuitatis. Verum etiam obliquitas ingens tam respectu solis, quam respectu oculi sufficit ad hoc, ut lumen reflexum evadat insensibile, unde fit, ut apparitio, & disparitio non fiant in ipso appulsu plani annuli ad solem, vel terram. Porro obliquitas, quæ determinat sensibilem disparitionem, & apparitionem, est diversa pro diversa vi instrumentorum, & oculi, ac diversa constitutione atmosphæræ: inde provenit, ut diversi observatores diversis diebus desinant, vel incipiant videre annulum. Eam ob causam non potest ex observatione satis determinate innotescere tempus transitus plani instrumenti per solem, & oculum.

155. *Adhuc tamen si conferantur inter se plurimæ observationes, potissimum eæ*, quas in posterum Astronomi habere poterunt *majore numero*, licebit saltem conjecturam capere de correctionibus *adhibendis*, & de crassitudine annuli, ac *obliquitate* necessaria *respectu solis*, & *oculi ad* percipiendum lumen annuli instrumentis satis bonis cælo satis sereno. Diversæ suppositiones fieri poterunt obliquitatis requisitæ ad initium, vel finem perceptionis; quæ initio assumi poterit *æqualis pro oculo*, & sole, neglecta prorsus crassitudine reali: tum si ea sola non sufficiat ad inducendum consensum inter calculum dependentem a theoria, & observatione; poterunt adhiberi obliquitates diversæ, altera pro sole, altera *pro oculo*: ac demum si adhuc habeatur dissensus; induci poterunt etiam diversæ positiones crassitudinum ipsius annuli, quarum effectus habentur in solutione problematis V. Pro æstimando effectu obliquitatis respectu solis, & oculi, oportet habere methodum determinandi ex theoria angulum, quem efficit in centro annuli recta inde tendens ad ipsum solem, *vel oculum* in data distantia puncti *primi a sole*, *vel loco* ordinatæ puncti *secundi*. Id autem *sic* facile *præstabitur*.

156. Concipiatur in fig. 16 planum *parallelum plano HKS*, *quod* occurrat plano annuli IKS in recta I*b* parallela KS: sit autem C*a* perpendicularis ipsi I*b*, & S*b* parallela KI occurrat eidem I*b* in *b*: patet, fore S*b* = IK = CH, & I*b* = KS. Cum autem recta SG sit perpendicularis plano *eclipticæ*, *planum* HKS erit ipsi perpendiculare, in quo, cum *jaceat RQ perpendicularis* eorum intersectioni KH, *erit ipsa perpendicularis* ipsi *plano HKS*, adeoque *etiam bS parallela rectis* IK, CH erit perpendicularis tam ipsi eidem HKS, quam plano CI*b* ipsi parallelo. Hinc planum CI*b* erit perpendiculare plano I*b*SK, quorum intersectioni I*b* cum sit perpendicularis recta C*a*, erit ipsa perpendicularis plano annuli IKS, & inclinatio radii solaris ad id planum erit angulus CS*a*, quem oportet invenire.

157. Porro is invenitur admodum facile habitâ CI, & inclinatione plani annuli ad eclipticam, quæ si *dicatur* A, & distantia CS fiat = D, erit CI*a* = HKS = A, tum C*a* = CI × *sin.CIa*

= CI

$= CI \times sin.A$, & sinus anguli quæsiti $CSa = \frac{Ca}{CS} = \frac{CI \times sin.A}{D}$.

158. Eodem pacto invenitur elevatio oculi supra planum annuli datâ *distantiâ IE* puncti primi ab ordinata FE transeunte per locum terræ F. Si concipiatur Ed perpendicularis in bI; ea erit distantia perpendicularis puncti E ab eodem plano, quæ erit æqualis distantiæ perpendiculari puncti F ab eodem: ipsa divisa per distantiam FS Saturni a terra, quæ *dicatur* D', *exhibebit* sinum anguli, quo *recta* SF inclinatur ad planum annuli $= \frac{EI \times sin.A}{D'}$.

159. E contrario assumpta inclinatione rectæ tendentis a sole, vel terra ad centrum *Saturni invenietur CI*, *vel IE*: *si* enim ea *inclinatio dicatur B*, & *distantia Saturni a sole*, vel a terra sit D; erit Ca, vel $Ed = D \times sin.B$, & CI, vel $IE = D \times \frac{sin.B}{sin.A}$. *Porro distantia* Saturni a sole, & a terra invenitur calculo a-stronomico.

160. Hæ formulæ *requirunt inclinationem* plani annuli cognitam; sed *satis est habere ipsam* veræ proximam, utut non accuratam, *ubi agitur de angulo exiguo*, in quo *lumen* reflexum non afficiat oculum ob *nimiam obliquitatem*. Invenitur, ut jam diximus, *inclinatio* plani annuli tam ad eclipticam, quam ad planum orbitæ Saturni, si ex observatione transitus *ejus* plani per solem, & per terram *inveniantur* arcus NP, & NQ, ex quibus, & angulo N, *inveniuntur anguli* NQP, NPQ. Verum inclinatio ad *orbitam* terræ inveniri *potest etiam* ex forma elliptica, sub qua apparet annulus tum, cum *globus Saturni cadit* totus intra illam apparentem ellipsim. In ipsa potissimum ope micrometri *objectivi obtineri potest* ratio axis *majoris ejusdem* ellipseos ad minorem, & facile demonstratur, esse illum ad hunc, ut est radius ad sinum anguli, quo recta linea visualis inclinatur ad id planum.

161. Sit *enim* in fig. 20 recta ST inclinata ad planum circuli ABCD habentis centrum in S, & TP perpendicularis eidem plano: recta vero PS *occurrat* circumferentiæ ejus circuli in B, D, & diameter ASC *sit ipsi* perpendicularis: tum recta ducta per

S in plano DTB perpendicularis ad TS occurrat rectis TD, TB in H, I, & BK sit itidem perpendicularis rectæ TS. Satis patet, rectam CSA perpendicularem intersectioni PS plani circuli cum plano TSP ipsi perpendiculari, & jacentem in illo priore fore perpendicularem huic posteriori, adeoque erit perpendicularis etiam rectæ TS. Hinc si radius circuli sit perquam exiguus respectu distantiæ ST, ut accidit in casu annuli Saturni; semiaxes apparentes definiti ab angulis STC, STI erunt ut SC, SI eorum tangentes ad radium communem TS. Erit autem & BK quam proxime æqualis SI. Porro TSP est angulus, quo recta visualis ST inclinatur ad planum ejus circuli, & est SB, sive SC ad BK, sive SI, ut radius ad sinum anguli KSB, sive TSB, sive TSP. Quamobrem erit radius ad sinum ejus inclinationis, ut semiaxis major ellipseos apparentis ad semiaxem minorem, sive ut axis major ad minorem.

162. Sit jam in fig. 21 terra in T, Saturnus in S, recta SG perpendicularis plano eclipticæ, recta IK intersectio plani annuli cum ecliptica, recta DGH, & ES ipsi parallela, quibus occurrat in I, D, E planum ipsis perpendiculare transiens per T, & in eodem recta TP perpendicularis IE: demum recta TG concipiatur producta indefinite in F. Recta TGF determinabit longitudinem geocentricam Saturni, & recta DGH longitudinem nodi in ecliptica, quarum prior datur dato tempore observationis: hinc si posterior assumatur, ut cognita ex aliis observationibus; habebitur angulus HGF, sive DGT differentia earum longitudinum: erit autem STG latitudo Saturni geocentrica, adeoque habebitur ex tabulis tam SG = ED = TS $\times$ *sin.lat.*, quam TG = TS $\times$ *cos.lat.* Hinc habebitur TD = TG $\times$ *sin.*DGT. Quare habebitur angulus DTE, cujus tangens $\frac{DE}{TD}$. Erit autem TSP inclinatio lineæ visualis TS ad planum annuli, adeoque ex forma ellipseos apparentis ipsius annuli habebitur TP factis, ut axis major ejusdem ad axem minorem, ita TS ad TP. Est autem, assumptâ TE pro radio, ED ad TP, ut sinus DTE ad cosinum ETP. Quare illo dato datur etiam hic, adeoque & ITP eorum

sum-

ſumma, vel differentia, ac TIP inclinatio annuli quæſita, quæ eſt ipſius complementum.

163. Quoniam TD determinatur per ſinum anguli TGD; ſi obſervatio inſtituatur Saturno obtinente diſtantiam a nodis annuli 90 graduum; error conſiderabilis in ejus longitudine aſſumpta non mutabit ad ſenſum magnitudinem ſinus ejus anguli, adeoque valor TD erit quamproxime accuratus: & quidem circa id tempus inclinatio TSP lineæ viſualis erit multo major, & forma ellipſeos multo magis aperta: nam exiſtente puncto G in ipſa linea nodorum plani annuli in ecliptica, id planum tranſit per tellurem, & ellipſis abit in rectam lineam, quæ eo magis aperitur, quo Saturnus magis recedit a nodis. Quamobrem tum etiam error commiſſus in ratione axium ellipſeos apparentis eſt minor reſpectu ipſorum axium. Id tempus eſt maxime idoneum ad eam determinationem ex utroque capite, tum ob aperturam majorem ſemiaxium, tum ob longitudinem nodi idoneam ad determinationem accuratam, licet ipſa ſit non ita parum erronea.

164. Habita inde inclinatione annuli ad planum eclipticæ, ſive angulo Q figuræ 16, poteſt accuratius inveniri arcus NQ ex arcu NP, & angulo N, qui arcus jam alia methodo ſuperius fuerat inventus ope inclinationis plani annuli, & obſervationis tranſitus ejus plani per terram. Ea omnia ita pluribus modis inter ſe connexa ſunt, ut eadem quantitas pluribus methodis obtineri debeat. Id præbet occaſionem adhibendi plures poſitiones inclinationis ſolis, vel oculi ad planum annuli, ut ſupra propoſuimus, quæ faciat evaneſcere ipſius lumen nimis tenue, & ſi libeat, craſſitudinis phyſicæ ipſius annuli, donec obſervationes conformes calculis perficiant ipſam horum omnium theoriam.

165. Ejuſmodi perquiſitio, ut & tota reliqua applicatio eorum, quæ dicta ſunt, indiget plurimis admodum prolixis calculis numericis, quos immani ſane labore perſecutus eſt in ſuo opere Sejourius ſumma cum diligentia, poſt ingentem copiam calculorum pertinentium ad analyſim ſublimem, in quibus ſe ubique prodit Geometram analyticum primi ordinis, ut in applicatione numerorum patientiſſimum calculatorem. Nos hic ſolam theoriam propo-

ſui-

suimus exhibendo solutiones syntheticas, quæ ipsis mediocribus Geometris, & communibus Astronomis aditum aperiant ad hanc etiam Astronomiæ partem, quæ videbatur sine sublimiore analysi pertractari non posse, & applicando numeros necessarios ad percipiendum earum perquisitionum fructum.

APPENDIX.

166. Quoniam solutionem problematum nobis præbuit *linea sinuum*, cujus proprietates necessarias ad hanc rem synthetica itidem methodo initio demonstravimus; addemus hic paucas alias proprietates ipsius, quas promisimus in adnotatione ad numerum 1, & 27: sunt autem determinationes subnormalis, circuli osculatoris, & quadraturæ, itidem elegantes, & quæ simplicissima Geometrica methodo demonstrantur.

De subnormali lineæ sinuum.

167. *Subnormalis lineæ sinuum æquatur dimidiæ ordinatæ respondentis duplæ abscissæ.*

168. Si enim in fig. 4 MI sit normalis, & in fig. 3 OI, GH sint perpendiculares diametro MCm; erit ibi TP : PM :: PM : PI, & hic TM : MO :: MO : OI, ob angulum OMI = OTM, quorum uterque est complementum ejusdem TMO. Quare cum subtangens TP lineæ sinuum sit æqualis tangenti TM circuli (numer. 12), & ordinata PM illius æqualis sinui OM hujus ex ipsa definitione lineæ sinuum; erit subnormalis PI illius æqualis rectæ OI hujus. Porro est in fig. 3 recta OI dimidia GH sinus arcus MAG dupli MA; arcus autem duplus circuli respondet duplæ abscissæ lineæ sinuum, & illius sinus ordinatæ hujus. Quare subnormalis lineæ sinuum æquatur illi dimidiæ ordinatæ, quæ respondet duplæ abscissæ.

169. Inde patet, posse duci tangentem lineæ sinuum jam descriptæ per datum ejus punctum etiam sine ope circuli genitoris. Si id punctum in fig. 4 sit M; ducatur ordinata MP, capiatur PP' = AP, erigatur ordinata P'Q, & secetur bifariam in R:

ca-

capta PI = PR ducatur IM, & ipsi perpendicularis MT, quæ erit tangens quæsita.

DE CIRCULO OSCULATORE EJUSDEM CURVÆ.

170. Radius circuli osculatoris sic facile invenitur (*). Concipiatur in fig. 4 ordinata MP producta usque ad circumferentiam ipsius in K, quam secabit bifariam in L recta ipsi perpendicularis GL ducta ex ejus centro G posito in normali MI. Erit NK ibi, & in fig. 3 $Nm = \frac{FN^2}{MN}$. Cum sit (num. 21) PN figuræ 4 = PN figuræ 3, sive = O*n*, & PM illius æqualis OM hujus; erit MN illius æqualis M*n* hujus; adeoque MN illius ad MN hujus, ut M*n* hujus ad MN, sive ut MO ad MC: pariter EP figuræ 4 erit æqualis arcui FM figuræ 3, pro quo in infinitum imminuto assumi potest sinus FN. Quare erit FN figuræ 4 ad FN figuræ 3, ut ipsa FN figuræ 4 ad suam EP, sive ut FH ad EH, vel ut MT ad PT. Est autem MT ad PT in fig. 4, ut DO ad CD in fig. 3 per num. 16; nam MO *in fig. 3*, & MP in fig. 4 sunt eædem lineæ, *ac ordinata FE in fig.* 1, & 2, ac est per eum numerum tangens *figuræ* 2 ad subtangentem, ut in fig. 1 ED ad CD. *Hinc si pro ratione* N*m figuræ* 3 ad NK figuræ 4 adhibeantur sui valores expressi iisdem litteris $\frac{FN^2}{MN}$; poterunt poni MC, *& MO figuræ 3 pro binis eorum* denominatoribus MN, tum CD^2, DO^2 ejusdem *pro eorum numeratoribus* FN^2, ac fiet N*m* figuræ 3 ad NK figuræ 4, ut in fig. 3 $\frac{CD^2}{MC} = CD$ ad $\frac{DO^2}{MO}$. Porro in fig. 3 evanescente arcu F*f* evadit N*m* = M*m* dupla CD, & in fig. 4 NK

(*) Considerando nimirum FM*f* ut arcum circuli, qui iterum occurrat ordinatæ MP in K. Invenietur ejus chorda MK, cujus valor est $\frac{FN \times Nf}{MN}$, sive $\frac{FN^2}{MN}$. Ea expressio per comparationem *rectarum* FN, *MN hujus figuræ* cum iisdem figuræ primæ exhibebit *valorem chordæ ipsius*, qui evadit accuratus post evanescentiam earum lineolarum. Occursus G rectæ parallelæ basi AB ductæ per punctum L, in quo ea chorda secatur bifariam, cum normali MI erit centrum circuli osculatoris.

NK $=$ MK $=$ 2ML. Igitur evadit CD illius ad ML hujus, ut est in illa CD ad $\frac{DO^2}{MO}$, adeoque ML figuræ 4 evadit $= \frac{DO^2}{MO}$ figuræ 3.

171. En igitur facilem, & elegantem determinationem centri circuli osculatoris. Demissâ in fig. 4 ordinatâ MI, sumatur in fig. 3 arcus AM respondens abscissæ AP figuræ 4, ducaturque sinus MO, & recta OD: sumatur in fig. 4 ML versus P tertia *continue proportionalis post* OM, OD figuræ 3, & ducatur ex L recta parallela AB, quæ occurrat normali MT in G: erit G centrum, GM radius circuli osculatoris quæsiti. Porro ipsa tertia proportionalis invenitur eleganti constructione, facto nimirum angulo ODK in fig. 3 $=$ OMD, & posito puncto K in recta OM producta. Erit enim OM : OD :: OD : OK: adeoque satis erit in fig. 4 assumere ML æqualem OK figuræ 3, & ducere perpendiculum LG.

172. Simplex erit etiam valor ipsius ex arcu AM figuræ 3 $= a$, qui respondet abscissæ AP figuræ 4. Erit in fig. 3 $OM = sin.a$, $CO = cos.a$, $OD^2 = 1 + cos^2.a$, adeoque valor ML figuræ 4 $= \frac{1 + cos^2.a}{sin.a}$. Cum vero sit in fig. 3 $CD = 1$ ad $OD = \surd(1 + cos^2.a)$, ut in fig. 4 TP ad MT, sive $ML = \frac{1 + cos^2.a}{sin.a}$ ad radium osculi MG, erit ejus valor $\frac{(1 + cos^2.a)^{\frac{3}{2}}}{sin.a}$.

173. Reductione simili huic *postremæ facile inveniri potest radius osculi lineæ sinuum jam descriptæ sine ope circuli genitoris*: cum sit MO *figuræ 3* $=$ MP figuræ 4, & in illa CD ad DO, ut in hac TP ad MT, sive MP ad MI, ac CD sit eadem utrobique; poterit poni $\frac{MI \times CD}{MP}$ hujus pro OD illius, & $\frac{MI^2 \times CD^2}{MP^3}$ hujus pro $\frac{DO^2}{MO}$ illius. Quare erit in hac $ML = \frac{MI^2 \times CD^2}{MP^3}$; & cum sit MP : MI :: ML : MG, erit radius osculi $MG = \frac{MI^3}{MP^4} \times CD^2$. Capiatur quinta continue proportionalis post normalem MI, & ordinatam MP, tum tertia post inventam, & CD

ac

Hac habebitur radius osculi. Erit enim illa quinta $= \frac{MP^4}{MI^3}$, qui valor si dicatur B, tertia post B, & CD erit $= \frac{CD^2}{B} = \frac{MI^3}{MP^4} \times CD^2$.

174. In vertice in D evadit MI = MP = CD, adeoque ibi radius osculi $= \frac{CD^5}{CD^4} = CD$, nimirum æqualis radio circuli genitoris: puncto D abeunte versus A, vel B, perpetuo creſcet ipſe radius ultra quoscumque limites, donec in ipſis punctis A, & B, nimirum in punctis flexus contrarii evadat infinitus. Si enim pro $\frac{MI^3}{MP^3}$ figuræ 4 ponatur $\frac{DO^3}{CD^3}$ figuræ 3, & pro PM illius OM hujus; erit radius circuli osculatoris $\frac{DO^3 \times CD^2}{CD^3 \times OM} = \frac{DO^3}{CD \times OM}$. Porro quo magis punctum M recedit a D, eo magis augetur DO, & decreſcit OM, qui ſecundus valor cum decreſcat ultra quoscumque limites, ac demum evaneſcat, ubi M abit in A; augebitur valor radii osculi ultra quoscumque limites, ac demum evadet abſolute infinitus in A, & B.

DE QUADRATURA CURVÆ SINUUM.

175. Adhuc facilius obtinetur quadratura curvæ ſinuum. Sint in fig. 1, & 2 puncta F, f infinite proxima: poterit pro areola FEef figuræ 2 aſſumi $Ee \times EF$, qui valor in fig. 1 eſt $Ff \times EF$. Poſſunt autem ibidem haberi pro ſimilibus triangula FGf, CEF; unde fit $CF : EF :: Ff : Gf = Ee$. Quare erit $Ff \times EF = Ee \times CF$. Cumque id habeat locum in omnibus ejusmodi areolis; erit ſegmentum FAe figuræ 2 $= AE \times CD$ figuræ 1, & area DAC illius $= AC \times CD$ hujus $= AC^2$. Habetur igitur quadratura indefinita areæ terminatæ quavis ordinata, quæ erit æqualis rectangulo contento ſub radio circuli genitoris, & ſinu verſo arcus hujus ipſius, qui reſpondet abſciſſæ, ac area reſpondens ſingulis baſibus quadrantalibus erit æqualis quadrato radii.

176. *Schol.* Sic habetur per Geometriam linearem, & sine calculo algebraico demonstratio simplex præcipuarum proprietatum ejus curvæ. Et hic quidem adhibui quantitates infinitesimas, quibus adeo feliciter Newtonus est usus ubique in suis Principiis, & quæ mirum in modum contrahunt demonstrationes. Edidi jam olim præcipuas omnes proprietates Cycloidis, & Logisticæ demonstratas per Geometriam finitam more veterum sine ullo usu quantitatum infinitesimarum, quod itidem præstiti in meis Elementis sectionum conicarum, in quibus sine ullo usu quantitatum infinitesimalium per solam Euclideam Geometriam determinavi circulum osculatorem pro dato quovis puncto perimetri, & demonstravi ipsius proprietates. Usus infinitesimalium omnia contrahit magis, nec idcirco vim demonstrationis imminuit; nam in primo Tomo meorum Elementorum, & in Dissertatione *De natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum* demonstravi, in eorum usu rite instituto nullum errorem, ne infinitesimum quidem, committi ex ejusmodi quantitatum neglectu (*). Si vita & otium superent, synthetica methodo simili huic, quam hic adhibui, demonstrabo proprietates generaliter pertinentes ad lineas curvas, & præcipua elementa curvarum plurium, quæ sunt magis cognitæ, & quarum usus frequentius occurrit.

(*) Ejus ipsius animadversionis usus obvenit in Opusculo XV Tomi præcedentis IV hujus Collectionis pro determinanda area cujusvis trianguli sphærici æquali rectangulo sub arcu circuli sphæræ maximi metiente excessum summæ trium ejus angulorum supra duos rectos, & radio sphæræ ejusdem.

OPUSCULE II.

SUR LES ÉLÉMENTS DE LA ROTATION DU SOLEIL SUR SON AXE DÉTERMINÉS PAR L'OBSERVATION DE SES TACHES.

PRÉFACE.

1. DÈs l'année *1737* dans une *Dissertation sur les taches du soleil imprimée à Rome j'* avois donné deux méthodes pour la détermination des éléments de sa rotation autour de son axe par trois positions d'une de ses taches, en employant dans la première méthode une construction graphique, & dans la seconde la Trigonométrie plane. A mon premier voyage en France l'année *1760*, j'avois donné à M. de L'Isle cette *seconde méthode appliquée* aussi *à la rotation* de *la* lune *dans un petit Mémoire*, dont M. de La-Lande a fait mention dans son Astronomie, en y exposant cette méthode. Il y a *dit*, *qu' elle* n' avoit pas encore été publiée (*), parcequ' *il* ne con-

(*) C'*est* dans la *première édition de* son Astronomie liv. XX num. 2529 que M. de La-Lande a *exposé* ma méthode en disant, qu' elle n' avoit pas été publiée. Ayant eu connoissance depuis de cette ancienne impression, il en a fait mention dans la seconde édition. Je n' ai pas tenu copie du petit Mémoire donné à M. de l' Isle, qui étoit écrit en latin. M. de La-Lande en a tiré son exposition en françois. Il y a quelques fautes qui se sont glissées dans l' impression de son texte, comme de quelque lettre mise à la place de quelqu' autre en indiquant la figure : il y a dans la figure même quelques lignes qui manquent ; mais on peut y comprendre ma méthode. Ici j' ai fait des changements dans l' ordre de l' exposition, & dans la figure appartenante à cette méthode ; & *j' y* ai fait une très-grande quantité d' additions, même d' autres méthodes, outre l' appliquation du calcul numérique à mes observations faites à Sens l' an *1777*, *comme on verra* dans cette même Préface. Je fis alors cet Opuscule, comme tant d' autres de cette Collection ont été faits depuis bien d' années.

connoiſſoit pas cette ancienne Diſſertation *De maculis ſolaribus*, imprimée ſans mon nom à l' occaſion des thèſes de Mathématique, qu' on ſoutenoit tous les ans au Collége Romain, dont on n' imprimoit qu'un très-petit nombre d'exemplaires. Mais le titre de cette Diſſertation va avec mes autres anciens ouvrages dans un catalogue, qu' on en a imprimé à Veniſe l'année 1761 dans une réimpreſſion de mon Poëme *De ſolis, & lunæ defectibus*, & deux ans après dans une autre de ma *Theoria philoſophiæ naturalis*. J' y ai ajouté depuis une autre ſolution du même problême par la Trigonométrie ſphérique dans un manuſcrit, que j'ai communiqué à quelqu'un de mes amis.

2. Comme on a tant parlé cette année 1777 à Paris des taches du ſoleil, j' ai eu envie d' en faire des obſervations, & d' en tirer les éléments par ma méthode. J' en ai eu une occaſion très-favorable en me trouvant le mois de Septembre chez ſon Éminence M.gr le Cardinal de Luynes dans ſon beau château de Noſlon près de Sens. Son amour pour l' Aſtronomie, dont il eſt ſi grand amateur & protecteur, lui a fait raſſembler dans ce château quantité de bons inſtruments, dont il s' eſt ſervi lui même ſi ſouvent dans les moments de ſon loiſir avec tant de ſuccès pour en exercer la pratique. Cet appareil, & une ſuite de belles journées m' ont déterminé à m' occuper de ces obſervations. J' en ai fait un bon nombre devant ſon Éminence. Mais pour en faire le calcul, j' ai choiſi ſix journées de celles d' une tache, qui étoit bien régulière, & d' une grandeur médiocre de manière, que l' on en pouvoit bien déterminer le centre par le fil du micromètre. En conſidérant mes méthodes anciennes pour la détermination de ſes éléments, j' en ai imaginé une autre plus expéditive, & je me ſuis déterminé à les donner toutes dans cet Opuſcule avec l' application du calcul numérique, & les différents réſultats.

3. L'Opuſcule eſt devenu un peu trop long, parceque j' y ai tout expliqué dans le plus grand détail, & démontré avec la plus grande préciſion, ayant auſſi expoſé dans les exemples tout le calcul en entier. Pour en faire mieux voir le procédé, je les ai réduits en des tables, dans leſquelles on a le total des

opé-

opérations, sans qu'il y ait besoin presque jamais d'autres calculs auxiliaires faits dans d'autres papiers séparés, & j'ai tout suivi, & développé de manière que même les jeunes gens initiés dans les principes de l'Astronomie pratique, à l'aide des seules tables ordinaires des sinus & logarithmes, & de la Connoissance des temps puissent faire les observations de cette espèce & les calculer en suivant mes exemples. A cet effet j'ai expliqué au long & presque par-tout ligne par ligne toutes les opérations de ces tables, dans lesquelles on a en entier tout le calcul appliqué à un bon nombre de combinaisons différentes, & tous les résultats d'autres pareils. Je met ici en abrégé tout le procédé, & les formules: on aura dans cette Préface tout ce qui suffit pour la pratique avec une espèce d'un court extrait de l'Opuscule.

4. Dans le §. I je donne ce qui appartient à la manière d'observer, en déterminant à l'aide d'une pendule, & d'un micromètre filaire la différence en déclinaison, & en ascension droite de la tache au centre du soleil. C'est la manière qu'on employe communément pour comparer les planètes, ou comètes avec les étoiles fixes. J'y ai mis les observations de six journées d'une même tache, qui sont cinq par journée. Dans le §. II (num. 27) je donne la manière, qui est aussi commune, & élémentaire de tirer de ces observations la position géocentrique de la tache, en réduisant en minutes & secondes du grand cercle ces deux différences en déclinaison & ascension droite. Dans le §. III (numer. 37) j'expose la manière de passer de la position géocentrique à l'héliocentrique, en déterminant cette position par rapport au centre du soleil dans la surface d'une sphère, qui a ce centre pour son centre, c'est-à-dire en y déterminant la latitude de la tache, & la différence de sa longitude à celle de la terre, qui est opposée à la longitude géocentrique du soleil, pour en tirer la longitude héliocentrique de la même tache. Dans les deux premiers paragraphes, il n'y a rien de particulier, si ce n'est un certain ordre de dénominations, & de formules commode pour l'exécution du calcul. Le passage à la position héliocentrique dans le §. III est bien simple, & les formules bien cour-

courtes. *Dans le même paragraphe je fais voir la grande multiplication des erreurs*, même des inévitables commises dans la *position géocentrique*, qui se fait en passant à *l'héliocentrique*, ce qui oblige à employer un très-grand nombre d'observations, & de combinaisons, pour avoir quelque chose de satisfaisant dans les résultats.

5. Je passe de-là à la manière de tirer les éléments cherchés de la révolution du soleil sur son axe à l'aide des longitudes, & latitudes héliocentriques déjà calculées. Dans le §.IV (*num.* 44) je propose une méthode bien simple, pour déterminer la longitude des intersections de l'équateur solaire avec l'écliptique à l'aide de deux *latitudes égales*, & *conformes*. Il est aisé de voir, que le cercle, qui *passe par les pôles de l'écliptique*, & de l'équateur, & répond ici au colure des solstices de la sphère géocentrique, passe au milieu entre ces deux positions de la tache, & il est également éloigné des deux intersections cherchées, cette distance étant de trois signes. Ainsi si l'on rencontre *deux latitudes* conformes, & égales; on trouvera aisément ces *intersections*, en prenant le *milieu entre les deux longitudes* correspondantes, & y ajoutant, ou en ôtant trois signes.

6. Si l'on ne trouve par deux latitudes exactement telles, ce qui n'arrivera presque jamais, mais que parmi *plusieurs positions* calculées on ait une diminution de latitude suivie d'une augmentation de la même espèce, ou viceversa, en divisant les positions en deux classes des antérieures, & *des postérieures au maximum* ou minimum, on *pourra prendre une latitude* d'une des deux classes, & *dans* l'autre deux entre lesquelles elle se trouve, ou qui soient peu différentes d'elle, & à l'aide des parties proportionnelles trouver la longitude, qui convient à la latitude correspondante, comme on trouve le sinus d'un angle, qui outre les minutes contient les secondes: alors on reviendra presque au même, comme si l'on avoit trouvé les deux latitudes égales immédiatement par observation: plus on *aura pris* la première latitude éloignée du maximum, ou du minimum, moins il y aura d'erreur, parceque la proportionalité des différences sera

moins

moins inexacte. J'y fais voir encore comment il faut faire pour déterminer, quelle des deux intersections doit être le nœud ascendant, & quelle le descendant.

7. Dans le §. V (num. 53) je donne une méthode pour trouver l'inclinaison de l'équateur solaire à l'écliptique par deux positions de la tache, en supposant le lieu du nœud déjà déterminé. Il y entre la résolution d'un seul triangle plan, dont je tire deux des facteurs d'une *fraction*, qui exprime sa valeur. Le calcul en est très-simple, quoiqu'il paroisse un peu long dans l'exemple que j'en ai donné, parceque je l'ai exposé tout entier détaillé avec la dernière précision.

8. Le §. VI est destiné pour *la méthode de déterminer le temps d'une révolution* entière. J'y fais voir la manière de le déterminer par deux positions quelconques à l'aide de la longitude du nœud, & de l'inclinaison de l'équateur déjà déterminées. Il s'agit seulement des trouver l'angle, qui est fait dans le pôle de l'équateur par les deux cercles de déclinaison, qui vont des deux lieux de la tache à ce pôle: on le trouve à l'aide de deux triangles sphériques: *je fais voir, qu'un seul suffiroit, mais qu'il vaut beaucoup mieux* d'en employer deux: si l'on en calcule six, un pour chacune des six positions, on en tire un *bon nombre de binaires, chacun* propre à la détermination du même *temps total*. J'y fais voir aussi la manière beaucoup meilleure de déterminer ce temps par le retour de la même tache, & d'en tirer alors par deux seules positions *les deux autres éléments cherchés*.

9. Dans le §. VII je donne *les trois méthodes* pour trouver ces deux *éléments* par trois positions employées *toutes les trois* à la fois, en y employant la construction graphique, ou la Trigonométrie plane, où la Trigonométrie sphérique: dans le §. VIII je fais des réflexions sur plusieurs suppositions, sur lesquelles on est obligé d'appuyer la théorie, & qui ont rapport aussi à la nature même de ces taches.

10. Les paragraphes suivants sont employés pour donner les exemples, & exposer au long tout le détail du calcul numérique. Cette diffusion minutieuse est inutile, & doit être trop ennuyeu-

se

se pour ceux, qui sont versés dans la théorie, & dans la pratique de l'Astronomie. C'est pourquoi je mettrai ici en abrégé la méthode, & les formules démontrées dans le cours de l'Opuscule, par la seule inspection desquelles formules confrontées avec les figures on peut aisément exécuter tout ce calcul.

11. Dans la fig. 1 (Tab. IV) RSN est l'écliptique concentrique à la terre T : RAN l'équateur : P, P' leurs pôles : S le centre du disque du soleil projetté sur cette surface : I le lieu de la tache sur ce disque : PS, PIB deux cercles de latitudes : P'SA un de déclinaison : IB', PH deux arcs, qui ont les pôles en P', S, & se terminent à l'arc P'S. On voit aisément, que l'arc P'H est égal à l'arc AS, qui est la déclinaison du soleil ; l'arc PH la mesure de l'angle PSH, l'arc SB' la différence de déclinaison du centre du soleil, & de la tache, IB' la différence en ascension droite dans le parallèle, qui se confond sensiblement avec un arc de grand cercle : l'arc SB la différence en longitude, l'arc IB la latitude de la tache. En faisant marcher la tache sur un fil fixe du micromètre, & amenant le mobile sur l'autre, on a la distance de B' au bord du soleil, qui réduite en secondes du grand cercle, & ôtée de son demi-diamètre tiré de la Connoissance des temps, laisse SB' : cet arc ajouté à la déclinaison du soleil tiré de même de la Connoissance des temps pour le temps de l'observation, ou en étant ôté, laisse la déclinaison de la tache. On tire aussi de la Connoissance des temps la longitude du soleil pour ce temps-là. En marquant le passage de la tache, & des deux bords du soleil par le fil perpendiculaire à ces deux, on a le passage du centre, & sa différence en temps au passage de la tache, qui réduite en secondes, & multipliée par 15 donne B'I en secondes du parallèle, & multipliée encore par le co-sinus de la déclinaison de la tache le donne en secondes du grand cercle : on réduit aussi aisément à l'aide de la Connoissance des temps le temps vrai de l'observation en temps moyen. Par les arcs SB', B'I on trouve l'angle B'SI, & la valeur SI : dans le triangle P'HP on trouve l'arc PH par l'hypothénuse PP' égale à l'inclinaison de l'écliptique, & par le côté P'H égal

égal à la déclinaison du soleil. Alors on a l' angle P'SP mesuré par l' arc PH, & l' angle PSI, par lequel on trouve SIB, & par-là les valeurs SB, BI.

Dans la fig. 2 les points T, S, B, I sont les mêmes, que dans la fig. 1, C est le lieu de la tache sur la surface du soleil dans la ligne TI, CD est perpendiculaire au plan de l' écliptique, DTC la latitude géocentrique de la tache, DSC l' héliocentrique, TSD la différence des longitudes héliocentriques de la tache, & de la terre. On trouve ces deux valeurs à l' aide des valeurs de la position géocentrique par les dénominations, & formules suivantes, & ayant cette différence en longitude, on trouve la longitude absolue héliocentrique de la tache. Dans ces formules, & dans les suivantes il y aura des additions changées en soustractions, & viceversa selon les différentes circonstances, qui font varier aussi les figures.

Dénominations pour la position géocentrique & héliocentrique de la tache.

Distance de la tache au parallèle du limbe du soleil en parties du micrometre . . . . A
Différence en ascension droite de la tache & du centre du soleil en secondes de temps vrai . . . . B
Nombre, qui réduit les parties du micromètre en secondes du grand cercle C
Demi-diamètre apparent du soleil en secondes . . . . R
Déclinaisons du soleil & de la tache . . . . D, D'
Inclinaison de l' écliptique I

Formules.

Fig. 1.

$SB' = R - A \times C$ || $D' = D + SB'$ || $B'I = 15 \times B \times \cos. D'$ ||

$\tan. B'SI = \frac{B'I}{SB'}$ || $\cos. P'SP = \frac{\cos. I}{\cos. D}$ || $SIB = B'SI - P'SP$ ||

$SI = \frac{B'I}{\sin. B'SI}$ || $BI = SI \times \cos. SIB$ || $SB = SI \times \sin. SIB$.

Fig. 2.

$$\textit{sin}.SCI = \frac{SI}{R} \parallel TSC = SCI - SI \parallel \textit{sin}.CSD = \frac{BI \times \textit{sin}.TSC}{SI} \parallel$$

$$\textit{sin}.TSD = \frac{SB \times \textit{sin}.TSC}{SI \times \textit{cos}.CSD}.$$

Pour trouver le nœud.

Fig. 3.

13. Dans la fig. 3, R, N sont les deux interſections de l'équateur solaire avec l'écliptique : P, P' leurs pôles : D, O leurs interſections avec le cercle, *qui passe par* P, P' : C, C' deux positions de la tache, *qui ont les latitudes* BC, B'C' conformes, & égales : N nœud ascendant. On aura $\textit{long}.D = \frac{1}{2}(\textit{long}.B' - \textit{long}.B)$: $\textit{long}.N = \textit{long}.D \pm 3^s$. On a au num. 50 la règle, pour voir, si l'on doit se servir du signe + ou —.

14. Si l'on ne trouve pas la position C', qui *répond en latitude* à la position C, on considérera les *positions* comme partagées en deux classes, *dont une a une diminution*, & l'autre une augmentation continuelle de *latitude* : on en *choisira* dans une des deux classes une, qui en ait dans l'autre deux *peu différentes* de celle-là en latitude : & en se servant des parties proportionnelles. On employera les dénominations & formules suivantes.

Dénominations, & formules.

Longitude des trois *positions* . . . . B, B', B''
Leurs latitudes . . . . C, C', C''

$$X = \frac{(B'' - B')\times(C - C')}{C'' - C'} \parallel L = B' + X \parallel \textit{long}.D = \tfrac{1}{2}(L + B).$$

Pour trouver l'inclinaison de l'équateur.

Fig. 4.

15. Dans la fig. 4 RBB'N est l'écliptique ayant pour centre le centre du soleil S : P son pôle : BC, B'C' deux latitudes inégales : CD, C'D' leurs *sinus* perpendiculaires au plan de l'écliptique : G la rencontre des lignes C'C, D'D : CI parallèle, & égale

le à la DD' : HD', GF parallèles à la RN : C'FD' un plan perpendiculaire à la GF : C'FD' l'angle de l'inclinaison.

Dénominations.

N la longitude du nœud || B, B' les deux longitudes de la tache || BC, B'C' ses latitudes || SD, SD' leurs co-sinus || CD, C'D' leurs sinus.

Formules.

$SD'H = N - B'$ || $DSD' = B' - B$ || $C'I = C'D' - CD$ || $SD'D$ par la résolution du triangle DSD' || $D'GF = SD'D - SD'H$ || $\mathit{cot.}C'FD' = \frac{\mathit{cos.}BC \times \mathit{sin.}DSD' \times \mathit{sin.}D'GF}{C'I \times \mathit{sin.}SD'D}$.

Pour trouver le temps périodique, & synodique.

Fig. 3.

16. PC est le complément de la latitude de la tache : PP' égal à l'inclinaison de l'écliptique : BD la différence en longitude de la tache, & du point D : CM un arc perpendiculaire à PD.

Dénominations.

T *la différence de deux temps moyens des deux positions* C, C' réduite en heures || M *le mouvement autour du pôle de l'équateur solaire réduit* en minutes || T' le temps périodique en jours || T'' le temps synodique || A un an de 365,25 jours.

Formules.

$\mathit{tan.}PM = \mathit{cos.}BD \times \mathit{tan.}PC$ || $P'M = PM \mp PP'$ || $\mathit{tan.}CP'D = \frac{\mathit{sin.}PM \times \mathit{tan.}BD}{\mathit{sin.}P'M}$ || $M = CP'C' = CP'D \pm C'P'D$ || $T' = \frac{900 \times T}{M}$ || $T'' = \frac{A \times T'}{A - T'}$.

Pour trouver les deux premiers éléments en employant trois positions à la fois.

Fig. 5.

17. Dans la fig. 5 BC, B'C', B''C'' sont les trois latitudes, SD, SD', SD'' leurs co-sinus, CD, C'D', C''D'' leurs sinus.

Dénominations.

B, B', B'' trois longitudes || BC, B'C', B''C'' les trois latitudes || BD, B'D', B''D'' leurs sinus || CD, C'D', C''D'' leurs cosinus.

Formules.

DSD' = B' − B || D''SD' = B'' − B' || CI = CD − C'D || C''I' = C''D'' − C'D' || SD'D, SD'D'', SD''D' par la résolution des triangles *DSD', D''SD'* || *D'G* = $\frac{\textit{sin}.\,B'C' \times \textit{cos}.\,BC \times \textit{sin}.\,DSD'}{CI \times \textit{sin}.\,SD'D}$ ||

D'G' = $\frac{\textit{sin}.\,B'C' \times \textit{cos}.\,B''C'' \times \textit{sin}.\,D''SD'}{C''I' \times \textit{sin}.\,SD'D''}$ || GD'G' = SD'D + SD'D'' || D'G'G *par la résolution du* triangle G'D'G || B''SN = SD''D' − *D'G'G.*

La *longitude* du nœud N = B'' + B''SN.

La co-tang. de l'inclin. = $\frac{\textit{cos}.\,B''C'' \times \textit{sin}.\,D''SD' \times \textit{sin}.\,D'G'G}{C''I' \times \textit{sin}.\,SD'D''}$.

18. On peut trouver séparement le logarithme *de la fraction* $\frac{\textit{cos}.\,B''C'' \times \textit{sin}.\,D''SD'}{C''I' \times \textit{sin}.\,SD'D''}$, & *en y ajoutant log. sin.* B'C', on aura *log.* D'G'; en y *ajoutant log. sin.*D'G'G *on aura log. cot. incl.*

19. Il y a après *l'application* du calcul numérique à toutes ces formules, qui commence au paragraphe VII *num. 93, expliqué* avec *tout le* grand détail, que j'ai indiqué ci-dessus. Il est fondé sur les observations de six journées qu'on aura au §. I num. 26, & digeré en plusieurs tables, qu'*on trouve toutes* réunies à *la* fin de l' Opuscule *avant une* Appendice, qui *contient* le journal de toutes *les observations* que j' ai faites à cette *occasion*. Il y aura la répétition de celles, que j' ai mises au premier paragraphe, parceque dans les quatre dernières journées des observations de cette tache, qui est marquée par le numéro 1, elles sont mêlées avec des observations d' autres, & je me suis déterminé à donner ce journal en entier après avoir fini l' Opuscule même. Il y a des particularités intéressantes, que j' y avois indiquées seulement, & je m' en étois servi, en parlant de la cause physique des taches : elles donnent l' exclusion à quelqu' opi-

opinion sur leur origine, & nature. Il y a deux autres journées d'observations de cette même première tache; mais je me suis borné aux six premières pour l'application du calcul aux formules.

§. I.

Observations d'une tache du soleil faites à Noslon près de Sens, chez S. E. M.gr le Cardinal de Luynes au mois de 7.bre 1777.

20. On a employé une machine parallatique, qui avoit une lunette d'environ 30 pouces de longueur, & qui n'étoit pas acromatique, mais tranchoit très-bien l'objet: elle étoit garnie d'un excellent micromètre filaire avec un fil fixe perpendiculaire à trois autres, & à un quatrième mobile. Chaque révolution de la vis étoit subdivisée par un index en 100 parties, tandis qu'un autre marquoit les révolutions entières: on a mesuré le temps avec une excellente pendule à correction reglée sur une très-bonne méridienne vérifiée plusieurs fois. La lenteur du mouvement du soleil autour de son axe rend moins nécessaire la détermination exacte du temps absolu pour chaque observation, n'y ayant un changement d'une seconde dans la position d'une tache, qu'après plusieurs minutes de temps: mais il faut avoir très-exactement les secondes dans le temps de l'arrivée des deux bords du soleil, & de la tache au fil perpendiculaire, pour en tirer la différence de temps, qui donne la différence en ascension droite. Pourtant pour cette différence même il n'y avoit besoin d'aucune réduction pour les minutes, & secondes données par la pendule, qui dans les 24 heures ne différoit du temps vrai, que de quelques secondes. Ainsi en mettant au net les observations de chaque jour, on a réduit seulement le nombre des minutes, en retranchant, ou ajoutant celle, dont la pendule avançoit, ou retardoit à midi. Le ciel a toujours été très-favorable dans le temps des observations.

21. On a observé plusieurs taches, mais ici on mettra seulement

ment (*) *les observations* de la première, pour donner un exemple du calcul, par lequel on peut tirer selon mes méthodes les éléments de la révolution du soleil autour de son axe : mais comme la moindre erreur presqu'insensible dans l'observation en porte une assez grande dans le résultat à cause de la même lenteur du mouvement, & de la petitesse du diamètre apparent du soleil, on ne peut avoir rien de bien exact, que par un très-grand nombre d'observations.

22. On a déterminé la valeur des parties du micromètre, & la position du fil mobile par rapport au fixe central parallèle. On a trouvé, que ces deux fils étoient très-exactement réunis, quand l'index du nombre *des révolutions*, & l'autre des parties de chaque révolution *marquoit zero*. Le 11 7.bre on a fait marcher un bord du soleil en attouchement avec le fil parallèle central fixe, & on a amené le fil mobile à l'autre bord. Un grand nombre d'observations, qui différoient très-peu entr' elles, a donné pour le diamètre apparent du soleil 1237 parties : le *même jour* dans la Connoissance des temps ce même diamètre étoit de 31'. 55" = 1915" : ainsi *pour réduire les parties du* micromètre en secondes du grand cercle, *il faut les multiplier* par $\frac{1915}{1237}$: chaque partie donnera un peu plus d'une seconde, & *demie*.

23. Pour chaque observation on amenoit la tache au fil fixe central, qui en étoit suivi, & le fil mobile au bord boréal du soleil, ce qui donnoit la distance de *la tache* au *parallèle*, qui passoit par ce bord en *parties du micromètre : cette* distance réduite en minutes, & secondes étant ôtée du demi-*diamètre* du soleil, que l'on a dans la Connoissance des temps pour tous les jours, laisse la différence en déclinaison de la tache à celle du centre du soleil, sans avoir besoin de reprendre tous les jours le diamètre entier en parties du micromètre pour en tirer le demi-diamètre, & par son moyen la différence de déclinaison en ces mêmes particules, & en *faire* après la *réduction en* minutes, & secondes.

24. On

(*) A' la suite de l'Opuscule on aura le journal entier de ces observations.

24. On marquoit aussi le moment de l'arrivée des deux bords du soleil, & de la tache au fil fixe perpendiculaire : le milieu entre les temps de l'arrivée des deux bords donne le temps de l'arrivée du centre, & sa différence au temps de l'arrivée de la tache donne la différence de l'ascension droite en temps : celle-ci, multipliée par 15*cos.decl.*, donne en minutes & secondes du grand cercle la distance de la tache au cercle horaire, qui passe par le centre du soleil.

25. On a ici les observations de six différentes journées de beau temps, dans chacune desquelles on a répété l'observation cinq fois pour prendre le milieu entre les différents résultats, qui se sont trouvées peu éloignées entr'eux. La tache étoit bien distin-cte, régulière, & d'une grandeur *médiocre*, *pour pouvoir faire passer le fil* par son milieu.

26. On mettra ici premiérement le jour du mois, & dans la première des cinq lignes consécutives le nombre marqué par les *deux index* pour le fil mobile, qui touchoit le bord boréal, tandis que le fixe passoit par le milieu de la tache ; c'est-à-dire la distance de la *tache au parallèle de ce bord*. On aura dans les trois *suivantes le* temps de l'arrivée des deux bords du soleil, & de la tache au *fil* perpendiculaire : on ajoutera dans la cinquième *la différence du* temps de la tache au milieu arithmétique entre les deux temps des deux bords, que l'on voit facilement d'un coup d'œil. Dans la première, & cinquième ligne on mettra à la fin le *milieu arithmétique* entre les cinq nombres précédents.

12. Sept.

bord boréal...561 ; 555 ; 559 ; 563 ; 559 : milieu 559,4

1 bord..$2^h.59'.9''$	$3^h.6'.42''$	$3^h.10'.32''$	$3^h.14'.27''$	$3^h.22'.3''$
tache..3.0.55	3.8.29	3.12.20	3.16.14	3.23.51
2 bord..3.1.16	3.8.50	3.12.40	3.16.35	3.25.12

Différence.... 42'', 5 ; 43'' ; 44'' ; 43'', 43'', 5 : milieu 43'', 2

13. Sept.

13. Sept.

bord boréal... 526 ; 524 ; 521 ; 527 ; 524 : milieu 524

1 bord..	2h. 33'. 4"	2h. 35'. 44"	2h. 39'. 48"	2h. 42'. 33"	2h. 50'. 11"
tache..	2 . 34 . 41	2 . 37 . 21	2 . 41 . 25	2 . 44 . 11	2 . 51 . 49
2 bord..	2 . 35 . 11	2 . 37 . 52	2 . 41 . 56	2 . 44 . 41	2 . 52 . 21

Différence .... 33",5 ; 33"; 33"; 34"; 33" : milieu 33",3

15. Sept.

bord boréal... 440 ; 440 ; 440 ; 440 ; 440 : milieu 440

1 bord..	3h. 6'. 42"	3h. 14'. 8"	3h. 17'. 45"	3h. 20'. 48"	3h. 34'. 16"
tache..	3 . 7 . 57	3 . 15 . 23	3 . 19 . 0	3 . 22 . 4	3 . 25 . 32
2 bord..	3 . 8 . 50	3 . 16 . 15	3 . 19 . 53	3 . 22 . 56	3 . 26 . 24

Différence .... 11"; 11"; 11"; 12"; 12" : milieu 11",4

16. Sept.

bord boréal... 388 ; 388 ; 389 ; 390 ; 388 : milieu 388,6

1 bord..	3h. 42'. 35"	3h. 45'. 29"	3h. 48'. 22"	3h. 51'. 19"	3h. 54'. 3"
tache..	3 . 43 . 39	3 . 46 . 33	3 . 49 . 25	3 . 52 . 23	3 . 55 . 8
2 bord..	3 . 44 . 43	3 . 47 . 37	3 . 50 . 30	3 . 53 . 27	3 . 56 . 12

Différence .... 0"; 0"; — 1"; 0"; 1" : milieu 0"

17. Sept.

bord boréal... 331 ; 332 ; 334 ; 334 ; 331 : milieu 332,4

1 bord..	3h. 18'. 0"	3h. 24'. 23"	3h. 28'. 12"	3h. 31'. 21"	3h. 35'. 12"
tache..	3 . 18 . 53	3 . 25 . 16	3 . 29 . 6	3 . 32 . 15	3 . 36 . 7
2 bord..	3 . 20 . 7	3 . 26 . 30	3 . 30 . 19	3 . 33 . 29	3 . 37 . 20

Différence ... — 10",5; — 10",5; — 9",5; — 10"; — 9" : milieu — 9",9

19. Sept.

19. Sept.

bord boréal...239 ; 241 ; 240 ; 240 ; 240 : milieu 240

1 bord..	$2^h.34'.26''$	$2^h.37'.14''$	$2^h.41'.51''$	$2^h.43'.47''$	$2^h.46'.43''$
tache..	2 .35. 3	2 .37.50	2 .42.26	2 .44.23	2 .47.19
2 bord..	2 .36.34	2 .39.22	2 .43.59	2 .45.55	2 .48.51

Différence ...— 27''; — 28''; — 29''; — 28''; — 28'' : milieu — 28''

§. II.

Méthode pour en tirer la position géocentrique de la tache.

27. Nous déterminerons ici la latitude de la tache, & la différence de sa longitude à celle du centre du soleil par la méthode, qui est commune en des circonstances pareilles. La fig. 1 est adaptée au cas des observations des trois premières journées, dans lesquelles la tache *étoit plus orientale*, & *plus* boréale que le centre *du soleil, ce centre étant dans un des signes septentrionaux*, comme il *étoit aussi dans les deux autres; mais on y verra aisément ce qu'* il faudra faire dans *tous* les autres cas. Dans cette figure RSN est la moitié boréale de l' écliptique sur la surface d' une sphère concentrique à la terre T, qui passe par le centre du soleil S: RAN *la* moitié de l' équateur: R le commencement du *bélier*: N celui de la balance: P, P' les deux pôles de l' *écliptique* & de l' équateur: PP'O le quart du colure des solstices terminé au commencement de l' écrevisse O: I le lieu de la *tache* rapportée sur cette surface sphérique avec le disque du soleil: PS, PIB deux quarts des cercles de latitude du soleil & de la tache: P'SA un quart du cercle de déclinaison du soleil: PH, IB deux arcs qui ont leurs pôles en S, & P', & sont terminés à ce cercle.

28. On voit bien, que *BI* sera *la latitude* cherchée, SB la différence en longitude, AS la déclinaison du soleil égale à P'H,

 ces

ces arcs étant tous les deux le complément de l' arc P'S : AB' sera la déclinaison de la tache, & SB' sa différence à la déclinaison du soleil ; on trouvera cette dernière à l' aide des nombres de la première des cinq lignes de l' observation, & B'I à l' aide de ceux de la cinquième, en les réduisant en minutes, & secondes du grand cercle par la méthode commune, que nous employerons ici, & en considérant les petits arcs SB', B'I, SI, BI, SB comme des lignes droites à cause de leur petitesse. Les deux triangles SB'I, SBI seront rectangles en B', B, & l' arc SP aussi perpendiculaire à l' écliptique étant considéré dans son origine en S comme une ligne droite parallèle à la IB, donnera l' angle SIB égal à l' alterne ISP = B'SI − P'SP. Or on aura l' angle B'SI par sa tangente $= \frac{B'I}{SB'}$, & on trouvera l' arc *PH*, *qui est* la mesure de l' angle P'SP, dans le triangle sphérique P'HP aussi rectangle en H, ayant PP', qui est la mesure de l' *inclinaison* de l' écliptique, que l' on peut prendre cette année *pour* = 23°. 28', en négligeant la *différence de quelques secondes*, & P'H = SA *déclinaison du soleil ; on en tirera le co-sinus de PH* $= \frac{\cos. PP'}{\cos. P'H}$: on trouvera l' arc SI $= \frac{B'I}{\sin. B'SI}$, & les deux arcs *cherchés* BI $= SI \times \cos. SIB$, $SB = SI \times \sin. SIB$.

29. Pour la réduction des arcs SB', B'I en secondes du grand cercle à l' aide des nombres *de la première*, & dernière de cinq observations, que l' on *nomme* A, & B *ces nombres*, C la fraction $\frac{1915}{1237}$ du num. 22, R le demi-diamètre apparent du *soleil* réduit en secondes, D sa déclinaison, D' celle de la tache : on aura la distance de la tache au bord boréal $= C \times A$, sa distance au parallèle du centre $SB' = R - C \times A$, $B'I = 15 \times B \times \cos. D'$: on connoît les valeurs C, A, & on tire de la Connoissance des temps les valeurs R, D. Ayant trouvé SB' par *les trois premiers*, on l' ajoutera dans les cas de la figure à la *déclinaison* du soleil AS = D pour avoir AB' = D'. Si l' on nomme I l' inclinai-

son de l' écliptique, on aura $cos.PSP' = \frac{cos.I}{cos.D}$, & ayant trouvé B'SI par sa tangente $= \frac{B'I}{SB'}$, on trouvera l' angle SIB $=$ B'SI $-$ P'SP, & les arcs SI $= \frac{SB'}{cos.B'SI}$, BI $=$ SI$\times$*cos.*SIB, SB $=$ SI$\times$*sin.*SIB.

30. On pourroit trouver les arcs SB, BI sans chercher SI; parcequ' ils sont les co-sinus, & sinus de l' angle SIB au même rayon SI, auquel B'I est le sinus de l' angle B'SI. Mais il vaut mieux trouver ici l' arc SI, dont on aura besoin dans le §. suivant pour la réduction de la position géocentrique à l' héliocentrique. Il faudra trouver aussi B'S pour ajouter sa valeur à la déclinaison du soleil D, & par-là avoir D'. Quand le calcul aura donné les logarithmes des trois autres arcs B'I, BI, SB, il ne sera pas nécessaire de trouver leur valeur numérique: les logarithmes seuls des deux premiers suffiront pour trouver le log. de la tangente de l' angle B'SI, & cet angle, & les seuls logarithmes des deux derniers pour la continuation du calcul dans la réduction à la position héliocentrique, & qui doit être employée après à la détermination des éléments de la rotation du soleil sur son axe, qui est le seul objet de ces recherches.

31. On a le temps de l' observation dans les trois lignes du milieu de chaque journée, & on le réduit à l' heure de Paris par la soustraction de 3'. 48" différence de longitude, dont Sens est plus oriental que Paris. L' heure à employer pour la détermination de la déclinaison du soleil, comme aussi pour sa longitude, dont on aura besoin dans le paragraphe suivant, seroit la moyenne arithmétique entre les passages des deux bords du soleil, qui est le temps du passage de son centre S par le cercle horaire PS: mais cette grande exactitude sur l' heure n' y est pas nécessaire (num. 20). On voit bien, que les différentes valeurs fournies dans les reprises des observations fournissent des inégalités irrégulières, qui sont beaucoup plus grandes, que le changement de cette position. Les erreurs de l' observation étant incomparablement plus grandes, que ce changement de position,

il ſuffit de prendre un à-peu-près dans l' heure, pour laquelle on calcule la poſition de la tache. Pour cela ſans ſe gêner à faire les calculs pour chaque obſervation à part, on peut prendre le milieu entre la première heure du premier bord au commencement de la ſeconde des cinq lignes, & de la dernière du ſecond bord à la fin de la quatrième, en employant les derniers nombres de la première, & de la dernière, comme s'il y avoit eu une ſeule obſervation faite à cette *heure-là*: on peut même y négliger deux, ou trois minutes, pour *réduire* ce temps à un nombre d' heures, & dixièmes d' heures juſte, ce qui rend plus facile le calcul numérique de la partie proportionnelle, qu'il faut ajouter *à la longitude du ſoleil*, & ôter à ſa déclinaiſon du midi, pour avoir *celles*, qui *répondent* à l' heure choiſie. La *nature* de ces obſervations rend tout-à-fait inutile une plus grande exactitude dans le calcul. On pourroit bien prendre l' heure du milieu ſans aucun changement, & employer la longitude, & la déclinaiſon du ſoleil du midi ſans autre réduction: *mais comme le* petit calcul néceſſaire pour les réduire à l'heure choiſie, eſt très-court, & facile; *nous le ferons dans les exemples*. Nous réduirons auſſi *le temps vrai au temps moyen à l' aide de la Connoiſſance des temps*: cette réduction influe ſur *la détermination* du temps d' une révolution entière: mais on *pourroit auſſi* la négliger; parceque l'erreur dépendroit, non de la réduction entière de chaque jour; mais de la différence, qui dans peu de jours eſt petite: avec tout cela *je l' employerai* ici pour négliger moins d' objets; mais *je me contenterai auſſi* des minutes, & de leurs dixièmes.

32. Voici l' ordre de ce calcul ſelon le num. 10. On commencera par prendre l' heure du milieu, en retrancher 3'.48'' pour la réduire à l' heure de Paris, & la réduire à un nombre d' heures & dixièmes d' heures juſte. On le réduira en temps moyen. On prendra dans la Connoiſſance des temps la différence diurne de la longitude du ſoleil, & de ſa déclinaiſon, & l' ayant multipliée par le nombre des heures, & dixièmes du temps vrai de l'après midi, & diviſée par 24, on aura la partie proportionnelle:

le : on y écrira dans la ligne suivante après chacune de ces parties proportionnelles la longitude, & la déclinaison du midi : on ajoutera sa partie à la première, on retranchera la sienne de la seconde, & on aura par-là la longitude, & la déclinaison du soleil pour le temps choisi pour celui de l' observation. Dans tout ce calcul il suffit de réduire les secondes de la longitude, & déclinaison en dixièmes de minutes, en négligeant deux ou trois secondes, ce qui ne porte aucune erreur sensible dans les résultats de la recherche. On trouvera $B'S = R - C \times A$ en secondes, & l'ayant réduit en minutes, & leurs dixièmes, on l'ajoutera à la déclinaison du soleil $= D$ pour avoir D': on trouvera le *log.*B'I $=$ *log.*15 $+$ *log.*B $+$ *log.cos.*D': le *log.tan.*B'SI $=$ *log.*B'I $-$ *log.*SB' avec la valeur de cet angle : le *log.cos.*P'SP $=$ *log.cos.*I $-$ *log.cos.*D avec cet angle : SIB $=$ B'SI $-$ P'SP : *log.*SI $=$ *log.*B'I $-$ *log.sin.*B'SI avec sa valeur numérique : *log.*BI $=$ *log.*SI $+$ *log.cos.*SIB : *log.*SB $=$ *log.*SI $+$ *log.sin.*SIB. Dans les angles B'SI, P'SP il suffira de réduire les secondes en dixièmes de minutes.

33. Dans *toutes les observations du paragraphe* I la déclinaison *AB' de la tache est la somme des AS, SB'*; parceque le soleil étoit dans *le sixième signe*, où *sa déclinaison AS est boréale*, & *la tache étoit* plus boréale, que son centre : on fera de même la somme, quand dans les signes méridionaux la déclinaison du soleil sera australe, si la tache se trouve plus australe, que son centre : autrement pour avoir D' on prendra la différence de ces *deux* quantités. L' angle B'SI dans les trois premiers jours *sera oriental* ; puisque la tache y arrive au fil horaire après le centre du soleil : dans le quatrième *il sera zero*, dans les deux autres il sera occidental par la raison contraire, ce qui est indiqué dans la dernière des cinq lignes par le signe — mis avant les nombres : l' angle P'SP dans toutes les six observations sera oriental, comme il est toujours depuis le solstice d' été jusqu' à celui d'hiver. Ainsi dans les trois premiers jours pour avoir l' angle SIB $=$ ISP il faudra prendre la différence des deux B'SI, P'SP, dans les deux derniers la somme ; tandis que dans le quatriè-

trième *il sera* égal au second seul, ce qui épargnera une partie du calcul, l' arc SI étant alors = SB'. Cet angle dans les trois premiers jours sera oriental, l' angle B'SI étant plus grand que P'SP, ce qu' on verra en faisant le calcul : dans les trois autres il sera occidental par la raison contraire, ce qu' il faut remarquer pour ajouter l' arc SB à la longitude du soleil dans le premier cas, & l' en retrancher dans le second, à fin d' avoir la longitude géocentrique de la tache, si l' on veut la déterminer ; ou comme elle est inutile pour la continuation du calcul, cette remarque sera essentielle seulement pour trouver dans le paragraphe suivant la longitude *héliocentrique de la tache* : il faut aussi remarquer, que pendant *tout les six jours la* latitude BI de la tache sera boréale.

34. On peut donner des règles générales pour diriger le calcul ; mais il vaudra beaucoup mieux de faire encore une figure, qui réponde au cas particulier, quand il est trop différent de celui-ci. Voici ces règles.

I. L' arc SB' sera boréal, ou austral, selon que l' on aura trouvé (num.29) la valeur C×A *plus petite*, ou *plus* grande, que R, & l' arc B'I avec *l' angle* P'SI sera *oriental* ou occidental, selon que *la tache arrivera au fil perpendiculaire*, qui représente un arc du cercle horaire, après le centre du *soleil*, ou *avant*.

II. L' angle P'SI sera aigu, & égal à l' angle B'SI ou obtus, & son supplément, selon que l' arc SB' sera boréal ou austral.

III. L'angle P'SP sera oriental depuis le solstice d' été jusqu' à celui d' hiver, occidental dans le reste de l' année.

IV. L' angle PSI sera la différence des deux P'SP, P'SI, ou leur somme, selon que tous les deux seront de la même direction, ou des directions opposées.

V. L' angle SIB sera égal à l' angle PSI, ou son supplément, selon que celui-ci sera aigu ou obtus, & dans le premier cas l' arc BI sera boréal, dans le second austral.

VI. L' arc SB sera oriental, quand l' angle P'SP & l' angle P'SI seront orientaux, & le premier plus grand que le second, comme aussi quand deux de ces trois conditions seront contraires :

tes : il sera occidental, quand une des mêmes conditions ou toutes les trois seront contraires.

35. Nous mettrons ici les dénominations, & les formules pour les avoir réunies ensemble sous un coup d' œil ; mais auparavant nous remarquerons, que l' erreur d' une seule seconde de temps dans le nombre de la ligne cinquième, qui marque la différence de l' ascension droite du centre du soleil, & de la tache en temps, porte l' erreur de 15 secondes du parallèle dans la position de la tache, qui sont toujours plus de $13\frac{1}{2}$ du grand cercle, & vers les équinoxes 15 secondes. Il est très-difficile de ne pas s' y tromper d' une demi-seconde dans le passage par le fil perpendiculaire sur-tout dans celui de la tache par l'irrégularité, qu'il y a presque toujours dans sa figure : une partie du micromètre dans une petite lunette porte une erreur d' une seconde & demie du grand cercle, & on doute souvent de plusieurs parties, sur-tout dans l' attouchement du bord, où l' on ne voit plus le fil, quand il est sorti du disque. On détermineroit mieux l' arc SI par un micromètre objectif, avec lequel on prendroit le diamètre apparent du soleil, & la distance de la tache au bord, qui retranchée du demi-diamètre observé, ou viceversa, donneroit sa distance au centre : mais là aussi l' irrégularité de la tache donneroit toujours occasion à quelque erreur, quand on porte sa seconde image à l' union avec la première du bord. On verra dans le paragraphe suivant combien les erreurs de la position géocentrique sont augmentées à l' excès dans la détermination de la position héliocentrique. Il n' y a d' autre remède à cela, que la multiplication d' un très-grand nombre d' observations pour en prendre le milieu.

36. Voici les dénominations, & les formules.

Les nombres de la ligne première, & dernière . . . A & B

La fraction $\frac{1915}{1237}$, qui a pour log. 0,189799 C

Le demi-diamètre apparent du soleil en secondes . . . . . . R

Les déclinaisons du soleil, & de la tache . . . . . . D & D'

L' inclinaison de l' écliptique = 23°. 28' I

SB'

$$SB' = R - A \times C \parallel D' = D + SB' \parallel B'I = 15 \times B \times cos.D' \parallel$$

$$tan.B'SI = \frac{B'I}{SB'} \parallel cos.P'SP = \frac{cos.I}{cos.D} \parallel SIB = B'SI - P'SP \parallel$$

$$SI = \frac{B'I}{sin.B'SI} \parallel BI = SI \times cos.SIB \parallel SB = SI \times sin.SIB.$$

§. III.

Réduction de la position géocentrique à l' héliocentrique.

37. ON fera cette réduction à l' aide de la fig. 2. Les points T, S, B, I y sont les mêmes, que dans la fig. 1. C est le lieu de la tache sur la ligne droite TI, qui est censée être sur la surface du soleil : ainsi SC en est le rayon. CD est une ligne perpendiculaire au plan de l' écliptique, & pour cela D sera sur la droite TB. On voit bien, que les arcs SI, BI, SB trouvés dans le paragraphe précédent sont la mesure des angles STC, DTC, STD. L' angle DSC a pour mesure la latitude héliocentrique, qui sera de la même dénomination boréale ou australe avec la géocentrique BI. L' angle TSD sera la différence des longitudes héliocentriques de la tache & de la terre, & on voit bien, qu' elle aura la position contraire à la différence des longitudes géocentriques SB, allant à droite, quand celle-ci va à gauche & viceversa ; comme aussi la longitude héliocentrique de la terre sera diamétralement opposée à la géocentrique du soleil : ainsi pour avoir la première il faudra ajouter six signes à la seconde déjà trouvée, selon le num. 10, ou les en retrancher ; & pour avoir la longitude héliocentrique de la tache, après avoir trouvé l' angle TSD de la manière, que nous allons expliquer, il faudra le retrancher de la longitude héliocentrique de la terre, ou l' y ajouter, selon que l' arc SB sera oriental ou occidental.

38. On sait, que la distance de la terre au centre d' une planète est à son demi-diamètre vrai, comme le rayon est au sinus de son demi-diamètre apparent : ainsi R étant le demi-diamètre apparent du soleil, on aura $sin.R = \frac{SC}{TS}$. Or on a cette pro-

por-

portion SC : TS :: *sin*.STC : *sin*.TCS $=$ *sin*.SCI $= \frac{TS \times sin.STC}{SC}$.
En y mettant $\frac{1}{sin.R}$ pour $\frac{TS}{SC}$, & la raison $\frac{SI}{R}$ des petits arcs pour la raison $\frac{sin.STC}{sin.R}$ de leurs sinus, on aura *sin*.SCI $= \frac{SI}{R}$. Ayant trouvé cet angle, on trouvera TSC $=$ SCI $-$ STC $=$ SCI $-$ SI.

39. On a auſsi les deux proportions ſuivantes, *sin*.TCS $= \frac{TS \times sin.STC}{SC}$: *sin*.TSC :: TS : TC $= \frac{SC \times sin.TSC}{sin.STC}$, & (*) SC : TC : : *sin*.CTD : *sin*.CSD $= \frac{TC \times sin.CTD}{SC}$. En mettant pour TC sa valeur on a $\frac{sin.TSC \times sin.CTD}{sin.STC}$, qui par la ſubſtitution de la raison $\frac{BI}{SI}$ des petits arcs à celle de leurs ſinus devient $= \frac{BI \times sin.TSC}{SI}$, ce qui donne la latitude héliocentrique de la tache.

40. On aura TD $=$ TC$\times$*cos*.CTD $= \frac{SC \times sin.TSC \times cos.CTD}{sin.STC}$, & SD $=$ SC$\times$*cos*.CSD. Alors on aura la proportion ſuivante, SD : TD : : *sin*.STD : *sin*.TSD $= \frac{TD \times sin.STD}{SD} = \frac{sin.TSC \times cos.CTD \times sin.STD}{sin.STC \times cos.CSD}$, & en faiſant *cos*.CTD $=$ 1 à cauſe de la petiteſſe de cet angle, & mettant $\frac{SB}{SI}$ pour la raison des ſinus $\frac{sin.STD}{sin.STC}$, on aura la formule pour la différence cherchée de la longitude héliocentrique *sin*.TSD $= \frac{SB \times sin.TSC}{SI \times cos.CSD}$. Ainſi par les valeurs de la poſition géocentrique trouvées dans le paragraphe précédent, on aura à l' aide de quatre formules bien ſimples la poſition héliocentrique. La première donnera l' angle SCI, la ſeconde l' angle TSC : par la troiſième on aura la latitude hé-

(*) Parceque les ſinus des angles CTD, CSD sont $\frac{CD}{TC}$ & $\frac{CD}{SC}$, qui ſont comme SC à TC.

-liocentrique CSD, par la dernière la différence TSD de sa longitude héliocentrique à celle de la terre. Nous mettrons ces formules à la fin de ce paragraphe : on continuera par leur moyen le calcul du paragraphe précédent : mais auparavant nous ferons quelques remarques sur l' énorme augmentation des erreurs commises dans la position géocentrique, quand on passe à l' héliocentrique.

41. Comme on a (num. 39) le sinus de la latitude héliocentrique CSD $= \frac{TC \times sin.CTD}{SC}$, on voit bien, que si son erreur étoit égale à celui de son sinus, elle seroit augmentée dans le rapport de SC à TC, qui est toujours plus grand, que celui de 1 à 207. Car la valeur $\frac{TS}{SC}$ est $= \frac{1}{sin.R}$, qui est celle de la co-sécante de R. Le diamètre apparent du soleil n'arrive jamais à 33': ainsi cette valeur est plus grande que la co-sécante de $16'\frac{1}{2}$, qui est plus grande que 208. Comme TS n' excède TC jamais plus, que d' un seul rayon SC, la valeur $\frac{TC}{SC}$ sera encore plus grande que 207. Or l' erreur de l' angle CSD est encore plus grande que l' erreur de son sinus en raison du rayon à son cosinus, & quand la latitude de la tache est assez grande, il faut encore augmenter l' erreur beaucoup plus : quand elle est seulement de 20 degrés, il y a déjà une augmentation plus grande, que de 6 pour 100. Mais la seule multiplication par 207 fait répondre à chaque erreur d' une seconde dans la latitude géocentrique trois minutes & demie dans l' héliocentrique : ainsi dans le cas du notre micromètre une seule de ses parties, qui (num. 22) répond à $1''\frac{1}{2}$ donne par cette seule augmentation une erreur de presque 5 minutes dans la latitude héliocentrique cherchée. On verra après dans l' application des formules à nos observations, quel danger il y a de trouver les résultats extrémement erronés, si l' on ne prend un grand nombre de déterminations, qui se corrigent mutuellement.

42. La multiplication de l' erreur est très-souvent encore incomparablement plus grande dans la différence de la longitude,

ou

ou par malheur l'observation même est susceptible d'une erreur plus grande (num. 35). L'erreur, que la différence géocentrique STD porte sur le sinus de l'héliocentrique TSD, est augmentée en raison de SD à TD. La ligne TD aussi diffère de la TS moins que par le rayon SC, mais SD est moindre que SC en raison du co-sinus de la latitude héliocentrique SCD au rayon. Ainsi il faut déjà augmenter le nombre 207 par la division du co-sinus de la latitude héliocentrique : mais pour avoir l'erreur de l'angle même il y aura la seconde augmentation par la division de son co-sinus. La latitude n'est jamais excessivement grande, parcequ'on ne voit jamais les taches du soleil bien loin de son équateur : mais la différence de la longitude héliocentrique peut s'approcher quand on veut de l'angle droit, ce qui augmente l'erreur immensement d'avantage. Au commencement, & à la fin de l'apparition, quand la tache est près du bord, l'angle TSD s'approche toujours de l'angle droit ; & peut même y atteindre. La division par le co-sinus, qui alors devient $= 0$, feroit augmenter l'erreur à l'infini. On n'y arrive pas, parceque les formules différentielles, dont dépend la raison de l'erreur du sinus à celle de l'angle, ne sont pas exactes vers le 90 degrés : mais l'augmentation est toujours telle dans ces circonstances, qu'on ne peut pas compter sur cette espèce d'observations. Comme on voit la surface du soleil sur le bord très-obliquement ; la moindre erreur dans la position sur le disque en doit produire une incomparablement plus forte dans la position sur sa surface.

43. Voici les quatre formules pour la réduction de la position géocentrique à l'héliocentrique avec deux règles pour la direction. Les deux premières formules sont préparatoires, la troisième donne la latitude héliocentrique, la quatrième la différence des longitudes de la terre & de la tache, les règles donnent la direction de ces dernières.

$$\sin.SCI = \frac{SI}{R} \parallel TSC = SCI - SI \parallel \sin.CSD = \frac{BI \times \sin.TSC}{SI} \parallel$$

$$\sin.TSD = \frac{SB \times \sin.TSC}{SI \times \cos.CSD}.$$

La *latitude héliocentrique* CSD sera de la même direction que la géocentrique BI.

On retranchera l'angle TSD de la longitude héliocentrique de la terre, ou on l'y ajoutera, selon que l'arc SB sera oriental, ou occidental, pour avoir celle de la tache.

§. IV.

Méthode pour trouver les intersections de l'équateur solaire sur son écliptique.

44. LES éléments de la révolution du soleil sur son axe sont au nombre de trois : la position des intersections de l'équateur solaire avec l'écliptique, leurs inclinaisons mutuelles, & le temps d'une révolution entière. Nous donnerons dans la suite trois méthodes pour les déterminer par trois positions quelconques de la même tache : mais on peut déterminer chaque élément séparement par deux positions seules bien choisies, employées à la fois dans chaque opération : cette méthode est beaucoup moins sujette aux conséquences des grandes erreurs de la position héliocentrique, qui proviennent des plus petites, & même insensibles de l'observation. D'ailleurs elle est beaucoup plus simple, & plus expéditive dans la pratique : ainsi nous commencerons par celle-ci, en déterminant ici le premier de ces trois éléments.

45. A chaque révolution du soleil sur son axe chaque tache pour la moitié de ce temps s'éloigne du pôle boréal de l'écliptique de la sphère héliocentrique, & par l'autre moitié s'en approche, & le maximum & minimum arrivent, quand sa longitude est également éloignée des deux intersections : on a le premier cas, quand l'équateur solaire va au de-là de l'écliptique dans l'hémisphère austral, & le second, quand il est dans le boréal. On voit bien, que c'est une conséquence nécessaire du mouvement de chaque tache parallèle à cet équateur. Ainsi si l'on trouve la longitude de la tache, qui répond à ce maximum, ou minimum ; on trouvera les longitudes des deux intersections cherchées, en y ajoutant trois signes, & en les ôtant : dans le premier cas la première sera celle du nœud ascendant, parceque là l'é-

quateur passera de l'hémisphère austral au boréal ; & dans le second cas le nœud ascendant sera l'autre par la raison opposée.

46. On voit aussi aisément, que ce maximum ou minimum sera toujours au milieu des deux distances égales, qui se trouveront telles, quand les deux latitudes seront égales, & de la même dénomination, toutes les deux boréales, ou toutes les deux australes. Pour en donner la démonstration exacte, soit (fig. 3) P le pôle boréal de l'écliptique solaire RDN : P' celui de son équateur RON : BC, B'C' les deux latitudes égales de la même tache, & conformes en direction : PD le quart de cercle, qui répond au colure de la sphère terrestre en passant par le pôle P', & qui reste dans l'angle CPC' : le même pôle P' restera dans l'arc PD, comme on le voit dans cette figure, quand le demi-cercle RON sera dans l'hémisphère austral, en rencontrant l'arc PD prolongé en O : il restera du côté opposé de P dans l'arc DP prolongé, quand le demi-cercle RON sera dans l'hémisphère boréal, le point O tombant sur le même arc PD : dans le premier cas le nœud ascendant sera N plus avancé que le point D d'un quart de cercle DN, & dans le second R, qui reste plus en arrière.

47. La tache C, qui fait son tour uniforme autour du pôle P' s'éloignera toujours dans le premier cas du point P depuis le départ de la prolongation de l'arc DP dans l'hémisphère, qui n'est pas représenté dans la figure, jusqu'à son arrivée sur l'arc PD, où elle arrivera à son maximum de distance, & dans le second elle s'en approchera, ayant le minimum en arrivant sur cet arc : c'est une propriété de la surface sphérique analogue à celle des distances d'un point quelconque à tous les points d'un cercle, qu'Euclide a démontrée pour la Géometrie plane, & il peut se démontrer de la même manière pour la sphérique.

48. Or dans tous les cas, quand les latitudes BC, B'C' seront égales, & de la même direction, les distances PC, PC' seront aussi égales ; parcequ'on les a en retranchant les latitudes boréales du quart de cercle PB, PB', & en y ajoutant les australes. Ainsi on aura l'égalité aussi des deux triangles CPP', C'PP', qui

ont

19878

ont le côté PP' commun, & les côtés P'C, P'C' égaux. Donc aussi leurs angles en P seront égaux. Ces angles dans le premier cas seront les mêmes que les BPD, B'PD, qui ont pour mesure les arcs BD, B'D, & dans le second en seront les suppléments, d'où résulte pour tous les deux l'égalité des arcs BD, B'D.

49. La figure suppose, que depuis la longitude précédente en B, & la suivante en B', il y a moins d'un demi-cercle, ce qui arrivera toujours parcequ'en ne faisant pas les observations près du bord, l'arc BDB' devra être beaucoup plus petit qu'un demi-cercle. Il ne s'agira plus, que de trouver deux *latitudes* égales, & de la même dénomination. Ce seroit un grand hazard, si l'on en rencontroit, qui fussent exactement telles: mais comme dans chaque révolution, qui dure moins de 26 jours, la tache arrive deux fois à un maximum ou minimum, on trouvera aisément une diminution de latitude suivie d'une augmentation, ou viceversa. En prenant une d'un côté, & deux bien choisies de l'autre, on trouvera par le moyen des parties proportionnelles la longitude, qui répond à une latitude de ce second côté égale à celle qu'on a prise de l'autre premier. La plus à propos pour être choisie d'un côté seroit celle, qui en auroit de l'autre une un peu plus grande, & une autre un peu plus petite: mais on peut employer encore la première plus petite, ou plus grande que toutes les deux autres, si celles-ci ne sont, ni trop éloignées de celle-là, ni trop peu entr'elles. On appellera C la latitude choisie d'un côté, C', C'' les deux de l'autre côté, B'', B' les longitudes des positions qui ont ces dernières latitudes, & que j'appellerai leurs correlatives, L la longitude cherchée, qui de ce côté-ci est la correlative de la latitude $= C$, on trouvera une valeur X par la proportion suivante, $C'' - C' : C - C' :: B'' - B' : X$, & on aura $L = B' + X$.

50. Ayant trouvé les deux longitudes correlatives des latitudes égales, & de la même dénomination, on prendra celle du milieu entr'elles pour le point D, & pour voir si pour trouver le nœud ascendant il faut ajouter ou retrancher trois signes, on prendra une autre latitude, qui déterminera une autre distance au

pôle différente des deux précédentes, ou on se servira de deux latitudes quelconques, qui donnent deux distances différentes au pôle P. Leurs longitudes auront des distances différentes à la longitude du point D : si la distance au pôle P plus grande répond à la longitude moins éloignée, que celle de ce point ; il faut y ajouter trois signes : autrement il faut les en retrancher. On voit d' un coup d' œil, quelle est la longitude moins éloignée, & quelle est la distance au pôle plus grande, sans avoir besoin de la prendre en nombres. Si l' une des deux latitudes est boréale, & l' autre australe ; on voit bien, que l' australe portera la distance plus grande au pôle boréal : si toutes les deux sont boréales ; la distance plus grande répondra à la latitude plus petite : si elles sont australes, on aura tout le contraire.

51. Quand on a une suite d' observations les unes avant les maximum des distances, ou le minimum, & les autres après, ce que l' on voit par le changement de l' augmentation continuelle en diminution, ou viceversa ; on peut avoir pour plusieurs de chacune de ces deux classes la correspondante dans l' autre par l' interpolation, & l' on peut se servir encore des deux de cette autre classe, qui soient toutes les deux plus grandes, ou plus petites que celle, à laquelle on cherche la correspondante, quand elle diffère peu d' une des deux. Ainsi on aura plusieurs déterminations, ce qui est bien nécessaire, pour s' approcher de la véritable valeur, puisque toute l' affaire dépend d' une différence de latitude, qui est bien petite. L' inclinaison étant à-peu-près de 7 degrés & demi, la différence entière de sa latitude depuis R jusqu' à D, ou depuis D jusqu' à N n' est que de 7 degrés, & comme on ne doit pas se servir des positions peu éloignées du bord du soleil, la différence parmi les déterminations, qu' on employera, sera toujours beaucoup plus petite, & les plus petites erreurs dans les observations causent, comme nous l' avons dit, des erreurs de plusieurs minutes dans la latitude. Mais il faut encore éviter d' employer pour le calcul, que nous avons proposé, des observations faites trop près du maximum & du minimum ; parceque les différences de la longitude, & de la latitude

y sont moins proportionnelles, & ces dernières y sont plus petites, ce qui fait un effet beaucoup plus grand pour les erreurs commises dans les mêmes latitudes.

52. On pourroit employer toutes les latitudes à la fois dans une espèce d' interpolation, qui donneroit le maximum, ou minimum, ou toutes celles d' une des deux classes pour trouver la correspondante à chacune de l' autre; mais le calcul seroit incomparablement plus long, & trop pénible, avec peu d' avantage pour l' exactitude. On fera mieux d' employer pour chaque interpolation deux termes seuls, & de multiplier les différentes combinaisons, pour prendre un milieu entre un grand nombre des celles d' une *même tache*, & *l' on fera encore mieux* de se servir d' un grand nombre de *taches suivies le plus qu' on pourra*, même chacune à *différentes* reprises dans le même *jour*, pour avoir à la fin quelque chose, sur quoi l' on puisse compter.

§. V.

Méthode pour déterminer l' inclinaison de l' équateur solaire sur l' écliptique.

53. Nous employerons ici pour cette détermination le lieu d' un des deux nœuds déjà trouvé dans le paragraphe précédent, & deux distances inégales de la tache au pôle de l' écliptique. Dans la fig. 4 le point S est le centre du soleil, les points R, N, P, C, B, C', B' sont les mêmes, que dans la fig. 3; mais la distance PC est plus grande que PC': CD, C'D' sont les deux sinus des latitudes BC, B'C': SD, SD' en sont les co-sinus: G est la rencontre des deux lignes droites D'D, C'C: CI une ligne parallèle & égale à la DD', qui laisse C'I égale à la différence des deux sinus C'D', CD: D'H une ligne droite parallèle à la NR, & GF l' intersection du plan du parallèle de la tache avec le plan de l' écliptique. Comme le plan de ce parallèle passe par les points C, C', la droite CC'G doit être dans ce plan, & *l'* intersection de ce plan avec celui de l' écliptique doit passer par G: la même intersection GF doit être parallèle à la droite RN, qui est l' in-

l' interſection de l' équateur solaire avec la même écliptique, le parallèle de la tache étant parallèle à cet équateur. Enfin F est l' interſection d' un plan perpendiculaire à la ligne GF avec cette ligne menée par la C'D, l' angle C'FD' étant l' inclinaison du plan de ce parallèle à l' écliptique, qui est égal à l' inclinaison cherchée de l' équateur solaire.

54. Or premiérement dans *le triangle* DSD' on aura les deux côtés SD, SD', *qui sont les co-sinus des deux latitudes*, & l' angle DSD', *qui est la différence des deux longitudes*, ce qui *donnera l'angle* SD'D, & la base $DD' = \frac{SD \times sin.DSD'}{sin.SD'D}$. L' angle SD'H. égal à l'alterne NSB' *sera la différence de la seconde longitude*, & de celle du point N *déjà trouvée*. *Par-là* on aura l' angle HD'D, & son alterne $D'GF = SD'D - SD'H$. On aura aussi la proportion suivante $C'I : C'D' :: CI = DD' = \frac{SD \times sin.DSD'}{sin.SD'D} : D'G = \frac{C'D' \times SD \times sin.DSD'}{C'I \times sin.SD'D}$, où à la place de SD on peut écrire *cos.*BC*: de-là* on tire $D'F = D'G \times sin.D'GF = \frac{C'D' \times cos.BC \times sin.DSD' \times sin.D'GF}{C'I \times sin.SD'D}$, & enfin pour l' inclinaiſon *cherchée* $cot.C'FD' = \frac{D'F}{C'D'} = \frac{cos.BC \times sin.DSD' \times sin.D'GF}{C'I \times sin.SD'D}$.

55. Cette formule ne peut pas servir, quand les deux latitudes sont égales entr' elles, parceque les CD, C'D' devenant égales, le terme C'I devïent = o, & le point G s' en va à l' infini, l' angle *D'GF* avec son sinus devenant aussi = o. La valeur de *la* formule reste finie, mais on ne peut pas la déterminer : le problême reste alors indéterminé par lui même. Il faut éviter *aussi les binaires*, dans lesquels *les latitudes*, & même les *longitudes* seront trop peu différentes entr' elles, comme encore on ne pourra pas se fier aux déterminations, dans lesquelles on aura *trouvé l'angle* D'GF trop petit. Du reste le calcul sera très-facile. *On écrira dans trois lignes les longitudes* du nœud N, & des deux *positions* B', B *de la tache* : on soustraira la seconde de la premiére, & la troisième de la seconde, pour avoir dans

les deux suivantes les angles SD'H, & DSD', dans la sixième on mettra son supplément, dans la septième la moitié de ce supplément, qui est la demi-somme des angles SDD', SD'D. Dans la seconde colonne, on mettra les deux latitudes, leurs co-sinus, qui sont les côtés SD, SD', leur somme, & leur différence, comme aussi les sinus CD, C'D', & leur différence, qui sera C'I. Dans la troisième on mettra la première somme, & différence, & la demi-somme trouvée des deux angles du triangle DSD', avec le complément logarithmique de la première, le logarithme de la seconde, & celui de la tangente de la troisième. Leur somme donnera le logarithme de la tangente de la différence des mêmes angles, qu'on ajoutera à la demi-somme, ou on l'en retranchera, selon que la première latitude plus petite, ou plus grande que la seconde, aura donné le sinus CD plus grand, ou plus petit que le SD', ce qui donnera l'angle SD'D : on en retranchera le SD'H déja trouvé pour avoir D'GF. Alors on aura les cinq termes de la dernière formule de la co-tangente de l'inclinaison cherchée, que l'on trouvera aisément par les logarithmes des trois, du dénominateur, avec les compléments logarithmiques des deux du dénominateur.

56. Dans tout ce calcul on peut toujours négliger les secondes, à cause de la grande incertitude des longitudes, & latitudes, qui en sont la base. Pour la C'I il faut prendre les sinus des latitudes au rayon = 1 pour rendre son logarithme homologue à celui du côté SD, à la place du quel on a substitué dans la dernière formule *cos*.BC. Si l'angle SD'D venoit moindre que l'angle SD'H ; cela ne troubleroit pas le calcul : la figure seroit un peu changée, comme aussi si BC étoit plus grande que B'C', mais cela seroit sans conséquence pour le dernier résultat. Nous finirons ce paragraphe comme les autres par les dénominations & formules.

Dénominations.

N la longitude du nœud || B, B' les deux longitudes de la tache || BC, B'C' ses latitudes || SD, SD' leurs co-sinus || CD, C'D' leurs sinus.

For-

Formules.

$SD'H = N - B'$ || $DSD' = B' - B$ || $C'I = C'D' - CD$ || $SD'D$ par la résolution du triangle DSD' || $D'GF = SD'D - SD'H$ || $cot.C'FD' = \frac{cos.BC \times sin.DSD' \times sin.D'GF}{C'I \times sin.SD'D}$.

§. VI.

Méthode pour trouver le temps de la révolution avec une autre méthode pour en tirer le second élément.

57. On pourra employer pour cette détermination deux positions quelconques de la tache, avec la longitude trouvée du point D. Dans le triangle sphérique (fig. 3) PCP' on a le côté PP', qui est la mesure de l'inclinaison trouvée dans le paragraphe précédent, & la distance PC = 90° ∓ lat. On y trouvera l'angle en P, qui dans le cas exprimé dans la figure, où P' tombe dans l'arc PD est la différence de deux longitudes des points D, & B, la première étant trouvée dans le §. III, & la seconde dans le §. II : on en tirera l'angle CP'P, & son supplément CP'D. Mais si dans le §. III on trouve, que le pôle P' va dans l'arc DP prolongé ; l'angle CPP' sera le supplément de la différence des longitudes, & l'angle CP'P le même que CPD. On trouvera de même C'P'D. L'angle CP'C' sera la somme de ces deux angles, ou leur différence, selon que le point D tombera entre les deux points B, ou du même côté par rapport à tous les deux, ce qu'on verra aisément en comparant les deux longitudes de la tache avec celle du point D. Ainsi on aura cet angle.

58. Ayant trouvé dans le §. II. le temps moyen de chaque position calculée, on prendra la différence des deux temps, qui répondent aux deux positions choisies, & on employera la proportion suivante, comme l'angle CP'C' est à 360°, ainsi cette différence de temps est au temps cherché d'une révolution entière.

59. On trouvera aisément l'angle BPD, si l'on conçoit l'arc CM perpendiculaire à l'arc PD. Comme BD est la mesure de

l'angle CPD, & PC est le complément de la latitude BC, on aura dans le triangle rectangle CPM le côté PM par la formule $tan.PM = cos.BD \times tan.PC = cos.BD \times cot.BC$: on en tirera P'M $= PM \mp PP'$, en employant le signe — dans le premier cas, qui est celui du point P' dans l'arc PD, & + dans le second opposé; alors on aura $tan.CP'M = \frac{sin.PM \times tan.BD}{sin.P'M}$.

60. On pourroit déterminer le temps total encore par une seule position de la tache, si l'on détermine le temps de son arrivée au cercle PD, comme on en a déterminé la longitude dans le paragraphe IV. Alors cette arrivée tiendroit la place d'une seconde position. Ayant calculé l'angle CPD pour une seule position C, on aura cette proportion, comme cet angle est à 360°, ainsi l'intervalle du temps de la position C au temps de cette arrivée au cercle PD est au temps cherché de la révolution totale : mais il vaut mieux d'en employer deux pour éviter l'erreur, que l'on commet dans la détermination du temps de cette arrivée. Il y a très-souvent une autre raison de cette préférence : c'est qu'en employant deux positions on peut avoir un intervalle de temps plus long, comme quand il y a des positions antérieures & postérieures à la même arrivée. Plus le temps écoulé entre les deux positions sera long, moins le résultat sera fautif, puisque l'erreur s'y multiplie en raison de ce temps à celui d'une révolution entière. Ainsi il faut absolument renoncer à l'usage au moins des positions éloignées entr'elles d'une seule journée : on ne pourra pas se fier même au résultat de plusieurs jours, si l'on ne prend le milieu entre un très-grand nombre de déterminations données non seulement par les différentes observations d'une tache, mais aussi de plusieurs.

61. On déterminera beaucoup mieux le temps d'une révolution, si l'on reconnoît une tache après son départ da l'hémisphère apparent, & son retour, ce qui arrive quelque-fois. Alors on peut avoir pour premier terme de la proportion 360° + CP'C', & pour le troisième un temps plus long que celui, que l'on cherche, ce qui au contraire diminuera les erreurs.

62. Par

62. Par le retour de la tache on peut déterminer le temps de la révolution entière indépendamment de l'inclinaison de l'équateur solaire mesurée par l' arc PP', dont nous avons fait usage dans la première méthode, & alors on peut en tirer ce même élément à l'aide des deux positions quelconques de la tache. Dans l'une & l'autre apparition on peut trouver au moins à l'aide des parties proportionnelles les temps d'un binaire de positions, qui auront les distances au pôle de l'écliptique égales : on aura le temps d'une de ces deux positions, & on trouvera le temps de l'*autre* par le même calcul fait sur les différences des temps, par lequel on a trouvé (num. 42) sa longitude. Le milieu arithmétique entre ces deux temps donne *le moment de l'arrivée à l'arc PD*. *Les deux arrivées à cet arc dans les deux apparitions donneront l'intervalle d'une révolution entière indépendamment de l'arc PP'.*

63. Ce temps une fois trouvé, on trouvera l' angle CP'C' compris entre deux positions quelconques de la même apparition *par la proportion suivante*, comme ce temps total est au temps écoulé depuis la première position jusqu'à la seconde, ainsi 360° sont à cet angle. *On trouvera dans le triangle* CPC' la base CC', *& l'angle PCC', puisqu'on y a les deux côtés* PC, PC' *compléments des deux latitudes, & l'angle* CPC' *différence des deux longitudes*. Si l'on conçoit l'arc P'I perpendiculaire à la base du triangle isocèle CP'C', qui en sera coupée par le milieu avec l'angle P'; on aura dans le triangle rectangle P'IC l' angle en P', avec le côté *CI*, qui sont les moitiés de l'angle CP'C', & de la base CC'. On y trouvera l'arc P'C, & l'angle P'CI : la *différence de celui-ci à l'angle* PCC' *déjà trouvé* donnera l'angle PCP', qui avec les deux côtés CP, CP' donnera l'arc PP', mesure de l'inclinaison cherchée, & l'angle CPP' différence en longitude des points D, B, ou son supplément, ce qui fera connoître la longitude du point D, & celle du nœud. Ainsi on aura *les deux éléments cherchés par deux positions à l'aide de trois triangles sphériques* CPC', CP'I, PCP'.

64. Si l' angle *PCP'* venoit trop petit ; il faudroit se servir du triangle PC'P', dans *lequel* on auroit de la même manière les cô-

tés

tés C'P, C'P', & l'angle PC'P' différence des deux PC'C, P'C'I. L'arc P'C donne la distance au pôle de l'équateur solaire, qui est le complément d'une espèce de déclinaison correlative à la latitude géographique. On peut trouver l'angle CP'P, qui est le supplément du CP'D, ou lui-même : alors on aura une espèce d'ascension droite, qu'avoit la tache à un temps donné par rapport au nœud ascendant, puisque le colure PP'D est éloigné dans l'équateur solaire de même, que dans son écliptique des deux nœuds de 90 degrés. Ainsi on peut voir, si une tache revient au même point de la surface du soleil après quelque temps.

65. Si sur la surface du soleil il y avoit un point fixe reconnoissable ; on pourroit s'en servir pour y établir une espèce de premier méridien, ce qui serviroit beaucoup mieux pour reconnoître les points, dans lesquels il y a eu des taches. Au défaut de cette espèce de points, on pourra se servir du temps d'une révolution entière. On divisera le temps passé depuis la première apparition à la seconde par ce temps d'une révolution entière. Le reste donnera l'arc de l'équateur solaire, par lequel le lieu de la tache doit être plus avancé dans le temps de la seconde apparition par rapport au même nœud : pour le trouver on aura cette proportion, comme le temps d'une révolution entière est à ce reste, ainsi 360° sont à l'arc cherché. On verra, si la tache a la même distance au pôle, & si l'arc de l'équateur, par lequel elle est plus avancée par rapport au même nœud, ou par rapport au point D, est celui, qu'on a trouvé. Mais pour se fier à ce calcul, il faut bien avoir le temps déterminé après un grand nombre de retours de plusieurs taches, sur-tout si l'on cherche le lieu de la tache après un bon nombre de révolutions : après une seule révolution on peut s'en servir pour s'assurer de l'identité de la tache, & corriger le temps trouvé à-peu-près : parceque la même distance au pôle, & la position, qui répond à-peu-près à ce calcul, feront voir, que la tache est la même.

66. Le temps de la révolution, que nous avons trouvé, est celui de la révolution par rapport au premier point du bélier, & puisque celui-ci a une petite rétrogradation annuelle, il est né-

ces-

cessaire d' employer une correction à ce temps pour le réduire à celui d' une révolution par rapport aux étoiles fixes, qui est la révolution périodique absolue : on peut le faire aisément, mais c' est si peu de chose, que l' on n' aura jamais le temps cherché assuré dans des limites aussi étroites. Il y a la révolution relative à la position de la terre, qu' on peut appeller révolution synodique, & qui surpasse la première en temps de plus de deux jours : les positions, que nous observons immédiatement, dépendent de ce temps, & on le trouve par la proportion suivante, *comme l' excès d' une année sur le temps de la révolution, que l' on a trouvé dans ce paragraphe, est à une année, ainsi ce même temps est à celui de la révolution synodique* (*).

§. VII.

(*) En appliquant au paragraphe XII le calcul numérique à la détermination du temps périodique & synodique, j' ai fait réflexion, qu' on pouvoit simplifier les opérations en réduisant encore la méthode proposée dans ce paragraphe en dénominations, & formules, comme je l' ai fait pour tout le reste. J' avois mis cela dans ce paragraphe ; mais il sera mieux placé ici, & pour ne pas changer l' ordre des numéros, & des citations je le mets dans une note. Quand on a trouvé l' angle en P', *qui est le mouvement angulaire* autour du pôle de l' équateur entre une position observée d' une tache & une autre, ou entre cette position & l' arrivée calculée à l' arc P'D, avec le temps moyen y employé, on aura le temps périodique, qui doit être le terme quatrième *proportionnel* après ce mouvement, les 360 degrés, & ce temps.

Or si l' on appelle T ce temps réduit en heures, M ce mouvement réduit en minutes, T' ce temps périodique réduit en heures, en réduisant aussi les 360 degrés en minutes, on aura cette proportion, $M : 360 \times 60 :: T : T' = \frac{360 \times 60 T}{M}$. On le réduira en jours, si l' on le divise par $24 = 4 \times 6$, ce qui donnera $\frac{900 T}{M}$. Voici donc les dénominations, & formules.

Dénominations.

T la différence des deux temps moyens de deux positions de la tache réduite en heures || M le mouvement angulaire autour du pôle de l' équateur solaire réduit en minutes || T' le temps périodique en jours || T'' le temps synodique || A un an de 365,25 jours.

Formules ... Fig. 3.

$BD = long.D - long.C$ || $tan.PM = cos.BD \times cot.BC$ || $P'M = PM \mp PP'$ || $tan.CP'D = \frac{sin.PM \times tan.BD}{sin.P'M}$ || $M = CP'C' = CP'D \pm C'P'D$ || $T' = \frac{900 T}{M}$ || $T'' = \frac{A \times T'}{A - T'}$.

§. VII.

Méthode pour trouver les deux premiers éléments par trois positions quelconques de la même tache.

67. Nous donnerons trois de ces méthodes, dont les deux premières ont été déjà publiées à Rome (not. num. 1) dans une Dissertation *De maculis solaribus*, que j' ai imprimée en 1737. La première employe une construction graphique suffisante pour un sujet, qui a les données si incertaines, la seconde fait usage de la Trigonométrie plane, la troisième de la sphérique.

68. Pour les deux premières on considérera la fig. 5. S est le centre du soleil, comme dans la fig. 4, P le pôle de l' écliptique RBN : RN son intersection avec l' équateur solaire : C, C', C'' les trois lieux de la tache : BC, B'C', B''C'' ses latitudes : CD, C'D', C''D'' leurs sinus : CI, C''I' les différences du second aux deux autres coupées par les droites C'I, C'I' parallèles, & égales aux deux D'D, D'D'' : G, G' sont les rencontres des lignes CC', DD', & C''C', D''D' : D''H est une ligne parallèle à la NR : C''FD'' un plan perpendiculaire à la droite G'G. La figure est adaptée au cas, qu' on trouvera parmi les résultats de nos observations tirés du §. II, où toutes les trois longitudes sont entre les deux nœuds, toutes les trois latitudes boréales, & la seconde la plus petite, la troisième la plus grande; mais elle peut s' adapter à tous les cas.

69. On voit bien, que GG' sera l' intersection du plan de l' écliptique avec le plan du parallèle, qui passe par C, C', C'', puisque les lignes CC'G, C''C'G' sont dans ce second plan, & terminées au premier. L' angle C''FD'' sera l' inclinaison de ces deux plans, qui est égal à l' inclinaison cherchée de l' équateur solaire à l' écliptique. En déterminant la position de la GG', & cet angle, on aura les deux premiers éléments cherchés. On peut les trouver aisément par la construction suivante.

70. Ayant fait (fig. 6) un cercle du centre S avec un rayon d' une grandeur suffisante, qui représentera l' écliptique de la figure

re précédente, on prendra sur sa circonférence un point pour le premier point du bélier, en y portant avec la même ouverture du compas les autres signes de deux en deux. On y prendra les points B, B', B'', qui répondent aux trois longitudes de la tache, & trois arcs BC, B'C', B''C'' des trois latitudes: on tirera les trois lignes CD, C'D', C''D'' perpendiculaires aux trois rayons SB, SB', SB'', les DA, D'E perpendiculaires à la DD', & égales aux deux premières CD, C'D', & les D'E', D''A' perpendiculaires à la D'D'', & égales aux deux dernières C'D', C''D'': on prolongera les lignes AE, DD', & les lignes A'E', D''D' jusqu'à leurs rencontres en G, G', & on tirera le diamètre RSN parallèle à la G'G. On prendra sur la D''S prolongée, s'il le faut, la D''F égale à la distance perpendiculaire du point D'' à la droite G'G, & on tirera la C''F. Les points R, N seront les lieux des nœuds, & l'angle F l'inclinaison cherchée.

71. On en voit aisément la raison en comparant les figures 5 & 6. *Les triangles* AGD, A'G'D'' dans la fig. 6 sont les mêmes, que les CGD, C''G'D'' *de la fig.* 5 tournés autour des côtés DG, D''G', & posés sur *le plan de l'écliptique* avec *la* ligne C'D', qui ira avec eux dans la *fig.* 6 en *D'E, D'E'*; parceque *les points* B, B', B'', C, C', C'', D, *D'*, D'' y *sont les mêmes*, *les angles* en *D, D', D''* droits, & les lignes DA, D'E, & *D'E'*, D''A' *de la fig.* 6 égales aux lignes DC, D'C', D''C'' de toutes les deux. Ainsi la droite GG' y sera la même avec le diamètre RSN, qui lui est parallèle. La ligne D''F de la fig. 6 sera égale à la D''F de la 5, & on la trouve aisément en fixant une des pointes du compas en D'', & ouvrant celui-ci de manière, que l'autre pointe tournée touche la droite GG' sans déborder: on porte alors cette ouverture en D''F. Le sinus D''C'' étant le même dans les deux figures, l'angle F y sera égal, & donnera l'inclinaison cherchée.

72. On trouvera aisément les distances des points B, B', B'' à un des signes marqués à l'aide d'un rapporteur, & encore mieux, en employant pour rayon du cercle 1000 parties d'une échelle, & en prenant les cordes des mêmes distances, que l'on trouve dans les tables des cordes, ou en doublant les sinus de la moitié

 de

de chaque distance. Par ce second moyen on peut aisément avoir les arcs à peu de minutes près : par le même moyen on prendra les latitudes, & on trouvera les longitudes des points N, R, comme aussi l'angle F à l'aide d'un arc du même rayon tracé entre ses côtés du centre F. On saura aisément, quel des deux nœuds est l'ascendant, comme au num. 50. Ici, où il y a trois positions de la tache, il y en aura nécessairement deux différemment éloignées du pôle P de la fig. 5; avec des distances en longitude du point D, qui reste au milieu entre les points R, N, aussi inégales. Si la distance au pôle de la position plus éloignée de ce milieu est la plus grande, le nœud ascendant sera celui, qui vient dans l'ordre des signes après le point D : si elle est la plus petite, ce sera l'autre.

73. On peut simplifier beaucoup la construction par un petit calcul numérique très-simple, qui la rendra aussi plus exacte : on prendra dans les tables les trois sinus des latitudes au rayon = 1000 : on soustraira le second des deux extrêmes, ce qui donnera dans la fig. 5 les deux CI, C''I' : on prendra sur l'échelle les DD', D''D' en millièmes du rayon, & on aura $D'G = \frac{C'D' \times DD'}{CI}$, & $D'G' = \frac{C'D' \times D''D'}{C''I'}$. On les portera sur la fig. 6 en D'G, D'G', ce qui donnera tout de suite la GG', & le diamètre RN. On prendra sur la même échelle la distance perpendiculaire du point D'' à cette ligne, qui sera la valeur de la D''F de la fig. 5, & cette distance divisée par D''C'' donnera la co-tangente de l'inclinaison C''FD''.

74. Si l'on veut faire tout par le calcul, ce qui vaudra beaucoup mieux, on le fera bien aisément par la résolution de trois triangles plans D'SD, D'SD'', GD'G', qui fourniront les angles SD'D, SD'D'', SD''D', D'G'G à employer avec les sinus, & les co-sinus des latitudes BC, B''C'', dans des formules très-simples, qui donneront immédiatement la longitude du nœud N par sa différence à la longitude de la position C'' déterminée en B'', & l'inclinaison de l'orbite par sa co-tangente, qui exige une formule plus simple que sa tangente. Pour la résolution du triangle

D'D

SD'D on aura les deux côtés SD, SD' co-sinus des latitudes BC, B'C' de la première & seconde position avec l'angle BSB' différence des leurs longitudes, d'où l'on tirera l'angle SD'D. De même les co-sinus SD'', SD' des latitudes B''C'', B'C' de la troisième & seconde position avec la différence B''SB' de leurs longitudes donneront la résolution du triangle D'SD'', d'où l'on tirera les angles SD'D'', SD''D'. La somme des deux angles trouvés DD'S, D''D'S donnera l'angle DD'D'', qui est égal à GD'G' dans le cas *exprimé par la figure*, que nous aurons ici, où les trois *latitudes seront de la même dénomination*, & la seconde la plus *petite de toutes les trois*.

75. Pour la résolution du triangle GD'G' outre cet angle en D' on aura les deux côtés D'G, D'G' par les expressions trouvées (num. 73) $\frac{C'D' \times DD'}{CI}$, & $\frac{C'D' \times D''D'}{C''I'}$, où l'on aura les différences CI, C''I' des sinus des deux premières, & des deux dernières *latitudes* avec les bases DD', D''D' des deux premiers triangles résolus, qui *donneront leurs* valeurs par les co-sinus SD, SD'' des latitudes extrêmes *employés dans leurs résolutions*, & par les *angles y trouvés*, c'est-à-dire $DD' = \frac{SD \times sin.DSD'}{sin.SD'D}$, $D''D' = \frac{SD'' \times sin.D''SD'}{sin.SD'D''}$: ces valeurs multipliées par $\frac{C'D'}{CI} = \frac{sin.B'C'}{CI}$, & $\frac{C'D'}{C''I'} = \frac{sin.B'C'}{C''I'}$ donneront leurs valeurs, qu'on trouvera parmi les *formules à la fin de ce numéro*. Alors on trouvera l'angle D'GG' = D'D''H, qui donnera l'*angle* B''SN = SD''H = SD''D' − D'D''H = SD''D' − D'G'G pour avoir la longitude du nœud *N par la somme de cet angle*, & de la longitude de la troisième *position* C'' marquée en B''. Pour l'inclinaison C''FD'' sa co-tangente est $\frac{D''F}{C''D''} = \frac{D''G' \times sin.D'G'G}{C''D''}$: on a la valeur D''G' par la proportion *suivante* C''I' : C''D'' :: I'C' = D''D' : D''G' = $\frac{C''D'' \times D''D'}{C''I'} = \frac{C''D'' \times cos.B''C'' \times sin.D''SD'}{C''I' \times sin.SD'D''}$: En substituant cet-

 te

te valeur pour $D'G'$, le sinus $C''D''$ s' en va, & reste à la fin $cot.incl. = \frac{cos.B''C'' \times sin.D''SD' \times sin.D'G'G}{C''I' \times sin.SD'D''}$. On mettra ici toutes ces formules dans l' ordre commode pour le calcul. Elles s' appliqueront immédiatement au cas, que nous aurons ici : pour les autres cas il y aura des changements relatifs à la transformation des lieux géometriques, dont j' ai détaillé les loix bien au long après mes Sections Coniques. Une figure dessinée au moins grossiérement pour chaque cas particulier guidera le calcul sans danger de se tromper.

Dénominations.

B, B', B'' les trois longitudes || BC, $B'C'$, $B''C''$ les trois latitudes || CD, $C'D'$, $C''D''$ leurs sinus || SD, SD', SD'' leurs cosinus.

Formules.

$DSD' = B' - B$ || $D''SD' = B'' - B'$ || $CI = CD - C'D'$ || $C''I' = C''D'' - C'D'$ || $SD'D$, $SD'D''$, $SD''D'$ par la *résolution* des triangles DSD', $D''SD'$ || $D'G = \frac{sin.B'C' \times cos.BC \times sin.DSD'}{CI \times sin.SD'D}$ ||

$D'G' = \frac{sin.B'C' \times cos.B''C'' \times sin.D''SD'}{C''I' \times sin.SD'D''}$ || $GD'G' = SD'D + SD'D''$ || $D'G'G$ par la résolution du triangle $G'D'G$ || $B''SN = SD''D' - D'G'G$.

La longitude du nœud $N = B'' + B''SN$.

La co-tang. de l' inclin. $= \frac{cos.B''C'' \times sin.D''SD' \times sin.D'G'G}{C''I' \times sin.SD'D''}$ (*).

76. On pourra aussi tirer les deux mêmes éléments de ces trois positions à l'aide de la Trignométrie sphérique de la manière suivante. Dans la fig. 7 les points P, R, N, C, C', C'', B, B', B''

(*) Si l' on conçoit une ligne $D'F'$ perpendiculaire à la $G'G$, avec une autr $C'F'$, on aura $D'F' = D'G' \times sin.D'G'G$, & la même co-tangente $= \frac{D'F'}{C'D'} = \frac{D'G' \times sin.D'G'G}{sin.B'C'}$, qui en substituant pour $D'G'$ sa valeur trouvée dans le te devient $= \frac{cos.B''C'' \times sin.D''SD' \times sin.D'G'G}{C''I' \times sin.SD'D''}$.

B', B'' sont les mêmes, que dans la fig. 5, & P', D les mêmes, que dans la fig. 3 : P'E, P'E' sont deux arcs perpendiculaires aux bases CC', C'C'' des triangles isocèles CP'C', C'P'C'', qui en seront coupées par le milieu : ces arcs sont des arcs du grand cercle, comme aussi CC'', EE'.

77. Dans les triangles CPC', C'PC'', CPC'' on a les côtés PC, PC', PC'' par les latitudes, & les angles en P par les longitudes. On y trouvera les bases CC', C'C'', CC'', & les angles PC'C, PC'C'', PC''C'. La somme des deux premiers donne l'angle CC'C'', & les moitiés des deux bases les côtés C'E, C'E' du triangle EC'E', dans lequel on trouvera la base EE', & les angles C'EE', C'E'E, qui sont les compléments des angles P'EE', P'E'E. Ainsi dans le triangle EP'E' on aura la base EE', & les deux angles en E, & E', ce qui donnera le côté P'E'. Alors dans le triangle rectangle P'E'C'' on aura les deux côtés P'E', E'C'' = C'E', ce qui donnera la base P'C'', & l'angle P'C''E'. La différence de cet angle à l'angle P'C''C' donnera l'angle PC''P', qui avec les côtés PC'', P'C'' donnera l'angle C''PP', & le côté PP'. Celui-ci est la mesure de l'inclinaison cherchée, & l'autre donnera la différence des longitudes des points B'', D, par laquelle sachant celle de B'' on saura l'autre de D : en y ajoutant & en ôtant 3 signes, on parviendra à la longitude de deux nœuds.

78. Pour le temps de la révolution on trouvera dans le triangle CP'C'' isocèle l'angle CP'C'' par la base CC'' déjà trouvée, avec les côtés P'C, P'C'' : on employera la proportion suivante, comme cet angle est à 360°, ainsi le temps écoulé depuis la première jusqu'à la dernière position est au temps cherché de la révolution entière. Ainsi on aura tous les trois éléments par la résolution de 8 triangles sphériques CPC', C'PC'', CPC'', EC'E', EP'E', P'C''E', PC''P', CP'C''.

79. On pourroit un peu abréger l'opération en se passant de la base CC'', & de l'angle PC''C'. On trouveroit dans le triangle P'E'C', qui est égal au triangle P'E'C'', l'angle P'C'E' : celui-ci avec l'angle PC'C'' donneroit l'angle PC'P', & le triangle

PC'P'

PC'P' par les côtés PC' , P'C' avec l'angle en P feroit la même chose, que le triangle PC''P' : il faudra bien préférer cette maniè-re, quand la position du milieu sera plus éloignée du point D, que la troisième : mais si elle s'y trouve un peu plus près ; la petitesse de l'angle PC'P' fera préférer l'autre, ou le triangle PCP' , auquel on pourroit arriver de la même manière, qu'au triangle PC''P'. Mais on ne doit jamais se servir de cette méthode, qui exige la résolution de tant de triangles sphériques, quand on peut parvenir au même but par la seconde de la Trigonométrie plane, qui est beaucoup plus simple, & facile pour l'exécution, ou même employer la construction, qui comme je l'ai dit ci-dessus, est assez propre pour une recherche appuyée sur des fondements si incertains.

80. Dans les deux méthodes de la construction graphique, & de la Trigonométrie plane après qu'on aura déterminé les deux premiers éléments, il faudra déterminer le temps d'une *révolution* entière ou par l'usage de la Trigonométrie *sphérique*, comme au commencement du paragraphe VI, ou beaucoup mieux par le retour de la tache *à la même position par* rapport au même colure, comme dans le *num*. 64.

81. Après avoir exposé au long la manière de faire les observations, & détaillé tant de méthodes pour les employer *à la* détermination des éléments de la révolution du soleil sur son axe, je passerai à donner des exemples sur des observations, que j'ai mises à la fin du premier paragraphe; mais je ne puis pas y employer le retour de la même tache après une révolution entière, & je ne ferai pas le très-long calcul de la dernière *méthode*. Avant cette application des nombres aux formules je dirai deux mots dans le paragraphe suivant sur deux suppositions, que j'avois faites, pour parvenir à ces formules, & qu'on fait ordinairement dans cette recherche.

§. VIII.

§. VIII.

Réflexions sur quelques suppositions, qu'on a fait dans les paragraphes précédents.

82. ON a fait deux suppositions dans les paragraphes précédents, qui ne sont ni démontrées, ni bien sûres. La première est, que les taches sont sur la surface même du soleil, pas élévées au dessus à quelque distance, la seconde, que la même tache dans tout le temps de son apparition reste à la même place par rapport à cette surface sans un mouvement respectif. Sur la première on a fondé (num. 38) la valeur $sin.R = \frac{SC}{ST}$; sur la seconde l'égalité de toutes les distances de la même tache au pôle de l'équateur, & l'uniformité de son mouvement angulaire autour du même pôle, & on a fait usage par-tout de ces mêmes propriétés.

83. Le P. Scheiner, qui a été le premier à découvrir les taches du soleil, ou au moins à en donner la théorie au long avec un très-grand nombre d'observations dans son grand Ouvrage, qui a pour titre *Rosa Ursina*, affirme que selon toutes les apparences les taches ou sont sur la surface même du soleil, ou à une distance tout-à-fait insensible : mais *Volfius* avec plusieurs autres prétend prouver, qu'il y a des taches bien élévées sur la surface, & pour le prouver il rapporte l'observation d'une tache, qui est revenue, & qui a été vue pendant 12 jours, & cachée pendant 15. L'inégalité de ces deux temps ne prouve rien ; parcequ'il peut arriver sur le soleil, comme sur la terre. Dans le temps que celle-ci ne répond pas à un des deux nœuds de l'équateur solaire, les cercles décrits par les taches, qui lui sont parallèles, ne sont pas coupés en deux parties égales par le cercle, qui termine le disque apparent du soleil, & qui répond à l'horizon terrestre rapporté aux parallèles du mouvement diurne. Si on regardoit la terre du soleil vers le solstice d'hiver, on verroit Paris pendant 8 heures, & il seroit caché pendant 16.

l'in-

L' inclinaiſon de l' équateur du ſoleil ſur l' écliptique étant plus petite, que celle de l' écliptique ſur notre équateur terreſtre, l' inégalité devroit être moindre ; mais il doit y en avoir.

84. Il y a de plus, qu' on voit très-difficilement la tache dans l' extrémité du diſque, parcequ' alors elle devient très-mince à cauſe de ſon épaiſſeur inſenſible & de ſon obliquité très-grande: la très-grande obliquité, que la ſurface du ſoleil a ſur le bord du diſque, fait que la tache reſte long-temps très-peu éloignée du bord, en ſe dérobant à la vue : *elle avance moins* que de 13 degrés par jour, & le ſinus verſe de 13°, qui détermine la diſtance du bord du diſque, n' eſt que de $\frac{28}{1000}$ du rayon. Tout cela porte une différence conſidérable du temps de l' apparition, & diſparition de la même tache : mais dans les cas de 12 & de 15 jours on voit bien, que l' inégalité ne vient pas de la diſtance ; puiſque le total eſt de 27 jours, tandis que généralement *la révolution* entière par rapport à la terre eſt encore *plus longue*, que de 27 jours. Dans une élévation ſenſible ſur la ſurface le mouvement de ſon *atmoſphère doit être plutôt* plus lent, que moins.

85. *Si* l' on pouvoit déterminer avec aſſez d' exactitude les poſitions géocentriques de la tache : on pourroit *décider la queſtion* par quatre de ces poſitions : on en tireroit quatre éléments de la révolution autour de l' axe, c' eſt-à-dire les trois déterminés ci-deſſus par trois poſitions, & la diſtance de la tache au centre du ſoleil : mais la ſolution directe de ce *problême ſeroit* trop *élévée*, & preſqu' *impraticable* ; parceque ſans ſuppoſer *la diſtance* de la tache au centre du ſoleil, on ne peut pas faire la réduction des poſitions géocentriques aux héliocentriques. Le meilleur parti ſeroit de ſuppoſer $\frac{SC}{TS} = \sin.R$, de réduire les poſitions géocentriques aux héliocentriques dans cette ſuppoſition, & trouver les trois éléments de la manière que nous avons *détaillée* dans les paragraphes ſupérieurs : alors on verroit *aiſément*, ſi la quatrième poſition répond aux éléments trouvés, par leſquels on pour-

roit

roit trouver l' arc de l' équateur, qu' elle auroit dû parcourir dans l' intervalle du temps écoulé entre cette position, & une des trois employées : on compareroit cet arc avec celui, qui résulteroit des positions calculées, & si l' on les trouvoit conformes, on sauroit que la supposition faite étoit juste : autrement on feroit $\frac{SC}{TS}$ égal au sinus d' un autre angle un peu plus grand que R, & on referoit tout le calcul, pour avoir une autre différence entre les arcs de l' équateur, que l' on devoit trouver égaux : la règle des fausses positions donneroit la valeur de l' angle, qu' il faudroit employer pour avoir cette égalité. La distance de la tache au centre du soleil seroit à son rayon comme cet angle à l' angle R.

86. Mais cette méthode ne peut pas servir à cause de la grande augmentation des erreurs les plus petites commises dans la position géocentrique, quand on passe à l' héliocentrique : cette augmentation donneroit toujours une différence considérable dans la quatrième position, même quand la tache réellement ne seroit point éloignée de la surface. Ainsi je ne vois pas d' autre manière de décider cette question, que de voir après un très-grand nombre d' observations faites sur différentes taches, si la supposition de la valeur $\frac{SC}{TS} = sin.R$ donne moins d' inégalités, que la supposition d' une distance plus grande, qui donneroit une valeur plus grande pour cette fraction. C' est un article, que la susdite multiplication excessive de l' erreur de l' observation rend beaucoup plus embarrassante, que l' on ne croiroit d'abord.

87. Pour l' autre article de l' immobilité de la tache par rapport au même point de la surface du soleil, il y a le même embarras. S' il n' y avoit toujours de l' incertitude dans les éléments tirés des observations de la même tache ; on auroit un argument pour cette immobilité tiré de l' accord exact des mêmes résultats donnés par un très-grand nombre d' observations d' un très-grand nombre de taches : mais comme on n'aura jamais cet accord, & on en restera bien persuadé par l'exemple même, que nous don-

nerons ; il n' y aura , que quelque probabilité tirée de plusieurs sommes bien nombreuses , qui auroient donné chacune à part le même résultat moyen , que les autres . Mais cette même probabilité sera toujours très-foible , & disparoîtra encore tout-à-fait, s'il s'agit d'une immobilité totale.

88. Si les taches du soleil étoient analogues à nos nuages , elles pourroient aller en avant , en arrière entraînées par un mouvement de l' atmosphère du soleil analogue à nos vents : alors le résultat moyen seroit toujours le même , parceque dans un grand nombre de combinaisons fortuites il y auroit une compensation des erreurs , qui en proviendroient . Il y a de plus l' insensibilité des mouvements de cette espèce à cause de l' immensité de la distance . Le rayon de la terre porté sur le soleil y paroîtroit sous un angle de $8'' \frac{1}{2}$, qui est sa parallaxe horizontale , & il est de 1432 lieues à 25 par degré . Ainsi une seconde de la surface du soleil au milieu de son disque où on la voit perpendiculairement , y prend le nombre de lieues $\frac{14320}{85} = 168$. Or nos nuages généralement ne font pas tant de voyage avant de se dissiper .

89. J' ai vu quelque fois la surface du soleil couverte comme d' un brouillard plus épais , avec des intervalles plus lumineux , comme si c' étoit des trous , & ce sont peut-être les *faculæ* , que l' on trouve énoncées par le P. Scheiner , & que je n' ai jamais observées . Cette espèce de brouillard favoriseroit l' opinion , qui envisage les taches du soleil comme des nuages de son atmosphère : elles y ont encore la forme analogue en ce , que vers le bord du soleil , où on les voit très-obliquement , elles paroissent bien minces avec la longueur , qu' elles avoient vers le milieu du disque ; cela arriveroit de même à nos nuages , qui quand un grand pays en est tout couvert , ont une grande étendue en longueur , & largeur , mais sont fort peu épais en élévation . Nous voyons les taches du soleil paroître au milieu de son disque , se réunir , se déchirer , se dissiper , comme nos nuages . Cependant il y a une différence très-grande dans la forme : on y voit ordinairement avec des lunettes , qui grossissent beaucoup , & tran-

chent

chent bien l' objet, un noyau ayant les bords bien distinctement terminés, mais avec une quantité de petits points noirs, qui entourent ce noyau de tous côtés à une distance considérable, ce qui n' arrive pas à nos nuages.

90. Il y a des personnes, qui envisagent les taches du soleil, comme des scories, qui surnagent sur une surface comme d' un métal fondu. Alors elles seroient sur la surface même, mais elles y pourroient bien avoir un mouvement respectif par rapport à cette surface, ce qui troubleroit également les résultats fondés sur leur immobilité.

91. Quelqu' un a été d' avis, que le soleil est un grand océan enflammé; mais qu' il y a dedans des masses opaques, qui tantôt s' enfoncent dans ce fluide lumineux, tantôt surnagent sur sa surface: alors ces masses pourroient bien changer de situation, & aller d' une partie de la surface à une autre sensiblement éloignée. D' autres croyent que le soleil est une masse solide opaque, qui a ses inégalités; mais qu' il est couvert d' un fluide lumineux, qui tantôt s' élève, tantôt se baisse, comme par une espèce de marée irrégulière, & qui dans ce second cas laisse à découvert des sommets de montagnes. Alors les mêmes taches resteroient toujours à la même place. La division, & la réunion proviendroient du haussement, ou baissement du fluide, qui laisseroit à découvert plus ou moins de la partie solide obscure. Mais même dans ces dernierès observations j' ai vu des phénomènes contraires à cette idée (*); parceque j' ai vu disparoître des taches moindres à côté de plus grandes, sans aucune diminution apparente, ou changement de celles-ci, & dans le même temps, ou peu après en paroître d' autres dans une distance, & position diffé-

 rente

(*) Ce, qu' on verra dans le journal des observations ajouté à cet Opuscule pour le jour 22 Sept., paroît bien décisif contre cette opinion: on y commence par dire, *la seconde tache étoit aussi disparue, & il y en avoit une nouvelle vers le bord oriental* (de la plus grande), *qu' on voyoit bien avec la petite lunette*. Cette tache nouvelle, qu' on ne voyoit pas avant, quand on voyoit l' autre de l' autre côté de la même plus grande, auroit dû appartenir à un sommet de montagne moins élévé, que l' autre, qui alors auroit formé une tache

rente de celle des précédentes. Dans l' abaissement, & haussement du fluide lumineux ce seroient les mêmes parties plus élévées, qui deviendroient des taches nouvelles, ou redeviendroient couvertes de manière à faire disparoître celles, qu' on avoit vu auparavant; les dernières taches disparues seroient toujours les premières à reparoître, & viceversa.

92. J' ai fait cette espèce de digression sur la nature physique des taches, en faisant voir combien la théorie même, que l' on employe ordinairement, en dépend, & comment on pourroit se servir de la même théorie, pour avoir des idées sur leur nature par leur position élévée au dessus de la surface du soleil, ou placée sur la surface même, & alors aussi ou permanente par rapport à elle, ou variée par un mouvement respectif. Dans plusieurs de mes ouvrages je les ai envisagées comme une espèce de nuages solaires, quoique j' y voyois la grande différence du bord tranché & de cette foule de petits points noirs qui les environnent, & qui fait, qu' à présent je ne sais pas à quoi m' en tenir. Je suis bien fâché, que l'incertitude occasionnée par la grande multiplication des erreurs, qui se fait, quand on passe de la position géocentrique déterminée par les observations immédiates à la position héliocentrique correlative, ne permet pas de s' assurer sur les deux objets, que j' ai indiqués. Mais il est temps de voir le progrès du calcul appliqué aux observations du premier paragraphe selon les formules des paragraphes suivants.

§. IX.

---

tache, parceque le fluide lumineux n' auroit pas arrivé à la couvrir: le même fluide élévé après par-dessus de celle-là jusqu' à la faire disparoître ne pouvoit pas se trouver au dessous de cette autre, qui étant plus basse n' auroit pas pu rester à découvert sur la forme d' une tache. J' ai vu très-souvent des changements de cette espèce, qu' on ne peut pas absolument concilier avec cette hypothèse des parties élévées devenues taches par l' abaissement d' un fluide lumineux, qui les laisse à découvert.

§. IX.

Application des nombres aux formules proposées relativement aux observations du §. I pour la position géocentrique, & héliocentrique de la tache.

93. Je donnerai les exemples de cette application dans plusieurs tables qu' on trouvera toutes réunies à la fin de cet Opuscule avant une *Appendice*, comme je l'ai dit dans la Préface. Il y a *dans ces tables* la forme de tous les calculs numériques de manière, qu' on puisse en faire aisément d' autres de la même forme sans avoir besoin presque jamais d' employer d' autres papiers pour des opérations séparées. Parmi tous ceux, qui ont le même procédé, je n' en donnerai qu' un seul en détail avec le dernier résultat des autres pour prendre le milieu parmi plusieurs déterminations.

94. Je me suis servi des tables des sinus, qui les ont seulement pour les degrés & minutes, dont j' ai négligé très-souvent les fractions, sans pousser l'*exactitude* au de-là de ce que l' objet de la recherche exigoit. Dans l'usage des logarithmes j'ai toujours employé pour les diviseurs le complément arithmétique pour réduire tout à la seule addition, & dans ces cas-là j'ai mis selon ma coutume un point avant la quantité, dont je devois prendre le complément logarithmique, & sur la caractéristique de celui-ci j'ai mis une petite ligne.

95. Dans la première table on a le calcul pour tirer la position *géocentrique*, & *héliocentrique* de la tache, qui répond à la première des six journées d'observations du num. 26 correlativement au §. I, & II en faisant usage des formules, qu'on trouve à la fin de chacun d'eux, & à ce que j'ai dit au num. 32. La première colonne de cette table est employée à trouver l'heure du milieu, & la longitude, & la déclinaison du soleil. Dans les deux premières *lignes* on a le temps premier, & dernier de ceux, qui sont marqués au num. 26 : dans le troisième le milieu arithmétique entre ces deux temps, que l'on voit aisément d'un coup d'œil : dans

la

la quatrième la différence de longitude en temps entre Sens, & Paris, qui ôtée de la troisième ligne laisse dans la cinquième le temps réduit à l' heure de Paris, pour lequel je détermine après la longitude, & la déclinaison du soleil, & auquel on doit appliquer l' équation du temps, quand on veut avoir le temps moyen, comme je l' ai fait, & on le verra ci-après.

96. La seconde partie de cette colonne est employée pour avoir la longitude du soleil, pour laquelle opération & pour la suivante je me suis servi de ses longitudes marquées avec les déclinaisons dans la Connoissance de temps. On la trouve en ajoutant à la longitude du midi la partie proportionnelle, qui répond à l'heure choisie pour celle de l'observation. Dans la première ligne on a la différence de cette longitude pour l'intervalle de 24 heures depuis le midi du 12 jusqu'à celui du 13 : dans la seconde les heures après midi avec leurs dixièmes, que l' on tire de la dernière ligne de la première partie, en réduisant les minutes en ces dixièmes à raison de six pour une, & négligeant le surplus, ou suppléant à l' ordinaire ce qui manque, quand pour avoir une autre dixième y manque moins de 3. Dans cette table on a 3,1 pour les $3^h. 8'. 22''$. On y a après en trois lignes la multiplication de ces deux nombres, le produit étant dans la cinquième : comme il faut le diviser par 24, on le divise par 6 à la sixième, & par 4 à la septième, ce qui donne la partie proportionnelle 7', 6 à ajouter à la longitude du midi, que l'on a à la huitième. Leur somme donne à la neuvième la longitude du soleil $5^s. 20^\circ. 6'$, 1 pour le temps vrai réduit en heure, & leurs dixièmes.

97. La troisième partie de la même colonne est employée de même pour la déclinaison. La différence pour les 24 heures est de 23', 0, qui multipliée par 3, 1 donne 71', 30, & divisée par 6, & 4 laisse la partie proportionnelle 3', 0 : mais comme la déclinaison alloit en diminuant, je l' ai soustraite de la déclinaison du midi $3^\circ. 58'$, 5 pour avoir à la dernière ligne la déclinaison $3^\circ. 55'$, 5, qui répond à ces mêmes 3^h, 1 après midi.

98. Les deux colonnes suivantes sont employées pour détermi-

ner

ner la position géocentrique, & héliocentrique de la tache à l'aide des formules, que l'on a à la fin des paragraphes II & III au num. *36* & 43. On se servira par-tout des logarithmes des nombres des sinus & tangentes, que l'on mettra dans la même ligne après la quantité, à laquelle ils appartiennent, suivie de plusieurs points : on tirera des tables imprimées ces logarithmes pour les quantités, que l'on connoît, & au contraire les quantités cherchées par les logarithmes trouvés à l'aide des formules.

99. La première partie de la seconde colonne est employée à trouver la différence SB' (fig. 1) en déclinaison de la tache, & du centre du soleil en secondes du grand cercle. La formule (numér. *36.*) étoit SB' = R — A×C. La première ligne a le logarithme de C, que l'on a parmi les dénominations du même numéro, où il est = 0, 189799 : la seconde le nombre A des parties du micromètre, que l'on trouve à la fin de la première des 5 lignes de chaque journée au num. *26* avec son longarithme, ce nombre pour cette première journée étoit 559,4, & on a tiré son logarithme des tables communes : la somme de ces deux logarithmes donne à la troisième ligne le logarithme de la valeur A×C avec son nombre, qui est celui des parties du micromètre réduit en secondes du grand cercle : à la quatrième on a la valeur R du demi-diamètre apparent du soleil tirée pour ce jour de la Connoissance des temps en minutes, secondes & leurs dixièmes : à la cinquième la même réduite en secondes, en ayant retranché la valeur A×C de la troisieme ligne, on a mis à la sixième le reste, qui est la valeur de la ligne SB' = R — A×C.

100. On a mis dans cette ligne un point avant SB' avec son complément logarithmique après, qui est indiqué par la petite ligne mise sur la caractéristique : c'est pour s'en servir dans la quatrième formule $tan. B'SI = \frac{B'I}{SB'}$, qui a besoin pour le diviseur de ce complément, mais avant il falloit trouver la valeur du numérateur B'I. Pour cet objet, on a à la première ligne de la seconde partie de cette colonne la valeur D, déclinaison du soleil tirée de la dernière ligne de la première colonne : à la seconde il y

il y a la valeur de la SB' réduite en minutes & leurs dixièmes : à la troisième la déclinaison de la tache, qui est leur somme. On doit prendre la somme dans tous les calculs correlatifs à celui-ci, qu'on doit faire pour les cinq autres journées, parceque la déclinaison du centre a été toujours boréale, & la tache plus boréale, que le centre. Cela appartient à la seconde formule D' = D + SB'. On y ajoute le logarithme du co-sinus de D' pour la troisième formule $B'I = 15 \times B \times cos.D'$: pour cela à la quatrième ligne il y a 15 avec son logarithme, & à la cinquième la valeur B, qui est 43'',2 différence en ascension droite tirée de la fin de la cinquième ligne des observations appartenantes à la première des six journées du num. 26, avec son logarithme. La somme de ces trois logarithmes donne à la sixième ligne le logarithme de B'I : la somme de celui-ci avec le complément du logarithme de SB', qui se trouve à la fin de la première partie de cette colonne, donne à la dernière ligne de la même colonne le logarithme de la tangente de l'angle B'SI selon la quatrième formule $tan.B'SI = \frac{B'I}{SB'}$: on en tire cet angle de la table des sinus.

101. Dans la troisième partie de cette colonne on a le calcul de la cinquième formule $cos.P'SP = \frac{cos.I}{cos.D}$. A' la première ligne il y a la valeur I de l'inclinaison de l'écliptique = 23°. 28' avec le logarithme de son co-sinus, à la seconde la valeur D de la déclinaison du soleil déjà employée à la première ligne de la seconde partie, avec le complément logarithmique de son co-sinus indiqué par le point mis avant *cos.*, & par la petite ligne sur la caractéristique. La somme de ces deux donne à la troisième ligne le logarithme du co-sinus de P'SP, que l'on trouve dans les tables. Dans le cas de cette table, où la valeur B étoit positive, la tache étant plus orientale, que le centre du soleil, on ôte cet angle de l'angle B'SI de la dernière ligne de la seconde partie pour avoir, selon les règles exposées au num. 34 à la dernière de cette troisième l'angle SIB, qui dans la formule sixième est = B'SI — P'SP. En faisant le calcul pour les deux journées

nées suivantes du num. 26, on doit faire de même la soustraction, parceque la tache y est aussi plus orientale, & la valeur B positive : dans la quatrième journée la valeur B, qui est la différence de l'ascension droite à la fin de la cinquième ligne de cette journée se trouve = o, ainsi la valeur B'I, & l'angle B'SI s'évanouissent, & le calcul devient plus court, l'angle SIB devenant égal en grandeur à l' angle PSP', mais négatif. Dans les deux dernières journées la tache reste plus occidentale, & la valeur B avec l'angle B'SI changeant de signe, il faut employer l' *addition* à la place de la soustraction, mais cette somme y doit être aussi négative, c' est-à-dire que l' angle PSI, pour lequel on a pris son alterne SIB, à la place d' aller vers *l'orient comme dans les cas des trois premières journées, qui sont exprimées* par la figure, *tombe vers l'occident*.

102. La dernière partie de cette colonne est employée pour la *septième* formule $SI = \frac{B'I}{sin.B'SI}$. A' la première ligne il y a le complément logarithmique du *sin.*B'SI, angle que l'on a à la dernière ligne de la seconde partie : à la seconde il y a le logarithme de B'I copié de la sixième ligne de la même seconde partie : dans la troisième la somme de ces deux, qui donne la valeur de SI en secondes, & dans la quatrième il y a cette même valeur réduite en minutes, dont on a besoin dans la colonne suivante.

103. La première partie de la troisième colonne est employée pour les deux dernières formules de la position géocentrique, qui sont $BI = SI \times cos.SIB$, & $SB = SI \times sin.SIB$. On commence dans la première ligne par le logarithme de la valeur commune *SI* tiré de la fin de la colonne précédente : on y met après les deux logarithmes du co-sinus, & du sinus de l'angle SIB, que l' on a trouvé à la fin de la troisième partie de la seconde colonne : la somme de chacun de ces deux avec les précédents donne à la ligne 4, & 5 les logarithmes des BI, SB.

104. Le calcul est le même pour toutes les autres journées à l'exception de la quatrième, où il est plus court, comme j' ai

 dit

dit au num. 101, parceque le nombre B, qu' on devoit tirer de la cinquième ligne de la journée 16 Sept. (num. 26) y est = 0, la tache étant arrivée ce jour-là au fil horaire ensemble avec le centre du soleil. On doit y supprimer tout le calcul de la seconde, & de la dernière partie de la seconde colonne, qui pour les autres journées doivent être employées pour réduire en secondes du grand cercle la valeur B, & pour trouver la SI, qui dans ce cas est égale à la SB' par la réunion des points I, B': la dernière ligne de la seconde colonne y devient aussi inutile. Ainsi pour la SI de la première ligne de la troisième colonne on y doit prendre la valeur de la SB', qu' on a à la sixième ligne de la seconde colonne, & pour l' angle SIB, qui devient = P'SP, mais négatif, on doit prendre pour la seconde & troisième ligne de la troisième colonne la valeur de celle-ci, qu' on aura à la troisième ligne de la partie seconde de la seconde colonne. L' angle SIB devenant négatif dans cette journée, & dans les deux suivantes selon le même numéro 101, la valeur de BI, qui répond à son cosinus, reste positive, mais celle de SB devient négative, c' est-à-dire la latitude géocentrique de la tache reste boréale, mais sa longitude devient moindre de celle du soleil, la tache ayant passé par rapport à l' arc PS de la position orientale à l' occidentale.

105. On passe après à la position héliocentrique pour calculer les quatre formules du num. 43, appliquée à la fig. 2, qui a les valeurs R, SI, BI, SB communes avec la première. La seconde partie de la troisième colonne est employée pour les deux premières formules de ce numéro, qui ont $sin.SCI = \frac{SI}{R}$, & TSC = SCI − SI. On a à la première ligne la valeur R prise en secondes de la cinquième ligne de la colonne 2, avec son complément logarithmique: on en fait à la seconde la somme avec le logarithme de SI, qu' on avoit déjà à la première ligne de la première partie de cette colonne, ce qui donne le sinus de l' angle SCI, & l' angle même. A' la ligne 3 on a la valeur de SI réduite en minutes à la dernière ligne de la colonne 2, & à la dernière de cette partie-ci on l' ôte de l' angle précédent pour y a-

voir

voir TSC $=$ SCI $-$ SI. Pour la troisième formule *sin*.CSD $= \frac{BI \times sin.TSC}{SI}$ on met à la même dernière ligne de cette seconde partie le logarithme du sinus de l'angle TSC, qu'on y a trouvé, & qui doit aussi venir en usage pour la dernière formule dans la quatrième partie de cette colonne : pour cette formule-ci on a aux deux premières lignes de la troisième partie BI avec son logarithme tiré de la ligne 4 de cette colonne, & SI avec son complément logarithmique, que l'on tire de son logarithme de la première ligne. La somme des trois nombres logarithmiques de ces trois dernières lignes donne à la ligne suivante le sinus de la latitude héliocentrique CSD, & cet angle.

106. La dernière formule étoit *sin*.TSD $= \frac{SB \times sin.TSC}{SI \times cos.CSD}$: elle a besoin de deux logarithmes, & de deux compléments logarithmiques. On met à la première ligne de la quatrième partie le complément logarithmique du co-sinus de l'angle CSD, lequel angle se trouve à la ligne précédente : à la seconde ligne on met SB avec son logarithme, que l'on a à la cinquième de la première partie : à la troisième on copie le complément logarithmique de SI, qu'on trouve à la seconde ligne de la partie précédente, & sans répéter le logarithme du *sin*.TSC, que l'on a à la dernière ligne de la seconde partie, on en fait la somme avec ces trois lignes, ce qui donne à la quatrième le logarithme du *sin*.TSD, & cet angle, qui est la différence des longitudes héliocentriques de la terre, & de la tache. On doit la retrancher de la longitude de la terre dans le calcul de cette première journée selon la règle du num. 37 ; parceque l'arc SB, qui est ici le même qu'à la fig. 1, a la position orientale, le lieu géocentrique de la tache étant plus oriental que le lieu du soleil, & selon cette règle alors la position héliocentrique de la tache tout au contraire doit être plus occidentale que celle de la terre. Pour la même raison on doit faire la même chose dans le calcul du second & troisième jour ; mais pour les trois derniers il faudra tout au contraire employer l'addition, parceque la position géocentri-

 que

que de la tache y étant plus occidentale que celle du soleil, l' héliocentrique de la même tache doit être plus orientale que celle de la terre. La longitude héliocentrique de la terre est aussi opposée à la géocentrique du soleil, qu' on a à la dernière ligne de la première colonne de cette table : ainsi on la trouve en ajoutant *6* signes à celle-là. On la voit ici à la dernière ligne de cette partie de la même troisième colonne : ainsi dans sa dernière partie on trouve ici à la première ligne la longitude géocentrique de la tache, en prenant la différence des valeurs des deux lignes précédentes. Pour les trois dernières journées on prendra la somme. A' la seconde ligne on a la latitude de la tache copiée ~~de la~~ dernière ligne de la troisième partie, & à la fin à la troisième ligne le temps moyen. On trouve celui-ci à l' aide de la Connoissance des temps, qui marque pour tous les jours le temps moyen au midi vrai, & par-là ce qu' il faut ajouter, ou ôter au temps vrai pour le réduire en temps moyen. Dans tout le temps de ces observations il falloit ôter quelques minutes au temps vrai exprimé à la dernière ligne de la première partie pour avoir le temps moyen, ce qu' on a fait ici pour marquer ce temps à la dernière ligne de cette dernière colonne.

107. On voit dans la table II le résultat du calcul de cette table, & des autres, que j' ai fait à part pour les cinq autres journées. Il y a dans la première colonne la suite des nombres 1,2,3 &c, pour marquer l' ordre des positions, dans la seconde le temps moyen de chacune : dans la troisième la longitude héliocentrique de la tache : dans la dernière la latitude. Ces nombres sont tirés pour cette première journée de la fin de la troisième colonne de la table précédente, & pour les jours suivants des tables pareilles calculées exprès sur le même modèle pour chacune.

§. X.

Application du calcul numérique pour trouver la position du nœud.

108. LA méthode de cette recherche est expliquée dans le §.IV. En considérant la table II, on voit, que les latitudes toutes boréa-

réales commencent par diminuer, & après reviennent à s'augmenter. Ainsi les distances du pôle boréal de l'écliptique augmentent au commencement & diminuent après. Cela fait voir, que la tache a passé par le cercle PD (fig. 3), & que le pôle P' de l'équateur solaire tombe entre les points P, D (num. 50): ainsi le point N est le nœud ascendant, & pour le trouver il faut ajouter trois signes à la longitude du point D, quand on aura trouvé celle-ci.

109. On ne pouvoit pas trouver ici par la méthode du num. 48, qui demande deux latitudes de la même dénomination égales entr' elles, parcequ' il n' y en a pas dans la table II. Il a fallu se servir de la méthode du num. 49, en divisant les latitudes trouvées en deux classes, les unes qui diminuent, & les autres, qui augmentent, & cherchant à l' aide d' un binaire de celle-ci la longitude, qui devroit répondre à celle, qui dans la seconde classe y seroit égale à une, prise dans la première. Je pouvois ici placer les trois premières dans la première classe, & les trois dernières dans la seconde: mais je pouvois aussi prendre pour la première classe les deux premières seules, & les quatre dernières pour la seconde, & j' ai pris ce second parti. Pour avoir le plus grand avantage il faut en avoir deux d' une classe, dont une plus grande & l' autre plus petite qu' une de l' autre. Ici plusieurs combinaisons pouvoient avoir cet avantage, parceque les deux de la première classe tombent entre les deux premières, & les deux dernières de la seconde. Je l' ai eu dans plusieurs des combinaisons, que j' ai prises comme les plus propres pour l' objet: ces sont, en les marquant par les numéros de la première colonne de la table II, les 3 & 4, 3 & 5, 4 & 5, 4 & 6, 5 & 6, ce qui m' a donné dix déterminations, chacune de ces cinq binaires m' ayant donné deux valeurs L, & par-là deux longitudes du point D.

110. Pour faire ce calcul j'ai appellé (num. 49) la latitude de la première classe C, les deux de la seconde C', C'', les longitudes correlatives de celles-ci B, B', B'', la longitude qui répondroit dans la seconde classe à la latitude égale à celle, qu' on a prise dans la première L. En faisant $X = \frac{(B''-B')\times(C-C')}{C''-C'}$ par la pro-

por-

portion de ce même numéro, on a $L = B' + X$, d'où l'on tire la longitude du point $D = \frac{1}{2}(B + L)$, & en y ajoutant trois signes la longitude du nœud ascendant. Pour trouver les dix valeurs L j'ai calculé cinq tables une pour chaque binaire de latitudes de la seconde classe combiné dans sa première partie avec la première de la première classe, & dans la seconde avec la seconde : mais je n'en donnerai qu'une seule, avec le résultat des autres. Celui de la première m'est venu trop écarté de ceux des quatre suivants, parceque la différence $C'' - C'$ des deux latitudes de son binaire est trop petite, ce qui augmente l'erreur de cette différence $C'' - C'$ par rapport au total : ainsi je ne m'en suis pas servi, & pour donner un *exemple j'employe ici la table*, qui répond au second de ses cinq binaires, qui est *la table III*.

111. Cette table a deux parties, dont la première sert pour còmbiner le binaire des deux latitudes de la seconde classe, qui sont dans ce second binaire les marquées dans la table II par les numéros 3 & 5, avec la première de la première classe marquée par 1 : la seconde partie pour le combiner avec la seconde marquée par 2. *Les trois premières lignes* de cette table sont employées pour trouver *la* valeur X de *la* première combinaison, & contiennent les valeurs $C'' - C'$, $B'' - B'$, $C - C'$ réduites aussi en minutes avec le complément logarithmique de la première, & les logarithmes des deux suivantes : ainsi la somme de ces trois nombres logarithmiques donne à la quatrième ligne le logarithme de X avec son nombre en minutes, qui y est aussi réduit en degrés & minutes. On trouve les valeurs C, C', C'' dans la colonne 4 de la table II, les B, B', B'' dans sa colonne 3, d'où l'on prend aisément les différences, qu'on a dans ces trois valeurs des trois premières lignes. La valeur C pour la première partie de la table est pour celle de chaque binaire la même première latitude 20°. 37', les valeurs C'', C' sont les latitudes, qui répondent aux numéros de termes de ce binaire. Ici sont celles, qui répondent aux numéros 3, & 5 de la première colonne de la table II, & sont 19°. 33', & 21°. 14'. Ainsi on a à la première ligne $C'' - C' = 1°.41' = 101'$, & pour la troisième $C - C'$

$= 1°$.

= 1°.4' = 64'. Les valeurs B',B'' pour cette même *table* sont *celles*, qui répondent aux mêmes numéros 3 & 5 dans *la* troisième colonne de la table II, & sont 11ˢ.20°.3', & 0ˢ.15°.23'. Pour avoir B''— B' il faut ajouter au second terme un cercle de 12ˢ à l'ordinaire, & on a à la seconde ligne de cette table 25°.20' = 1520'. On en tire à la quatrième ligne X = *963'*, qui est précédé par sa valeur en degrés & minutes pour en faire la somme avec la valeur B', qui se trouve à la ligne 5, & en tirer à la ligne *6* la valeur L = B' + X, où l'on ne rejète pas les 12 signes, parcequ'on doit y avoir égard pour la moitié qu' on doit prendre après de B + L. La valeur B, qui se trouve à la ligne 7 est commune à *la* première partie de *la table* pour chaque binaire, & *se tire dans cette première partie de la première longitude*, qui répond dans la troisième colonne de la *table* II à son numéro 1, ainsi elle est = 10ˢ.11°.42'. La somme des deux *longitudes précédentes* B + L à la ligne 8 se trouve 22ˢ.17°.48', *& sa moitié à la ligne 9* est la longitude du point D = 11ˢ.8°.54'.

112. Pour la seconde partie le calcul doit être tout-à-fait de la même forme, & *il devroit avoir le même nombre de lignes : mais comme il appartient au même binaire des latitudes de la seconde classe*, ses valeurs C', C'', B'', B' sont *les mêmes* que *celles de la* première partie : ainsi les deux premières *lignes de la* première partie peuvent servir aussi pour le calcul de la seconde, sans les répéter. La latitude C, & la longitude B sont changées, & on les tire de la quatrième, & troisième colonne de la table II vis-à-vis *le* numéro 2, où on a pour ces deux valeurs 20°.*6*', & 10ˢ.24°.42'. Ces valeurs doivent être les mêmes pour la seconde partie de chaque table, qu' on doit calculer pour un binaire quelconque. Cette nouvelle valeur C donne une nouvelle C — C', qui reste = 33', & on la voit à la première ligne de *la seconde* partie de la même table III avec son *logarithme*. La somme *de celui-ci*, & des deux logarithmes des deux premières lignes de *la première partie donnent à la seconde ligne* de cette seconde le logarithme de la nouvelle valeur X, qu' on y voit = *497*' réduite à 8°.17'. Celle-ci avec la valeur B', la même de

la première partie, qu' on voit ici aussi à la *ligne* 3, donne à la ligne 4 leur somme L = $11^{s}.28^{\circ}.20'$. On a à la ligne 5 la nouvelle valeur B = $10^{s}.24^{\circ}.42'$ trouvée ci-dessus : la somme de celle-ci avec la précédente donne à la ligne *6* B + L = $22^{s}.23^{\circ}.2'$, dont la moitié est la nouvelle longitude du point D = $11^{s}.11^{\circ}.31'$.

113. On voit déjà plus de $2^{\circ}\frac{1}{2}$ de différence entre ces deux résultats, qu' on a eu aux dernières *lignes* de ces deux parties, ce qui ne paroîtra pas trop, *si l' on considère la multiplication* de l' erreur de l' observation, qui se fait en *multipliant par* 15 le temps pour le réduire en parties de cercle, & incomparablement plus *selon le* num. 42 en passant de la position géocentrique à l' héliocentrique, ce qui fait voir la nécessité d' avoir un grand nombre de déterminations, pour avoir quelque chose de plus approchant du vrai en prenant le milieu. J' ai fait le calcul, comme je l' ai dit ci-dessus, pour cinq binaires, qui m' ont donné dix résultats. La forme du calcul est la même, en prenant pour chaque binaire les valeurs C', C'', B', B'', qui répondent à ses termes dans la *troisième*, & *seconde colonne* de la table II. Il n' y a que l' *attention* au signe de *la* valeur X : *il* vient négatif pour le cinquième binaire, parceque *la* valeur C', qui dans le binaire de 5 & *6* est celle de la cinquième *latitude de la* table II, est $21^{\circ}.14'$, plus grande que la valeur C, qui pour la première partie est par-tout $20^{\circ}.37'$, & pour la seconde $20^{\circ}.6'$, ce qui rend la valeur C — C' négative : ainsi pour avoir L = B' + X il faut prendre non la somme, mais *la* différence des valeurs des deux lignes précédentes. Il faut encore prendre garde, que pour les trois derniers binaires, où la longitude B' de la tache prise d' une des trois dernières journées avoit déjà dépassé le commencement du bélier ayant 0^{s}, ou 1^{s}, il faut ajouter 12^{s} à elle, ou à la longitude L, qu' on en a *tiré*, *pour* trouver la longitude du même point D = $\frac{1}{2}$(B + L).

114. Ayant *fait* tous ces calculs, comme *j'* ai *dit* ci-dessus, j' ai trouvé par les deux combinaisons du premier binaire trop éloignées non seulement de ces deux du ce second binaire, mais

de

de tous les autres par la raison, que j'ai indiquée au num. 110, c'est-à-dire 11ˢ.21°.17' & 11ˢ.18°.4'. Ainsi je les ai rejetés, & j'ai mis les huit autres dans la table IV. Pour chaque couple de résultats j'ai mis à côté le binaire, qui les a produits. J'y ai marqué seulement les degrés & minutes, les 11 signes étant communs. La ligne 9 en a la somme = 92°.14', qui divisée par 8 laisse à la dixième le terme moyen 11°.32'. Mais parmi ces huit résultats il y en a encore deux, qui s'écartent un peu trop des autres, le quatrième, & le sixième. En les ôtant je trouve dans la seconde partie de la même table pour la somme des six autres 62°.5', qui divisée par 6 donne pour la longitude du point D 11ˢ.10°.21'. Je me servirai de cette détermination, qui ne s'éloigne d'aucune des six de deux degrés. En y ajoutant trois signes, & ôtant après le cercle entier de 12 on a la longitude du nœud N = 2ˢ.10°.21'.

115. Si l'on vouloit employer tous les dix résultats; on ajouteroit à la somme des huit = 92°.14' la somme des degrés & minutes des deux résultats donnés par le binaire de 3 & 4, c'est-à-dire (num. 114) 21°.17' + 18°.4' = 39°.21': on auroit alors la somme totale 131°.35', qui divisée par 10 laisseroit 13°.9': ainsi la longitude du nœud seroit 2ˢ.13°.9'. Cela s'accorderoit mieux avec le résultat, que nous trouverons au §. XIII par trois positions de la tache, qui ont donné 2ˢ.14°.3'; mais généralement on écarte les termes, qui s'éloignent trop d'un bon nombre de ceux, qui s'accordent beaucoup plus entr'eux. Les différences, qu'on a trouvées, font voir toujours mieux, qu'on ne peut pas se fier à une seule détermination particulière quelconque, & qu'il est nécessaire d'en avoir un grand nombre pour en tirer quelque chose de moins fautif. On voit aisément en considérant les différences des latitudes dans les termes C'' — C', C — C', qui pour avoir les proportions employées ne doivent être trop grandes, qu'un petit nombre de minutes peut changer beaucoup les résultats, tandis qu'une seconde d'erreur dans la position géocentrique pouvant porter une erreur de 3 ou 4 minutes dans la position héliocentrique (num. 41), la différence de 3 ou 4

secondes dans la détermination donnée par le micromètre peut aisément produire les différences de plusieurs degrés, que nous avons trouvées dans les résultats. La source essentielle de cette incertitude est la petitesse de l'inclinaison de l'équateur solaire à l'écliptique, qui ne permet pas un assez grand rapport du changement de la latitude au changement de la longitude, & la nécessité de ne pas employer des observations faites dans le voisinage de la tache au limbe du soleil.

§. XI.

Application du calcul numérique pour trouver l'inclinaison de l'équateur.

116. ON a expliqué la théorie de cette recherche dans le §. V avec l'ordre du calcul, que l'on y a détaillé au num. 55 corrélativement aux formules, que l'on a mis toutes ensemble à la fin du num. 56, & qui se rapportent à la fig. 4. Après la détermination du nœud N, on détermine l'inclinaison de l'équateur par deux positions de la tache. Comme on en a 6 dans la table II, on pourroit avoir 15 déterminations, parceque le nombre 6 a 15 binaires; mais je n'en ai employé que cinq, dont les deux termes ont une différence suffisante tant en longitude, qu'en latitude: ces sont les binaires 3 & 6, 4 & 6, 2 & 5, 3 & 5, 1 & 3. La forme du calcul est la même pour tous ces binaires: j'en donne l'exemple pour le premier à la table V. Elle a quatre colonnes, & répond à ces formules, qu'on a à la fin du num. 56; mais la marche du calcul ne suive pas exactement leur ordre: elle est conforme à ce qu'on a proposé au numér. 55 pour la forme de la table, qui est plus commode pour l'exécution du calcul numérique.

117. On doit avoir besoin de deux angles SD'H, DSD' (fig. 4), dont les valeurs selon ces formules sont N — B', & B' — B, N étant la longitude du nœud N trouvée à la fin de la table IV, B, B' les longitudes des deux positions de cette combinaison: ainsi on a dans les trois premières lignes de la première colonne

N, B',

N, B', B avec leurs valeurs tirées de cette dernière ligne de la *table IV*, & de la sixième, & troisième de la troisième colonne de la table II. On prend pour l'angle SD'H à la quatrième ligne la différence des valeurs des deux premières, & pour l'angle DSD' à la cinquième la différence de ceux de la seconde, & troisième. Ce second angle doit servir selon les mêmes formules pour résoudre le triangle DSD' par les deux côtés SD, SD', & par son angle intercepté en S, où l'on doit employer la proportion suivante, *comme la somme des deux côtés est à leur différence, ainsi la tangente de la demi-somme des angles SDD', SD'D est à la tangente de leur demi-différence, qui ajoutée à la demi-somme, quand SD est plus grand, & ôté quand il est plus petit, doit donner l'angle SD'D employé dans les deux dernières formules*. Or la somme de ces deux angles est le supplément de l'angle DSD'. Pour cela on a mis dans la ligne 6 le supplément de l'angle de la ligne 5, & dans la ligne 7 sa moitié.

118. *Dans la seconde colonne on commence par les deux latitudes BC, B'C', qui sont les 3 & 6 de la quatrième colonne de la table II. Aux deux lignes suivantes on a leurs co-sinus SD, SD' au rayon = 1, & aux lignes 5 & 6 la somme, & la différence de ceux-ci. Aux lignes 7, & 8 on a leurs sinus CD, C'D', à la dernière la différence C'I des mêmes sinus.* Dans la colonne 3 on commence par la proportion susdite, dont le premier terme est la somme des deux côtés tirée de la ligne 5 de la colonne précédente, le second leur différence tirée de la ligne 6. On a mis ces deux nombres à la ligne 1 & 2 avec le complément logarithmique du premier, & le logarithme du second.

119. La troisième ligne a la demi-somme des deux angles tirée de la ligne 7 de la première colonne avec le logarithme de sa tangente: ainsi par la somme des trois lignes précédentes on a dans la quatrième le logarithme de la tangente de la demi-différence de ces angles avec la demi-différence même en degrés, & minutes. A' la ligne 5 on a la somme des angles des deux lignes précédentes, qui donne l'angle cherché SD'D, parcequ'ici le côté SD est plus grand que SD'. Il n'y a que le dernier de ces cinq binaires 1

& 3 qui exige la soustraction à la place de l'addition, parceque la latitude C, qui dans la table II répond au num. 1, étant plus grande que C', qui répond au num. 3, son co-sinus SD est plus petit que l'autre SD'. A' la ligne *6* il y a l'angle SD'H tiré de la quatrième ligne de la première colonne pour avoir dans la ligne 7 l'angle D'GF, qui est la différence des deux précédents selon l'avant-dernière formule D'GF = SDD' — SD'H.

120. La quatrième colonne est employée pour la dernière formule $cot.CFD' = \frac{cos.BC \times sin.DSD' \times sin.D'GF}{C'I \times sin.SD'D}$. On y a dans les cinq premières lignes les cinq termes de cette formule : on trouve leurs angles & lignes dans les colonnes précédentes : BC à la première ligne de la seconde colonne, DSD' à la cinquième de la première, D'GF à la ligne 7 de la colonne 3, C'I à la dernière de la colonne 2, SD'D à la ligne 5 de la colonne 3. On y ajoute les logarithmes des trois premiers, & les complémens logarithmiques des deux derniers, qui sont des diviseurs : la somme de tous ces nombres logarithmiques donne à la dernière ligne le logarithme de la co-tangente de l'inclinaison cherchée, & l'inclinaison même, qu'on tire de la table des sinus. La disposition de ce calcul dans les colonnes précédentes pour préparer les termes au calcul de la dernière formule, rend le même calcul bien expéditif. On a employé au num. 54 la co-tangente de l'angle cherchée plutôt, que la tangente, parceque cela a simplifié la formule, en faisant disparoître le terme C'D', qui y seroit entré avec son quarré, tandis que l'on trouve dans les tables un angle par sa co-tangente de même que par la tangente.

121. En faisant le même calcul pour les autres binaires proposés on obtient cinq déterminations de l'inclinaison cherchée. L'ordre du calcul est le même par-tout à l'exception de la somme, qui dans la troisième colonne du dernier binaire se doit changer en soustraction, comme nous avons dit ci-dessus. Dans la même colonne de ce binaire l'angle SD'H vient plus grand, que l'angle SD'D, ce qui rend l'angle D'GF négatif, & fait voir, que le point G dans la fig. 4 doit tomber sur la D'D prolongée

du

du côté opposé ; mais aussi dans la colonne 2 la valeur C'I devenant négative à cause du sinus C'D', plus petit que CD, le point I doit tomber sur la D'C' prolongée du côté de C'. Ces deux termes en devenant négatifs dans la formule ne changent rien à la valeur positive de la co-tangente dans le calcul de la colonne 4. Ce cas demanderoit une figure particulière un peu changée, mais à l'aide des réflexions, que nous venons d'y faire, & du signe négatif mis à propos, on peut se passer du changement de la figure.

122. On a les cinq résultats à la table VI, avec la somme à la sixième ligne, qui divisée par 5 laisse à la dernière la valeur moyenne 7°.44'. Ici aussi on a moins de deux degrés de différence de ce milieu à chaque terme particulier : mais cette même différence, qui s'y trouve, & qui va au de-là de trois degrés pour les résultats extrêmes fait voir toujours mieux, qu'on ne doit pas se fier à une détermination particulière quelconque ; mais qu'il faut en multiplier beaucoup le nombre.

§. XII.

Application du calcul numérique pour trouver le temps périodique & synodique.

123. J'AI employé quatre petites tables pour le temps périodique, & une pour le synodique correlativement à la méthode proposée au §. VI (num. 57), & aux formules qu'on trouve à la fin de ce paragraphe (not. num. 66). Ces formules se rapportent à la fig. 3. T y est le temps moyen entre deux positions de la tache réduit en heures, M le mouvement angulaire autour du pôle P' réduit en minutes, T' le temps périodique réduit en jours : on a $T' = \frac{900T}{M}$. On peut prendre pour M tant l'angle CP'D, que l'angle CPC' = CP'D ± C'P'D. Pour la première évaluation du mouvement M il suffit une seule position C, qui devient C', quand la longitude va au de-là de celle du point D trouvée au paragraphe X à la fin de la table IV, où elle est = 11^s.10°.21',

com-

comme nous avons dans la table II six positions, on peut en tirer autant de déterminations du temps périodique; mais il faudroit trouver le temps de l'arrivée de la tache au cercle PP'D. Pour la seconde évaluation du mouvement M il faut employer la combinaison de deux positions. Dans ces six termes il y auroit ici aussi 15 combinaisons: ainsi on pourroit avoir 20 déterminations différentes du temps périodique: mais comme nous avons vu au num. 60 qu' il faut donner la préférence à cette seconde évaluation, je n'employerai pas la première. *Parmi les quinze binaires de la seconde on ne doit pas employer ceux, qui ont l'intervalle de temps trop court*. En laissant à part ceux, où cet *intervalle n'arrive à-peu-près à quatre jours*, j'ai pris ici ceux des positions marquées dans la Table II par 1 & 4, 1 & 5, 1 & *6*, 2 & 5, 2 & *6*, 3 & *6*. Je donnerai l'exemple du calcul appliqué seulement au premier.

124. La table VII sert pour trouver l'angle CP'D appartenant à la première des six positions de la tache, qu'on a dans la table II. On le trouve dépendamment des quatre premières de ces formules, qui sont $BD = \mathit{long}.D - \mathit{long}.B$, $\mathit{tan}.PM = \mathit{cos}.BD \times \mathit{cot}.BC$, $P'M = PM - PP'$, $\mathit{tan}.CP'D = \frac{\mathit{sin}.PM \times \mathit{tan}.BD}{\mathit{sin}.P'M}$. Dans la troisième de ces formules on a le signe —, qui doit y avoir dans toutes les six positions. La première ligne de la table VII a la longitude du point D tirée de l'avant-dernière ligne de la table IV, la seconde la longitude de la première position de la tache tirée de la première ligne de la troisième colonne de la table II, la troisième leur différence BD, qui est l'objet de la première formule. Elle entre aussi dans la seconde avec son co-sinus, qu' on y voit avant, & son logarithme après; à la quatrième ligne on a BC avec sa valeur tirée de la première ligne de la quatrième colonne de la table II, & le logarithme de sa cô-tangente, à la cinquième la somme des deux logarithmes précédents, qui donne le segment PM par le logarithme de sa tangente, objet de la seconde formule. Pour la troisième on voit à la sixième ligne l'arc PP', qui est la mesu-

re de l' inclinaison de l' équateur tirée de la dernière ligne de la table VI. On en fait la soustraction de la valeur précédente PM pour avoir à la première ligne de la seconde partie de cette colonne l' autre segment P'M. Pour la quatrième formule on y a à côté le complément logarithmique de son sinus : à la seconde il y a PM, dont on ne répète pas la valeur, qu' on voit à la ligne cinquième de la partie précédente, mais on y a à côté le logarithme de son *sinus* : à la troisième on répète BD sans sa valeur, qu' on voit à la troisième ligne de la première partie, mais on y ajoute le logarithme de sa tangente : ainsi la somme des logarithmes de ces trois lignes donne à la ligne dernière l' angle CP'D par le logarithme de sa tangente, ce qui est le dernier objet de cette table.

125. Ayant fait le même calcul pour toutes les cinq autres positions, j' ai mis tous les six résultats dans la petite table VIII. Il n' y a d' autre différence, que le signe négatif mis avant les quatre derniers, parceque la longitude de la position de la tache dans les quatre dernières lignes de la dernière colonne de la table II étant plus grande, que celle du point D, à la place d' ôter dans la table VII la seconde ligne de la première pour avoir BD, il faut y soustraire la première de la seconde, ce qui rend négative la valeur de BD, avec l' angle BP'D, & fait voir, que la tache a déjà dépassé le colure PP'M.

126. A' l' aide de la table VII, on trouve aisément le temps périodique T', qui répond à un binaire des positions quelconque par la formule $T' = \frac{900T}{M}$: je donne l' exemple dans la table IX pour le premier des six proposés au num. 123, qui a la combinaison des 1 & 4. Pour le temps T il falloit prendre celui, qui s' est écoulé depuis la première position jusqu' à la quatrième, ce qu' on fait en ôtant celui, qui est marqué à la quatrième ligne de la seconde colonne de la table II, de celui qu' on y a à la quatrième. Pour cela j'ai mis ce second temps à la première ligne de cette table, précédé de son numéro 4, & à la seconde le premier, qui doit être soustrait, avec son 1 mis avant. Ces temps y

sont

sont marqués en jours, heures, & dixièmes d'heure, en réduisant les minutes marquées dans cette seconde table en dixièmes d'heure en raison de 1 pour 6. Ainsi pour les 43 minutes, qu'on voit à la quatrième ligne de la seconde colonne de la table II on a ici à la première ligne 7 dixièmes, & pour 1' de la première, qui n'arrive pas à la moitié d'une dixième, on a ici 0. Ayant fait la soustraction, j'ai mis à la troisième ligne la différence $4^{j}. 0^{h}, 7$, & à la quatrième *j'ai réduit* en heures les 4 jours, ainsi *j'ai eu* $96^{h}, 7$: *j'y ai mis avant son expression* T & après son logarithme. Pour le mouvement M *j'ai pris la* somme des deux angles de la première & quatrième ligne de la table VIII, *dont le premier positif* répond à l'angle CP'D, & le second négatif au C'P'D, où l'on voit, que quand les signes des deux valeurs, qu'on doit prendre dans cette table, sont contraires comme ici, il faut prendre la somme des deux valeurs numériques pour avoir le mouvement CP'C', & lorsque ces signes seront conformes, il faudra prendre la différence. Ce cas n'arrivera ~~ici,~~ que *dans la dernière combinaison 3 & 6*, puisque dans *ce seul on a les signes à la ligne 3 & 6* de la table VIII tous les deux *négatifs*. *Cette somme est marquée ici à la ligne* 5 en *degrés & minutes*, & réduite après *toute en minutes*. C'est la valeur *M*, & comme c'est un diviseur on y a après *le complément* logarithmique. On a à la ligne *6* le coefficient *900* avec son logarithme : ainsi la somme de ces trois logarithmes donne à la dernière ligne la valeur cherchée T' *du temps périodique*.

127. Ayant fait le calcul de la même manière pour les cinq autres binaires, j'ai trouvé le six résultats, qu'on voit dans la petite table X, où chacune des six premières lignes a les deux numéros, qui marquent le binaire, qui a produit le résultat ajouté. A' la septième il y a la somme de toutes ces valeurs, & dans la huitième le milieu en jours = *26,77* : en multipliant cette fraction par 24 on a 18 heures en négligeant la fraction, qui y reste ; ainsi le résultat moyen pour le temps périodique est de *26* jours & 18 heures.

128. Il n'y reste, que la formule $T'\gamma = \frac{AXT'}{A-T'}$ pour avoir le

le temps de la révolution synodique. On a ce calcul dans la petite table XI. La première ligne contient l'année A = 365,25 jours, la seconde le temps périodique T' = 26,77 tiré de la dernière ligne de la table X, la troisième leur différence A — T', avec les logarithmes correspondants dans les deux premières lignes, & le complément logarithmique à la troisième. La somme de ces trois nombres logarithmiques donne à la quatrième le temps synodique T'' = 28,89, c'est-à-dire 28 jours & 21 heures. Ces deux temps sont trop plus forts, que tous ceux, qu'on a trouvé jusqu'à présent; mais j'en parlerai dans le dernier paragraphe.

§. XIII.

Application du calcul numérique pour trouver les deux premiers éléments par trois positions.

129. J'AI donné dans le paragraphe VII trois méthodes pour trouver les deux premiers éléments par trois positions quelconques: la première employe la construction (num. 70) aidée d'un petit calcul numérique (num. 73), la seconde (num. 74) la Trigonométrie plane, la troisième (num. 76) la Trigonométrie sphérique. J'ai donné l'exclusion à cette dernière (num. 79) à cause de la multiplicité des triangles sphériques, qu'il faudroit employer: la première, qui est la plus simple, seroit suffisante dans une recherche, qui ne peut pas avoir toute l'exactitude dans les données; mais on ne peut pas s'en servir ici, où la différence des latitudes extrêmes à la moyenne est trop petite par rapport à celle-ci, parceque les lignes (fig. 5) CI, C''I' étant trop petites par rapport au sinus C'D', les deux points G, G' doivent aller trop loin, ce qui empêche d'employer une échelle suffisamment grande pour la construction graphique. Ainsi je me bornerai à la seconde méthode; mais j'en donnerai un seul exemple; parcequ'en multipliant les positions, que l'on fait entrer toutes à-la-fois dans la même détermination, on multiplie les effets des erreurs dans le résultat.

130. Je choisirai pour cet exemple les positions 1, 3, 6 de la table II, qui ont les trois latitudes les plus différentes, & sont assez éloignées en longitude. La première condition le rend propre à cette méthode, parceque l'égalité des latitudes achève par elle-même la détermination des nœuds (num. 46), la seconde, parceque plus les trois points d'un cercle sont éloignés entr' eux, plus ils sont propres à en déterminer la position.

131. Cette méthode exige la résolution de trois triangles (fig. 5) DSD', D''SD', GD'G', & les formules, qu'on a au §. VII (num. 75). On a dans les deux premiers triangles le côtés SD, SD', SD'', qui sont les co-sinus des latitudes BC, B'C', B''C'', & les angles en *S*, qui sont les différences des longitudes B' — B, B'' — B'. On y trouvera les angles *SD'D*, *SD'D''*, *SD''D'*: les deux premiers donnent GD'G' = *DD'D''*, qui est leur somme, & le troisième, après qu'on aura trouvé l'angle D'G'G par la résolution de son triangle, servira pour avoir B''SN, qui dans les formules est = SD''D' — D'G'G. On a besoin aussi des CD, C'*D'*, C''*D''*, qui sont les trois sinus des mêmes latitudes, pour avoir les différences CI, C''I' des deux extrêmes au moyen: alors on a tout ce qu'il faut pour trouver les valeurs exprimées dans les formules pour les deux côtés $D'G = \frac{sin.B'C' \times cos.BC \times sin.DSD'}{CI \times sin.SD'D}$, &

$$D'G' = \frac{sin.B'C' \times cos.B''C'' \times sin.D''SD'}{C''I' \times sin.SD'D''}$$, qui avec l'angle GD'G' = DD'D'' donneront l'angle D'G'G. On aura alors tout ce qui entre dans les deux dernières formules pour la longitude du nœud, & pour l'inclinaison de l'équateur.

132. On a tout ce calcul dans la table XII. Elle a trois divisions séparées par des lignes droites, qui la traversent horizontalement, celle du milieu ayant deux colonnes & le deux autres divisions trois par chacune.

133. La première colonne a quatre parties chacune de trois lignes. La première partie contient les numéros 1, 3, 6 correlatifs aux positions de la table II, que l'on employe, & les trois longitudes des points B, B', B'' tirées de la troisième colonne de la même ta-

table. La première ligne de la seconde partie a l'angle DSD', qu'on trouve en ôtant la première de ces trois longitudes de la seconde : la seconde ligne a le supplément de cet angle, qui est la somme des deux angles à la base du triangle DSD', & la troisième la moitié de ce supplément, qui en est la demi-somme, nécessaire pour la résolution de ce premier triangle. Les trois lignes de la troisième partie préparent de même la demi-somme des angles à la base du triangle D''SD'. La première de ces trois a l'angle D''SD', que l'on trouve en ôtant la seconde longitude de la troisième, la seconde ligne a son supplément, la troisième la moitié de celui-ci : les trois lignes de la dernière partie ont les trois latitudes tirées de la même table II.

134. Dans les trois premières lignes de la seconde colonne on a les trois co-sinus des trois latitudes, dans les lignes 8, 9, 10 leurs sinus au rayon = 1. Dans la quatrième il y a la somme: dans la cinquième la différence des deux premiers co-sinus des lignes 1, 2 : dans la sixième la somme, dans la septième la différence des deux derniers co-sinus des lignes 2, 3 : dans la 11 la différence des deux premiers sinus des lignes 8, 9 : dans la ligne 12 la différence des deux derniers sinus des lignes 9, 10.

135. La troisième colonne sert pour la résolution des deux premiers triangles DSD', D''SD'. La première, & la seconde ligne contiennent la somme & la différence des deux côtés SD, SD', que l'on tire des lignes 4 & 5 de la seconde colonne avec le complément logarithmique de la première, & le logarithme de la seconde : la troisième ligne a la tangente logarithmique de l'angle qui se trouve à la sixième ligne de la première colonne, qui est la demi-somme des angles à la base DD': dans la quatrième on a la somme de ces trois nombres, qui est la tangente logarithmique de la demi-différence des deux mêmes angles, qu'on y voit à côté à gauche. Pour avoir l'angle SD'D, que l'on voit à la ligne 5, on ôte la quatrième ligne de la troisième ; parceque le côté SD, qui lui est opposé, est plus petit, que l'autre côté SD'. Les lignes 6, & 7 contiennent la somme & la différence des deux côtés SD'', SD', que l'on tire des lignes 6 & 7

de *la seconde colonne* avec *le complément logarithmique* de la première, & le logarithme de la seconde : *la ligne* 8 a la tangente logarithmique de l' angle qui se trouve à *la ligne* 9. de la première colonne, qui est la demi-somme des angles à la base D''D'. Dans les lignes 10, & 11 on a les angles SD'D'', SD''D', qui sont la différence, & la somme des deux précédents par la même raison, que le côté SD'' est le plus petit, & SD' le plus grand. La dernière ligne a l'angle GD'G', qui est fait par la somme des deux précédents.

136. La seconde division a deux colonnes, dans *lesquelles on* trouve les deux côtés du triangle GD'G' par le moyen des deux formules $D'G = \frac{\textit{sin.}B'C' \times \textit{cos.}BC \times \textit{sin.}DSD'}{CI \times \textit{sin.}SD'D}$, & $D'G' = \frac{\textit{sin.}B'C' \times \textit{cos.}B''C'' \times \textit{sin.}D''SD'}{C''I' \times \textit{sin.}SD'D''}$. Les cinq premières lignes de chaque division sont occupées par les trois facteurs du numérateur, & deux du dénominateur, avec les logarithmes des premiers, & compléments logarithmiques des derniers. On a B'C', BC, B''C'' à la fin de la première *colonne de la première division* : DSD', D''SD' à la *ligne* 4, & 7 *de la même colonne* : CI, C''I' aux deux dernières *lignes de la seconde colonne* : SD'D, SD'D'' aux *lignes* 5 & 10 *de la troisième*. La somme de ces cinq nombres *logarithmiques* donne aux dernières lignes de ces deux colonnes les logarithmes des côtés D'G, D'G' qu' on y voit aussi en nombres.

137. On achève le calcul dans la troisième division qui est employée pour faire la résolution du triangle GD'G', & en tirer la longitude du nœud à *la* seconde colonne par les deux avant-dernières formules, & dans *la* troisième l' inclinaison de l' équateur par la dernière. On prépare à la première colonne les deux côtés & l' angle en D' de ce triangle. La première colonne commence par la valeur D'G' tirée de la dernière ligne de la seconde colonne de la division précédente, & écrite au dessous de la valeur D'G dernière de la première colonne de cette division, pour avoir dans la seconde ligne leur somme, & dans la troisième leur différence, qui sont la somme, & différence des côtés

du

du triangle GD'G' : on voit à la quatrième ligne son angle en D' tiré de la dernière ligne de la dernière colonne de la première division, à la cinquième ligne son supplément, à la sixième la moitié de celui-ci, c' est-à-dire la demi-somme des angles à la base GG' de ce triangle.

138. On fait la résolution même dans les quatre premières lignes pour trouver dans la cinquième l' angle D'G'G. On a commencé dans les deux premières lignes par les nombres de la seconde, & *troisième de la colonne précédente*, avec le complément *logarithmique* de la première, & le logarithme de la seconde : *dans la troisième ligne* il y a le logarithme de la tangente de la *demi-somme des angles à la base tirée de la dernière ligne de la colonne précédente : dans la* quatrième on a la somme de ces trois nombres logarithmiques, qui est le *logarithme de la* tangente de la demi-différence de ces deux angles écrite à côté à gauche : on y a fait à la cinquième ligne la somme de ces deux *angles des deux lignes* précédentes, qui donne l' angle D'G'G à cause, que *le* côté *D'G* est *le* plus grand.

139. *Ayant trouvé l' angle D'G'G* on trouve aisément dans *le reste de cette colonne la longitude* du *nœud*, qui *dans sa dernière ligne est marquée par N, comme celle du point B'' par B''. Les deux avant-dernières formules sont* B''SN = SD''D' — D'G'G, & N = B'' + B''SN. Pour la première on a à la ligne *6* l' angle SD''D' tiré de la ligne pénultième de la colonne 3 de la première division, & à *la ligne* 7 la différence des deux angles précédents, qui est *la* valeur de l' angle B''SN = SD''D' — D'G'G. A' la *ligne 8 il* y a la longitude du point B'', qui ajoutée à cet angle donne la longitude du nœud, qui est le premier élément cherché.

140. On trouve le second élément, qui est l' inclinaison de l' équateur à la dernière ligne de la troisième colonne, par le logarithme de sa co-tangente, qui est la somme de cinq nombres logarithmiques d' autant de lignes précédentes : ces sont les logarithmes des trois facteurs du numérateur, & les compléments logarithmiques des deux facteurs du dénominateur de la fraction

cos.

$\frac{cos.B''C'' \times sin.D''SD' \times sin.D'G'G}{C''I' \times sin.SD'D''}$, qui exprime la valeur de la même co-tangente. On a les deux premiers & les deux derniers de ces cinq termes aux quatre lignes intermédiaires de la seconde colonne de la seconde division, & le troisième à la ligne 5 de la colonne 2 de la division 3. Nous comparerons ces résultats avec les précédents dans le paragraphe suivant, où il y aura des réflexions analogues à toute cette recherche.

§. XIV.

Réflexions sur les derniers résultats comparés avec les précédents & d'autres, & sur quelques phénomènes, qui en dérivent.

141. Les deux premiers éléments, que nous venons de trouver par cette méthode, ne s'accordent pas exactement avec le milieu que nous avons trouvé entre les déterminations précédentes; mais ils n'en sont pas trop éloignés, & ils tombent entre les valeurs extrêmes de ces mêmes déterminations. Nous avons trouvé ici la longitude du nœud N = 2ˢ. 14°. 3'. Le milieu parmi tous les 12 résultats trouvés par la méthode, que nous avons employée au §. X auroit été très-peu différent de celui-ci. Ayant rejeté d'abord ceux du premier binaire, qui s'éloignoient trop des autres, on a trouvé le premier milieu de la table IV pour le point D = 11ˢ. 11°. 32', ainsi pour le nœud N = 2ˢ. 11°. 32', qui s'en éloigne moins que le second de 2ˢ. 10°. 21', mais il s'en éloigne de deux degrés & demi: pourtant ce 14°. 3' se trouve encore inférieur à la quatrième & sixième détermination de cette table, où on a 14°. 51', & 15°. 18', & il se trouve éloigné moins que d'un degré de la cinquième, qui a 12°. 14'.

142. L'inclinaison de 6°. 49', qu'on a ici, se trouve beaucoup moins éloignée du milieu de la table VI, qui a donné 7°. 44', puisque la différence n'arrive pas à un degré: elle est plus gran-

de

de que les deux premières de cette table, & plus petite que les trois dernières.

143. M. de La-Lande dans le Tome III de son Astronomie livre XX de la seconde édition rapporte pour ces deux éléments les déterminations des différents Auteurs. La longitude du nœud dans le siècle passé étoit selon Dominique Cassini de 2ˢ. 8°, selon son fils & Scheiner de 2ˢ. 10°, selon de l'Isle de 1ˢ. 26°, & l'inclinaison selon *le* vieux Cassini étoit de $7^\circ\frac{1}{2}$, selon Scheiner de 7° à 6°, *selon de l'Isle de 6°. 36'.*

144. Mon dernier résultat pour le nœud s'accorde avec celui de Cassini le fils, & de Scheiner, les deux précédents en sont moindres : celui de M. de l'Isle est bien petit : il est beaucoup plus petit que tous les miens, & que ceux des autres. M. de La-Lande a publié le quatrième Volume de son Astronomie quelques années après, que j'avois achevé cet Opuscule (*), & y ayant rapporté plusieurs méthodes directes & indirectes, il y a *donné* pour le dernier résultat 2ˢ. 18°, qui va au contraire au delà de tous, même du mien *tiré de tous les* six binaires, & de la dernière méthode, *où j'ai employé trois positions* à-la-fois. *M. Cagnoli dans un Mémoire qu'il vient de donner dans le Tome* X des *Mémoires des Savants Étrangers* avec une belle solution *du même problême*, a trouvé par une combinaison de trois positions d'une tache employées à-la-fois 2ˢ. 17°. 50', ce qui s'approche de ce dernier résultat de M. de La-Lande, qui va au de-là de tous les autres.

145. Pour *l'inclinaison* mon résultat moyen entre les cinq de la table VI, qui est de 7°. 44', est un peu plus fort, que tous ceux rapportés ci-dessus, comme aussi que le dernier donné par M. de

(*) Je n'ai pas pu parcourir ce quatrième Volume avant mon départ de Paris pour l'impression de cette Collection des mes Opuscules, & je ne le trouve pas ici: ainsi je ne sais rien de ce qu'il y a sur toutes ces différentes méthodes : j'ai eu seulement dans une lettre d'un des mes amis ses derniers résultats, dont je me servirai dans ce dernier paragraphe, que j'ajoute à mon Opuscule écrit il y a déjà sept ans, où je n'ai changé rien d'essentiel, ayant seulement supprimé des détails dans l'application du calcul numérique, & corrigé quelques uns de ceux-ci ce qui a changé très-peu quelques résultats.

M. de La-Lande dans son quatrième Tome, qui est de 7°. 20', & que celui de M. Cagnoli, qui est de 7°. 15'; mais le mien de la dernière ligne de la table XII, qui est de 6°. 49' est un peu plus petit que ces derniers, & que la moitié des quatre précédents. Pourtant il y a beaucoup moins d' inégalité entre les différentes déterminations de l'inclinaison, que entre celles des deux autres éléments. Pour le lieu du nœud on le voit par tout ce que nous avons rapporté ci-dessus; pour *le temps* mes résultats sont assez d' accord entr' eux dans les six déterminations de la table X, où il n' y a jamais la différence de $\frac{3}{10}$ d' aucune entr' elles à la moyenne. Cette différence n' arrive à une centième du total: & pourtant le temps périodique du vieux Cassini chez M. de La-Lande dans son Tome III n' est que de $27^{j}\frac{1}{2}$, & le dernier résultat de celui-ci dans le Tome IV n' a que $25^{j}. 10^{h}$. M. Cagnoli ne l' a pas calculé; mais généralement on ne le fait aller au de-là de $25\frac{1}{2}$, tandis que chez moi il va jusqu' à $26\frac{3}{4}$.

146. Dans plusieurs passages de l' Opuscule j' ai fait remarquer la nécessité de ne pas se fier à une seule détermination tirée de deux ou trois positions d' une *seule tache* même pour les deux premiers éléments, & qu' il faut même en avoir un très-grand nombre à cause de la grande multiplication des erreurs, qui se fait sur-tout en passant de la position géocentrique à l' *héliocentrique* par le grand rapport que la distance de la terre au soleil a à son rayon, & on voit bien la même nécessité par la différence des mêmes résultats, que j' ai rapportés ci-dessus; mais cette nécessité est beaucoup plus grande, quand il s' agit de déterminer le temps périodique par les observations faites dans une seule apparition selon la méthode, que j' ai employée ici, où l' on tire le temps d' une révolution entière de 25 à 26 jours, du mouvement que la tache a fait autour du pôle de l' équateur solaire en peu de jours. Comme le temps synodique est à-peu-près de 27^{j}, la tache ne reste sur le disque apparent qu' environ 14 jours: dans trois de ces jours au commencement & trois à la fin de l' apparition l' obliquité de la surface du soleil près du bord du disque rallentit trop le mouvement apparent de la tache, ce

qui

qui multiplie extrémement plus l' augmentation de l' erreur dans le passage à la position héliocentrique : ainsi je crois très-nécessaire de ne pas se servir des observations faites dans ces journées : il en reste huit, dont encore les extrêmes ont une multiplication des erreurs assez grande : les erreurs commises dans le mouvement de ce reste de jours se multiplient encore en allant à la détermination du temps total. Ainsi, comme je l' ai dit au paragraphe VI, il faut plutôt déterminer ce temps par le retour d' une tache après une ou deux révolutions, quand on peut en reconnoître l'identité avec sureté, ce qui arrive & non pas si rarement, mais je ne me fierois jamais à l'identité du lieu de la tache après un bon nombre de révolutions, qui ne se fait jamais par une apparition continuée dans toutes les demi-révolutions intermédiaires. Pourtant je crois, que même en employant un très-grand nombre de déterminations fondées sur des observations suivies pendant sept ou huit jours, on pourroit arriver à quelque chose de moins douteux.

147. Tout ce que je viens de dire, fait qu'il n'y a rien d' extraordinaire dans la différence, qui se trouve dans mon résultat du temps périodique par rapport aux autres marqués ci-dessus, & à l' opinion commune, quoique cette différence aille même un peu au de-là d' un jour entier. Plusieurs des intervalles de temps, dont je me suis servi, ne sont que de quatre heures, qui sont la sixième partie d' une journée : ainsi quatre heures d'erreur dans cet intervalle doivent en produire sur le temps d' une révolution entière, qui va au de-là de 25 jours, une erreur plus grande, que d' une journée entière, & cette erreur pourroit être distribuée entre les deux termes extrêmes de manière à en donner deux à chacun. Or on voit bien, que le mouvement observé dans deux heures doit être bien peu sensible, puisque la tache employe à-peu-près 27 jours à parcourir tout le diamètre apparent du soleil, qui n' arrive jamais à 33 minutes.

148. Mais il paroît mériter quelqu' attention le grand accord qu'on voit parmi ces six résultats qu'on trouve à la table X, qui tous dépassent 26 jours sans une différence d' un tiers de jour-

née dans aucun d' eux au moyen : cette différence dans la plus grande partie s' y trouve bien moindre d' une centième du total, & elle ne s' y approche qu' une ou deux fois : *il y a à* ajouter, que pour la position géocentrique j' ai pris chaque journée le milieu entre cinq observations, qui se sont trouvées bien peu différentes entr' elles. Ordinairement quand on multiplie les observations, le milieu se trouve beaucoup moins sujet à être fautif : toujours, ou presque toujours les différences des résultats, qui proviennent des erreurs des observations vont vers les côtés opposés, & elles ne s' accordent jamais à *donner la même chose* : cet accord est d' autant plus improbable, que le nombre des déterminations est plus grand : ici nous en avons six si peu différentes entr' elles, & toutes d' accord à donner le temps plus long de 26 jours. Cela ne paroît pas un cas fortuit.

149. Si cette tache étoit élévée au dessus de la surface du soleil, les mêmes observations donneroient un temps périodique encore plus long ; parceque le même mouvement réel réduit par les lignes visuelles au disque du soleil répondroit à un nombre de degrés plus petit dans un cercle *plus grand*, que dans un plus petit, & cela seroit à-peu-près en raison *inverse de la distance* au centre du soleil, parceque dans la fig. 2 le sinus de l' angle TSC au sinus de l' angle STC étant comme TC à SC, c' *est-à-dire* à très-peu-près comme TS à SC, l' angle visuel STC restant le même, si l' on change la distance ST, le sinus de l' angle TSC doit changer en raison réciproque de la même distance ST, & c' est à-peu-près la raison de l' angle même, quand *il* est petit : ainsi à parité de mouvement géocentrique près du centre S du disque apparent du soleil le mouvement angulaire héliocentrique doit être à-peu-près plus petit en raison de la distance au centre du soleil augmentée. Le temps périodique doit se trouver autant plus long que le mouvement angulaire, qui répond à un temps donné, est moindre, & par conséquent celui-ci se doit trouver plus grand en raison directe de la distance augmentée. Ainsi pour accorder ces observations avec la révolution du soleil de 25 jours & demi par l' élévation de la tache au dessus de la surface

du

du soleil, il faudroit concevoir une diminution de vîtesse angulaire dans les différentes couches de son atmosphère en une raison encore plus grande, que la réciproque de leurs distances à son centre.

150. On pourroit accorder les mêmes observations avec la même révolution du *soleil de* 25 *jours* & demi, en supposant un mouvement particulier de *la* même tache dans son atmosphère dans la direction contraire d' orient en occident, qui retarderoit l' autre produit par *la* direction du mouvement du même soleil avec son atmosphère *vers* l' orient : mais il est très-peu probable qu' *il* y *ait un tel* mouvement si régulier dans l' intervalle de ces six *jours*, *avec* tant d' accord du mouvement combiné à donner ces six *résultats* pour *le* temps *périodique si peu différents* entr' *eux*. Si ces *résultats méritent* quelqu' attention, il *faudroit faire* des calculs *pareils* à ceux, que j' ai faits ici, sur un grand nombre d' observations de différentes taches, en combinant les résultats qu' *on peut* en obtênir tant par les observations faites dans le temps *de la* même apparition, que dans les deux ou trois consécutives de celles qu' on puisse reconnoître au retour après la demi-révolution, pour savoir à *quoi se tenir*. M. Messier en a fait un très-grand *nombre* avec *tout le soin possible* : un jeune Astronome *calculateur auroit là-dedans* de quoi *s'* occuper utilement pour é- *claircir cette partie* d' Astronomie, que je crois encore bien obscure, si ce n'est pas assez ce que M. de La-Lande aura ramassé dans ce quatrième Volume pour cet objet ; mais je suis persuadé, que cet objet exige un trop grand nombre de calculs, & l' occupation *suivie* d' un *homme*, qui s' y applique tout entier pour un temps considérable.

151. Parmi les différentes observations *il* y en a des plus, & moins propres selon les différents temps de l' année. Il ne sera *pas* inutile de considérer la différente route apparente, que les taches doivent tenir dans les différents temps de l' année selon la différente position des pôles de l'équateur du soleil *par rapport* à son disque, ce qu'on fait aisément après avoir déterminé au moins par un à-peu-près *la* longitude du nœud, que nous avons cherchée & déterminée ici, au moins par une assez grande approximation.

152. Soit dans la fig. 8 PQpQ' le disque apparent du soleil, qui est la base de l'hémisphère de son globe tournée vers la terre, S le centre de ce globe, le demi-cercle QTQ' l'intersection du plan de l'écliptique avec la surface de cet hémisphère, le point Q étant l'oriental, qui reste à gauche, Q' l'occidental à droite, ST son rayon tourné vers la terre, qui sera perpendiculaire au même disque, le point T de la surface de cet hémisphère étant projeté sur le même disque en S. Le diamètre PSp perpendiculaire à l'autre QSQ' sera l'axe de *l'écliptique solaire* QTQ', que l'on peut considérer divisée en signes, & degrés, dans laquelle T sera le lieu héliocentrique de la terre opposé au géocentrique du soleil, & par conséquent éloigné de lui par six signes: P sera ici comme dans les figures 3, 4, 5, 7 le pôle boréal de cette écliptique solaire, & par conséquent p le pôle austral. Le point D soit ici le même que dans la figure 3 & 7 l'intersection de l'écliptique solaire avec le quart de cercle, qui passe par le pôle boréal P' de l'équateur, que nous avons trouvé à la table IV placé à 11ˢ. 10°. 21', ainsi VONV' sera l'équateur solaire sur la même surface de cet hémisphère dans la position héliocentrique de la terre exprimée par la figure. Soit à la fin EFE' le demi-cercle, qui a le pôle en P, & passe par P' en rencontrant les demi-cercles PQp, PTp, PQ'p en E, F, E', avec la ligne droite FG, qui sera perpendiculaire au plan du disque, comme la TS, & la ligne P'P'' parallèle à ces deux, qui rencontrera le diamètre EE' du même demi-cercle EFE' en P''.

153. Le point D se trouvera en Q' au commencement du mois de Juin, parcequ'alors la longitude du soleil vu de la terre étant vers les 2ˢ. 10°, celle de la terre vue du soleil se trouve vers les 8ˢ. 10°, plus occidentale de trois signes, que le point D, qui par conséquent vers ce temps-là se trouve en Q', ce qui porte le point P' en E'. A mesure, que le lieu T héliocentrique de la terre s'avance vers l'orient, avec les points Q, Q' du disque tourné avec elle, le point D s'approche sur le même disque vers le même point T: dans les trois mois suivants ce point parcourt le quart de cercle QT, & le pôle P' le quart de cercle E'F: au

com-

commencement de Septembre ces deux points se trouvent en T & P : ils entrent après sur les quarts de cercle TQ, FE ayant à la moitié de Septembre, qui est le temps des mes observations, à-peu-près la position exprimée par la figure, & vers le commencement du mois de Décembre ils arrivent en Q & E.

154. Ainsi tandis que le lieu T héliocentrique de la terre fait son tour par rapport au soleil en allant autour du pôle P de l'écliptique vers l'orient, *les points* D, P' par rapport à l'hémisphère du *soleil tourné* vers la terre, qui a pour base le disque apparent, *vont* au contraire autour du même pôle d'orient en occident avec une espèce de mouvement rétrograde : le pôle P' se lève en E', pour ainsi dire, en montant sur la surface visible de l'hémisphère tourné à la terre par cette espèce d'horizon formé par la circonférence du disque : il y monte jusqu'en F, & va se coucher en E au commencement du mois de Décembre après être resté visible pendant six mois, & il va se cacher pour les six autres mois derrière ce disque : il parcourt dans ce reste de l'année le demi-cercle opposé, & va par derrière se lever un autre fois au commencement du mois de Juin en E'. Pendant les six premiers mois le pôle austral *p'* parcourt un pareil demi-cercle *efe'* caché derrière le disque, autour du pôle *p*, en se levant au commencement du mois de Décembre en *e*, & se couchant six mois après en *e'*. Si la longitude du nœud N est de $2^s. 18^\circ$ selon la dernière détermination de M. de La-Lande, tout cela arrive vers le huit des mêmes mois après que le lieu de la terre a parcouru ces dix degrés de plus. Tandis que le pôle P' aura par rapport au disque apparent ce mouvement rétrograde autour du pôle P, chaque tache fera autour de ce pôle mobile un mouvement direct, qui sera achevé dans le temps d'une révolution périodique, & le mouvement apparent de la tache sera composé de ces deux mouvements.

155. Chaque lieu du pôle P' & de la tache sera projeté sur le disque, qui paroîtra un plan d'un cercle, par des lignes sensiblement perpendiculaires au même disque, & parallèles à la ligne TS : P' paroîtra dans le diamètre EE' en P'', & F en G. Le mouvement apparent du pôle P' se fera dans un an sur la corde EE'

par

par une double oscillation du point P'' faite en allant par E'GE, & revenant par EGE', & ce seroit le seul mouvement apparent simple d'une tache, qui fût en P ; mais il n'y en a point là, & même on n'en voit pas dans un assez grand éloignement de l'équateur.

156. On déterminera aisément le lieu apparent P'' du pôle P' dans cette corde pour un temps donné, si l'on suppose connu le lieu du nœud. Ayant pris dans la fig. 9 les arcs PE, PE' égaux à la mesure de l'inclinaison de l'équateur solaire à l'écliptique, on tirera la corde EE', qui sera coupée par le diamètre P*p* par le milieu en G : on prendra ce point pour centre, & avec le rayon GE on tirera sur le même plan PQ*p*Q', qui représente le disque, la demi-circonférence EFE', qui rencontrera dans son milieu en F le diamètre *p*P prolongé. On prendra sur la même demi-circonférence depuis E' vers P un arc égal à l'excès de la longitude héliocentrique de la terre sur les 2ˢ, & 10°, ou 18°, c'est-à-dire sur celle, qui fait paroître le pôle en E', & on tirera la ligne P'P'' perpendiculaire à la corde EE' : le point P'' sera le lieu cherché, comme on le voit par la comparaison de cette figure avec la précédente. Si cet excès de longitude va au de-là de 180 degrés ; on prendra l'arc EP' égal à son excès sur ce demi-cercle, & on aura la projection du même pôle caché derrière le disque. Ainsi dans l'hypothèse de 2ˢ. 10°, dans laquelle le pôle se trouve en E' au commencement du mois de Juin, si l'on divise la demi-circonférence E'FE en six parties égales, & on en tire autant de perpendiculaires P'P'' sur le diamètre E'E, on aura par un à-peu-près les lieux apparents pour les commencements dex six premiers mois suivants en allant de E' vers E, & pour les six autres mois on aura en revenant les mêmes lieux correspondants à ce pôle caché derrière le disque.

157. Si la terre restoit immobile pendant la moitié de la révolution synodique là, où elle se trouve au commencement du mois de Juin ; le lieu apparent du pôle restant en E', le mouvement apparent d'une tache placée dans l'équateur solaire se feroit par le diamètre H'S*h*' perpendiculaire au diamètre E'S*e*', & toutes les autres taches par des cordes parallèles au même dia-

mè-

mètre H'h', qui seroient les projections des cercles parallèles à l'équateur. Si la terre restoit immobile dans le point de l'écliptique, qu'elle occupe au commencement du mois de Décembre; la route apparente de la tache placée sur l'équateur seroit le diamètre Hh perpendiculaire au diamètre ES*e*, & celle de toute autre une corde parallèle à celui-là. Dans tous les autres temps de l'année le mouvement d'une tache quelconque se feroit dans une ellipse plus ou moins ouverte, selon que ce temps s'approcheroit plus ou moins du commencement de Septembre, ou de Mars, dans lequel temps le lieu du même pôle étant en G, la route de la tache placée sur l'équateur seroit la demi-ellipse QVQ', dont le grand axe seroit le diamètre QQ', & le petit VS*u* seroit à celui-là en raison du sinus de l'inclinaison de l'équateur au rayon, c'est-à-dire, en prenant pour l'inclinaison 7°. 44', en raison de 135 à 1000, ouverture assez petite, quoique la plus grande de toute l'année. Dans la position du commencement de Septembre, la route apparente seroit la demi-ellipse QVQ', qui va vers le pôle austral *p* de l'écliptique en lui tournant la convexité, & la concavité à l'autre P boréal : au commencement du mois de Mars ce chemin se feroit par l'autre demi-ellipse Q*u*Q', qui tourne la convexité au pôle boréal P. Toutes les autres taches décriroient des arcs d'ellipses plus ou moins éloignées de celle-là, mais toutes semblables avec la concavité tournée vers le pôle boréal P' au commencement de Septembre, & la convexité au commencement du mois de Mars.

158. Dans les autres temps ce seroient des arcs elliptiques, qui tourneroient la concavité au point P'' dans les six mois depuis le commencement de Juin jusqu'au commencement de Décembre, dans lequel temps ce pôle est dans l'hémisphère apparent avant le disque, & tourneroient la convexité dans les six autres, dans lesquels il est caché par derrière. Le petit axe de chacune de ces ellipses se trouveroit sur le diamètre LS*l*, qui passe par P'', & le grand lui seroit perpendiculaire. On voit aisément tout cela, parceque les lignes visuelles tirées de la terre par tous les points de l'équateur & d'un cercle parallèle quelconque formeroient des sur-

fa-

faces de cônes obliques, presque cylindriques à cause de la petitesse du diamètre apparent de soleil, qui coupés par le plan apparent du disque auroient pour sections les ellipses énoncées.

159. La combinaison du mouvement de la terre autour du pôle de l'écliptique avec celui des taches autour du pôle de l'équateur trouble un peu ces ellipses, mais pas beaucoup; parceque comme dans un an il y a 14 périodes de 26 jours, le premier mouvement est petit par rapport au second, & l'arc apparent de 7 à 8 jours, qui borne les observations faites dans une distance suffisante du bord du disque, s'éloigne beaucoup moins de l'arc de l'ellipse, qui convient à la position de la terre du milieu de ce temps, son mouvement de quatre jours portant trop peu de changement dans le lieu apparent P'' du pôle P'. L'éloignement de la ligne droite, la direction du mouvement apparent, & le sens de la concavité ou convexité, tout cela reste trop peu différent de ce qu'il y auroit, si la terre restoit immobile dans ce temps-là. Or d'après ce que nous avons trouvé en considérant ces mouvements rectilignes, & elliptiques, on voit assez clairement, que les commencements du mois de Juin, & de Décembre ne sont pas à propos pour employer la première méthode, dont je me suis servi dans le paragraphe IV pour trouver le lieu du nœud; parcequ' alors les taches suivent une route inclinée à l'écliptique, de manière à s'y approcher continuellement pendant les huit jours utiles pour observer, ou à s'en éloigner, sans qu'on puisse rencontrer deux latitudes de la même dénomination égales, après un intervalle de longitudes assez grande, soit immédiatement, soit par l'interpolation fondée sur deux d'une classe comparées avec une de l'autre peu différente de celles-là. Pour cet objet il faut faire des observations vers le commencement du mois de Mars ou de Septembre. Parmi celles que j'ai eues vers le milieu de ce second mois, j'ai eu d'abord la diminution de la latitude boréale, & après l'augmentation: mais je n'ai pas eu dans la première classe des bien correspondantes aux dernieres de la seconde: je les aurois eu, si j'avois commencé quelques jours avant par une tache, qui s'y fût rencontrée bien distincte com-

me

me, celle-là, & assez, mais pas trop *éloignée* du bord oriental, pour pouvoir la suivre utilement pendant huit jours.

160. Le commencement du mois de Juin, ou de Décembre est beaucoup plus à propos pour trouver l' inclinaison de l' *équateur* par deux positions d' une tache après avoir déterminé le lieu du nœud; parceque cette méthode, comme je l' ai fait remarquer au paragraphe IV, exige une différence considérable des deux latitudes assez éloignées en longitude, & quand je dis différence des deux *latitudes*, on sent bien, que deux latitudes assez grandes, *une australe*, & l'autre *boréale*, quoiqu'égales en grandeur *doivent être censées bien différentes*. C' est dans ce temps-là, que les taches pendant tous les huit jours utiles ou s' approchent continuellement de l' *écliptique solaire*, ou s' en *éloignent* continuellement, ou encore elles la traversent assez *obliquement* pour donner des latitudes assez différentes combinées avec une assez grande différence de longitude. Ces sont les temps les plus à propos pour déterminer plus exactement aussi la longitude du nœud par la méthode exposée au §. VII, qui employe trois positions à-la-fois. Elle exige un calcul considérablement plus long que l' autre des deux *latitudes* de la même dénomination égales entr' elles; mais d' un côté il n' est pas trop pénible après la réduction, que j' en ai fait en des formules si simples, comme on le voit à la fin de ce paragraphe, avec la seule résolution de trois triangles plans, & la forme de tout son procédé, qu' on a à la table XII: de l'autre côté on a alors un rapport beaucoup plus grand du changement de la latitude à celui de la longitude, qui diminue beaucoup l' effet des erreurs commises dans la détermination des latitudes par rapport à la détermination de la longitude du nœud.

161. On pourroit bien déterminer par des points la courbe du mouvement apparent sur le disque du soleil d'une tache, dont on auroit la longitude, & la latitude héliocentrique pour un moment donné, en supposant connus les trois éléments que nous avons cherchés, c' est-à-dire la longitude du nœud de l' équateur solaire sur l'écliptique, son inclinaison, & le temps périodique. Il faudroit ajouter aussi le mouvement de ce nœud, si on en dé-

couvroit un, ce qui sera difficile, s' il est petit, à cause de la difficulté, que j' ai fait voir d' en déterminer exactement la longitude par les observations. Mais il n' y a pas une raison pour le soupçonner dans le soleil, comme on l' a sur la terre par l' action du même soleil, & de la lune sur ce qu' il y a d' excès de matière par-tout, mais beaucoup plus vers l' équateur, au-dessus de la surface d' un globe, qui auroit pour rayon le demi-axe, à cause de l' applatissement de sa figure. En comptant les ascensions droites des taches sur l' équateur solaire depuis un des deux nœuds, & les déclinaisons, comme on les compte pour les étoiles par rapport à l' équateur céleste, qui répond au terrestre, on *trouveroit la longitude de la tache comptée depuis ce* nœud, & par cette longitude & par la latitude son ascension droite & sa *déclinaison :* on conserveroit celle-ci, & on trouveroit de jours en jours la nouvelle ascension droite, en y ajoutant ce qui conviendroit au temps écoulé depuis cette première *époque à* l'autre jour quelconque : par cette nouvelle ascension *droite & par* la déclinaison conservée on trouveroit la nouvelle longitude & latitude, & on réduiroit la première de ces deux à être comptée depuis le commencement du *bélier. On tireroit sur un cercle,* comme *le* PQpQ' de la même figure *9*, qui représenteroit le disque du soleil, *le* diamètre QQ', qui seroit *la projection de l' é*cliptique solaire, & l' autre Pp perpendiculaire à celui-là, qui seroit celle de son axe. On prendroit deux arcs QM, Q'M' égaux à la latitude trouvée vers le pôle *boréal* P, ou vers l' australe *p*, selon que cette latitude *seroit boréale ou australe :* on tireroit la corde MM', qui seroit la projection du cercle *parallèle* à l' écliptique passant par le lieu de la tache. Cette corde seroit coupée par l' axe Pp par le milieu en un point K. On prendroit sur cette corde le segment KI quatrième proportionnel après le rayon, le sinus de la différence de la longitude héliocentrique de la terre & de la tache, & la demi-corde KM vers la partie occidentale M', ou vers *l'* orientale M, selon que la longitude de la tache seroit au contraire plus grande ou plus petite que celle de la terre, bien entendu, que si le commencement du bélier se

trou-

trouvoit entre les deux, on ajouteroit 12 signes à la longitude plus petite pour prendre cette différence : on rejeteroit les positions, qui auroient cette différence plus grande que de 90°, parcequ' alors la tache ne seroit pas dans l' hémisphère tourné vers la terre, mais derrière le disque. Le point I seroit le lieu de la tache pour ce jour-là projeté sur le disque du soleil par une ligne perpendiculaire, comme il est sensiblement le rayon visuel.

162. Une suite de ces points marqueroit la route apparente, qu' on y pourroit dessiner par un trait continu. Elle seroit transcendante, & très-haute sans avoir une équation que différentielle, & celle-ci aussi assez compliquée. Dans le temps qu' en considérant la terre comme arrêtée dans un point de l' écliptique éloigné par trois signes des deux nœuds la ligne parcourue par la tache seroit le diamètre H*h*, ou H'*h*', cette courbe composée auroit même un changement de direction dans sa courbure, parcequ' elle devroit en avoir un peu, qui auroit dans une partie de son arc la cavité tournée vers un des deux pôles P',*p*' de l' équateur, & dans une autre vers l' autre : mais la détermination de tout cela nous meneroit trop loin, & seroit tout-à-fait inutile. On pourroit bien tirer quelque avantage de la projection des lieux observés sur un plan perpendiculaire à l' écliptique, ou sur le plan de celle-ci par les longitudes, & latitudes héliocentriques déterminées de la manière exposée dans les paragraphes III, en employant les valeurs de la table II.

163. Pour le plan perpendiculaire à celui de l' écliptique, sans avoir égard à la position de la terre, on en pourroit prendre un quelconque déterminé par les deux longitudes opposées des points Q & Q' : le point S seroit la projection de deux points de l' écliptique solaire éloignés de ceux-là par trois signes d' un côté, & de l' autre : on prendroit de même les arcs QM, Q'M' égaux aux deux latitudes, on tireroit la corde MKM' : on appliqueroit KM dans un compas de proportion aux nombres 100 des lignes des parties égales : on en prendroit sur cette échelle pour KI le sinus relatif au rayon = 100 de la différence de la longitude de la tache à la longitude d' un de ces deux points intermédiaires :

le point I seroit la projection de cette position de la tache. Tous les points I seroient rangés sur un arc elliptique dans un plan quelconque, à l'exception de ces deux, qui auroient les deux nœuds projetés en S; parcequ'alors les points Q, Q' étant placés à trois signes des nœuds le cercle PQpQ' seroit le colure, qui passe par les deux pôles de l'équateur, & par conséquent l'équateur & tous ses cercles parallèles auroient pour leur projection des lignes droites: ainsi la projection des points observés, qui appartiennent à un arc d'un parallèle, tomberoient sur la ligne droite, qui seroit la projection de celui-là. On verroit la marche de ces points, & si l'on y voyoit quelqu'irrégularité produite par les erreurs des observations, on la corrigeroit en tirant à la main une ligne sensiblement régulière entre ces points. Si l'on trouvoit une ligne droite; on verroit par-là qu'on avoit bien choisi la longitude des nœuds: autrement en la changeant un peu on trouveroit celle, qui donneroit la ligne droite, ce qui détermineroit mieux les vraies longitudes des deux nœuds, & même l'inclinaison de l'équateur; parcequ'une ligne droite parallèle à celle-là tirée par le centre détermineroit les points H, h ou H', h', qui seroient les pôles de l'équateur solaire, & leurs distances aux pôles P, p de l'écliptique donneroient la mesure de la même inclinaison. Les observations faites vers le commencement de Juin ou de Décembre seroient les plus à propos pour cet objet, parcequ'alors on auroit une suite plus grande de latitudes différentes, & celle-ci donneroit une plus grande longueur de cette ligne droite, qui en détermineroit mieux la direction, & par son moyen tous les deux objets, tandis que dans les observations du commencement de Mars, & de Septembre les latitudes revenant les mêmes feroient tomber une partie des points donnés par l'observation avant & après sur un même segment de la ligne droite.

164. En prenant d'autres plans, on obtiendroit par la ligne régulière tirée entre les points observés un arc elliptique, mais d'une ellipse toujours assez mince par rapport à sa longueur. Quand on a un arc d'une ellipse on en peut trouver le centre,

& la

& la poſition de ses axes, qui pourroient ſervir pour déterminer tant la longitude des nœuds, que l' inclinaiſon de l' équateur; mais on détermineroit beaucoup mieux le centre & les axes par un arc d' une ellipſe beaucoup plus ouverte, & approchante de la forme circulaire : on auroit des pareilles ellipſes par la projection faite ſur le plan de l' écliptique, qui ſeroit encore plus facile : on feroit cette projection de la même manière, qu' on a employé au §. VII pour trouver ſur la figure *6* les points D, D', D'', qui *ſont les mêmes*, que dans la figure 5 les projections des *points* C, C', C'' *faites* ſur *le* plan de l' écliptique par les li*gnes perpendiculaires* CD, C'D', C''D''. Il ſuffiroit de faire un cercle d'un rayon SR pris d'une *échelle de* 1000 *parties* : on y marqueroit *les commencements des ſignes au moins* de *deux en deux*, ce qui *eſt* très-aiſé : on y prendroit *le* ſurplus pour arriver à la longitude d' une poſition quelconque de la tache, qu' on marqueroit en B : on tireroit le rayon SB, & on prendroit de la même *échelle* pour SD le co-ſinus au rayon = 1000 de la latitude corrélative : on auroit auſſi tous les points D pour y tracer l' arc régulier, qui ſeroit celui de l' ellipſe cherchée. On pourroit avoir pour chaque journée pluſieurs de ces points en faiſant pluſieurs obſervations à pluſieurs repriſes, comme de deux en deux heures : *mais on éviteroit les petites élévations du ſoleil ſur* l'horizon, ou on auroit égard à l'effet de l'inégalité de la réfraction dans les différents points du diſque, ce qui n' eſt pas difficile.

165. Une opération de cette eſpèce pourroit être utile ſi l' on prenoit un cercle aſſez grand, & un aſſez grand nombre de points pour tracer l' arc, & après lui trouver *le* centre, & les axes de l' ellipſe : mais le plus grand avantage ſeroit celui de connoître, ſ' il n' y a des réſultats des obſervations ſenſiblement fautives par *l'éloignement* de quelques points trop ſenſible de l'allure régulière des autres, pour les réjeter, en corriger d' autres pour les réduire à une régularité ſenſible, & en choiſir un certain nombre pour y appliquer les méthodes propoſées dans tout le cours de cet Opuſcule, où il y a aſſez de matériaux pour perfectionner toute cette théorie.

Tab.

Tab. I.

12^{j}. 2^{h}. 59'. 9'' 3 . 25 . 12 12 . 3 . 12 . 10 − 3 . 48 12 . 3 . 8 . 22	C . . . . 0,189799 A = 559 , 4 . . 2,747722 A×C = 866'', 0 . . 2,937521 R = 15'. 57 , 4 957 , 4 . SB' = 91 , 4 . . $\bar{8}$,039054	SI . . . . 2,814843 *cos.*SIB . . . . 9,714352 *sin.*SIB . . . . 9,932151 BI . . . . 2,529195 SB 2,746994
58', 5 3 , 1 585 1755 181,35 30,22 7,6 5^{s}. 19°. 58,5 5 . 20 . 6,1 = lon. ☉	D = 3°. 55', 5 SB' = 1 , 5 *cos.*D' = 3 . 57 . . . . 9,998967 15 . . . . 1,176091 B = 43'', 2 . . 1,635484 B'I . . . . 2,810542 *tan.*B'SI = 81°. 57' . . . 0,849596	*Fig.* 2 . R . . . . $\bar{7}$,018907 *sin.*SCI = 43°. 0'. . 9,833750 SI = 11 *sin.*TSC = 42 . 49 . . 9,832288
23', 0 3 , 1 230 690 71,30 11,9 3,0 3° . 58,5 3 . 55,5 = dec. ☉	*cos.*I = 23 . 28 . . . . 9,962508 . *cos.*D = 3 . 55 , 5 . . $\bar{0}$,001020 *cos.*P'SP = 23 . 9 . . . 9,963528 SIB = 58 . 48	BI . . . . 2,529195 . SI . . . . $\bar{7}$,185157 *sin.*CSD = 20 . 37 . . 9,546640
	. *sin.*B'SI . . . . $\bar{0}$,004301 B'I . . . . 2,810542 SI = 652'', 9 . . 2,814843 11'	. *cos.*CSD . . . . $\bar{0}$,028744 SB . . . . 2,746994 . SI . . . . $\bar{7}$,185157 *sin.*TSD = 38 . 24 . . 9,793183 *lon.* ♅ = 11^{s}. 20 . 6
		lon.t = 10 . 11 . 42 *lat.t* = 20 . 37 T.M = 12^{j}. 3^{h}. 1

Tab.

Tab. II.

	T. M.	lon.*t*	lat.B.*t*
1	$12^j.\ 3^h.\ 1'$	$10^s.\ 11^\circ.\ 42'$	$20^\circ.\ 37'$
2	13 . 2 . 32	10 . 24 . 42	20 . 6
3	15 . 3 . 7	11 . 20 . 3	19 . 33
4	16 . 3 . 43	0 . 3 . 1	19 . 53
5	17 . 3 . 18	0 . 15 . 23	21 . 14
6	19 . 2 . 30	1 . 11 . 9	22 . 45

Tab. III. bin. 3 & 5

C'' — C' =	.. $1^\circ.\ 41'$ =	$101'$ ..	$\bar{7}$,995679
B'' — B' =	.. 25 . 20 =	1520 ..	3,181844
C — C' =	.. 1 . 4 =	64 ..	1,806180
X =	.. 16 . 3 =	963 ..	2,983703
B' =	$11^s.\ 20.\ 3$		
L =	12 . 6 . 6		
B =	10 . 11 . 42		
B + L =	22 . 17 . 48		
long.D =	11 . 8 . 54		

C — C' =	....	33 ..	1,518514
X =	.. 8 . 17 =	497 ..	2,696037
B' =	11 . 20 . 3		
L =	11 . 28 . 20		
B =	10 . 24 . 42		
B + L =	22 . 23 . 2		
long.D =	11 . 11 . 31		

Tab. IV.

$11^s.\ 8^\circ.\ 54$ 11 . 31	3 & 5
10 . 43 14 . 51	4 & 5
12 . 14 15 . 18	4 & 6
8 . 18 10 . 25	5 & 6
somme = .. 92 . 14	
long.D = 11 . 11 . 32	

En ôtant la quatrième & la sixième

somme = .. 62 . 5

long.D = 11 . 10 . 21

long.N = 2 . 10 . 21

Tab.

Tab. V.

N = 2ˢ. 10°. 21'	BC = 19°. 33'	. 1,86455 . . $\bar{9}$,729426	*cos.*BC . . 9,974212
B' = 1 . 11 . 9	B'C' = 22 . 45	0,02015 . . 8,304275	*sin.*DSD' . . 9,891115
B = 11 . 20 . 3	SD = 0,94235	*tan.* 64°. 27' . . 0,320529	*sin.*D'GF . . 9,774899
SD'H = 29 . 12	SD' = 0,92220	*tan.* 1 . 18 . . 8,354230	. C'I . . $\bar{1}$,283329
DSD' = 51 . 6	1,86455	SD'D = 65 . 45	. *sin.*SD'D . . $\bar{0}$,040119
supplém. 128 . 54	0,02015	SD'H = 29 . 12	*cot.* 6°. 12' . . 0,963674
64 . 27	CD = 0,33463	D'GF = 36 . 33	
	C'D' = 0,38671		
	C'I = 0,05208		

Tab. VI.

3 : 6	6°. 12'
4 : 6	6 . 22
2 : 5	7 . 28
3 : 5	9 . 26
1 : 3	9 . 12
	38 . 40
	7 . 44

Tab. VII.

*long.*D = 11ˢ. 10°. 21'		
*long.*B = 10 . 11 . 42		
*cos.*BD =	. . 28 . 39	. . 9,943279
*cot.*BC =	. . 20 . 37	. . 0,424573
*tan.*PM =	. . 66 . 48	. . 0,367852
PP' =	. . 7 . 44	
. *sin.*P'M =	. . 59 . 4	. . $\bar{0}$,066631
*sin.*PM	. . . .	. 9,963379
*tan.*BD	. . . .	. 9,737471
*tan.*CP'D =	. . 30 . 21	. . 9,767481

Tab. VIII.

1	30°. 21'
2	16 . 36
3	— 10 . 17
4	— 24 . 0
5	— 37 . 6
6	— 63 . 56

Tab. IX.

4	16ʲ. 3ʰ,7	
1	12 . 3 ,0	
	4 . 0 ,7	
T	96 ,7 . .	1,985426
. M = 54°. 21'. = 3261' . . .		$\bar{6}$,486649
	900 . . .	2,954242
T' = 26ʲ, 69		1,426317

Tab. X.

4 : 1 . .	26ʲ, 69
5 : 1 . .	26 , 75
6 : 1 . .	26 , 65
5 : 2 . .	27 , 04
6 : 2 . .	26 , 82
6 : 3 . .	26 , 67
	160 , 62
	26 , 77

Tab. XI.

A = 365ʲ, 25 . .	2,562590
T̀ = 26 , 77 . .	1,427648
. (A — T̀) = 338 , 48 . .	$\bar{7}$,470468
T'' = 28 , 89 . .	1,460706

Tab.

Tab. XII.

1 ... B =	10ˢ. 11°. 42'
3 ... B' =	11 . 20 . 3
6 ... B'' =	1 . 11 . 9
DSD' =	38 . 21
Supplém. . .	141 . 39
	70 . 49 , 5
D''SD' =	51 . 6
Supplém. . .	128 . 54
	64 . 27
BC =	20 . 37
B'C' =	19 . 33
B''C'' =	22 . 45

SD =	0,93596
SD' =	0,94235
SD'' =	0,92220
	1,87831
	0,00639
	1,86455
	0,02015
CD =	0,35211
C'D' =	0,33463
C''D'' =	0,38671
CI =	0,01748
C''I' =	0,05208

. 1,87831	$\bar{9}$,726232
0,00639	7,805501
tan. 70°.49',5 . .	0,458736
tan. 0 . 33 , 7 . .	7,990469
SD'D = 70 . 16	
. 1,86455	$\bar{9}$,729426
0,02015	8,304275
tan. 64°. 27' . . .	0,320529
tan. 1 . 18	8,354230
SD'D'' = 63°. 9'	
SD''D' = 65 . 45	
G'D'G = 133 . 25	

sin.B'C'	9,524564
cos.BC	9,971256
sin.DSD'	9,792716
.CI	$\bar{1}$,757459
. *sin*.SD'D	$\bar{0}$,026284
D'G = 11,81	1,072279

sin.B'C'	9,524564
cos.B''C''	9,964826
sin.D''SD'	9,891115
.C''I'	$\bar{1}$,283329
. *sin*.SD'D''	$\bar{0}$,049542
D'G' = 5,169	0,713376

D'G' =	5,169
	16,979
	6,641
G'D'G = 133°. 25'	
Suppl. . .	36 . 35
	23 . 17,5

. 16,979 . . .	$\bar{8}$,770088
6,641 . . .	0,822233
tan. 23°. 17', 5 . .	9,633969
tan. 9 . 33 , 5 . .	9,226290
D'G'G = 32 . 51	
SD''D' = 65 . 45	
B''SN = 32 . 54	
B'' = 1ˢ. 11 . 9	
N = 2 . 14 . 3	

cos.B''C''	9,964826
sin.D''SD'	9,891115
sin.D'G'G	9,734353
. C''I'	$\bar{1}$,283329
. *sin*.SD'D''	$\bar{0}$,049542
cot. 6°. 49' . . .	0,922165

APPENDICE.

Journal des Observations de plusieurs taches du soleil faites à Noslon près de Sens chez S. E. Mgr le Cardinal de Luynes l' année 1777.

1. On avoit vu le 11 Sept. une belle tache du soleil avancée sur son disque du côté du bord oriental; le jour suivant j'ai commençai à en déterminer les positions à l' aide d' une excellente pendule à secondes, & une machine parallatique, qui avoit une lunette de 27 pouces de foyer de son objectif munie d' un micromètre. La pendule étoit réglée à une méridienne vérifiée plusieurs fois par les hauteurs correspondantes: le même jour 11 on examina le micromètre: on trouva son fil mobile bien d' accord avec le fixe du milieu, quand l' index marquoit zero; & le diamètre apparent du soleil par un bon nombre d' observations, qui ne différoient de presque rien entr' elles, de 1237 parties, le même étant alors de 31'. 55" dans la Connoissance des temps.

2. J' ai déterminé tous les jours la différence horaire de cette tache, & des autres survenues après au centre du soleil par l' arrivée des deux bords du soleil, & de la tache au fil horaire perpendiculaire au mobile parcouru, ou côtoyé par une des taches, ce qui donne la différence en ascension droite, & pour la différence en déclinaison j'ai porté le fil fixe parallèle au mobile sur chaque tache, & le mobile au bord boréal du soleil.

3. Je mettrai premiérement le nombre des parties du micromètre, qui donnent la distance de la tache au parallèle du bord boréal: en la réduisant en parties du grand cercle, & en l' ôtant du demi-diamètre du soleil, on trouve la différence de déclinaison de la tache à celle du centre, le signe positif indiquant, que la tache est plus boréale, le négatif plus australe: mais on n' en a trouvé aucune plus australe.

4. Je mettrai après les temps des bords, & des taches: la demi

diffé-

différence des temps des deux bords donne le temps du centre, qui ôté du temps de la tache, donne la différence horaire en ascension droite, le signe positif indiquant, que la tache est plus orientale, le négatif plus occidentale. Je mettrai ces différences après les observations. On verra, que le mouvement dans 24 heure de la tache par rapport au centre est très-petit : ainsi on pourra prendre le milieu entre plusieurs observations, & l'appliquer à un temps intermédiaire pris en heures, & minutes, en négligeant les secondes, & prenant même les minutes par un à-peu-près.

12. Sept.

bord boréal...*561* ; *555* ; *559* ; *563* ; *559* : milieu *559*,4

1 bord..$2^h.59'.9''$	$3^h.6'.42''$	$3^h.10'.32''$	$3^h.14'.27''$	$3^h.22'.3''$
tache..3 . 0.55	3 . 8.29	3 .12.20	3 .16.14	3 .23.51
2 bord..3 . 1.16	3 . 8.50	3 .12.40	3 .16.35	3 .25.12

Différence ... $42''$,5 ; $43''$; $44''$; $43''$; $43''$,5 : milieu $43''$,2

13. Sept.

5. *J'ai déterminé la même tache* : j'en ai vu avec un bon télescope une autre très-mince près du même bord, mais on ne la voyoit pas avec la lunette de la machine parallatique.

bord boréal...526 ; 524 ; 521 ; 527 ; 524 : milieu 524,4

1 bord..$2^h.33'.4''$	$2^h.35'.44''$	$2^h.39'.48''$	$2^h.42'.33''$	$2^h.50'.11''$
tache..2 .34.41	2 .37.21	2 .41.25	2 .44.11	2 .51.49
2 bord..2 .35.11	2 .37.52	2 .41.56	2 .44.41	2 .52.21

Différence ... $33''$,5 ; $33''$; $33''$; $34''$; $33''$: milieu $33''$,3

15. Sept.

7. On voyoit déjà bien la seconde tache plus arrondie avec la petite lunette. La première étoit beaucoup plus grande : avec le grand

télescope on les voyoit bien distinctes avec cette espèce d'atmosphère de petits points, qui d'ordinaire environne le noyau bien noir.

1 tache: bord bor. . . 440; 440; 440; 440; 440 : milieu 440
2 tache: bord bor. . . 522; 522; 522; 522; 522 : milieu 522

1 bord	$3^h. 6'. 42''$	$3^h. 14'. 8''$	$3^h. 17'. 45''$	$3^h. 20'. 48''$	$3^h. 24'. 16''$
1 tache	3 . 7 . 57	3 . 15 . 23	3 . 19 . 0	3 . 22 . 4	3 . 25 . 32
2 tache	3 . 8 . 24	3 . 15 . 49	3 . 19 . 27	3 . 22 . 30	3 . 25 . 58
2 bord	3 . 8 . 50	3 . 16 . 15	3 . 19 . 53	3 . 22 . 56	3 . 26 . 24

Différence 1 tache 11″; 11″; 11″; 12″; 12″ : milieu 11″,4
2 tache 38; 37,5; 38; 38; 38 : milieu 37,9

---

16. Sept.

8. On voyoit la première tache dans la petite lunette comme un peu allongée; mais le télescope faisoit voir deux autres petites taches presque contigues entr'elles & à la première, le tout étant environné de cette espèce d'atmosphère de petits points étendue aussi autour des deux nouvelles petites : j'ai continué à observer la même grande, & la seconde du jour précédent bien petite, mais plus grande, que les deux nouvelles, & environnée de son atmosphère.

1 tache: bord bor. . . 388; 388; 389; 390; 388 : milieu 388,6
2 tache: bord bor. . . 486; 484; 484; 485; 485 : milieu 484,8

1 bord	$3^h. 42'. 35''$	$3^h. 45'. 29''$	$3^h. 48'. 22''$	$3^h. 51'. 19''$	$3^h. 54'. 3''$
1 tache	3 . 43 . 39	3 . 46 . 33	3 . 49 . 25	3 . 52 . 23	3 . 55 . 8
2 tache	3 . 44 . 15	3 . 47 . 8	3 . 50 . 1	3 . 52 . 59	3 . 55 . 44
2 bord	3 . 44 . 43	3 . 47 . 37	3 . 50 . 30	3 . 53 . 27	3 . 56 . 12

Différence 1 tache 0″; 0″; — 1″; 0″; 1″ : milieu 0″
2 tache 36; 35; 35; 36; 36,5 : milieu 35,7

---

17. Sept.

9. Par le télescope on voyoit la grande tache comme le jour précédent; mais à la place de deux petites, on n'en voyoit qu'une

une de ce côté-là , & du côté opposé deux très-près l' une de l' autre , & une autre un peu plus éloignée de la grande , toutes avec des atmosphères : la seconde paroissoit bien distincte avec son atmosphère , comme le jour précédent : on la voyoit très-bien dans la petite lunette.

1 tache : bord bor. 331 ; 332 ; 334 ; 334 ; 331 : milieu 332,4
2 tache : bord bor. 442 ; 442 ; 440 ; 441 ; 441 : milieu 441,2

1 bord ..	3^h. 18'. 0"	3^h. 24'. 23"	3^h. 28'. 12"	3^h. 31'. 21"	3^h. 35'. 12"
1 tache ..	3 . 18 . 53	3 . 25 . 16	3 . 29 . 6	3 . 32 . 15	3 . 36 . 7
2 tache ..	3 . 19 . 18	3 . 25 . 41	3 . 29 . 30	3 . 32 . 40	3 . 36 . 31
2 bord ..	3 . 20 . 7	3 . 26 . 30	3 . 30 . 19	3 . 33 . 29	3 . 37 . 20

Diff. 1 tache — 10", 5 ; — 10", 5 ; — 9", 5 ; — 10 ; — 9" : milieu — 9", 9
2 tache 14 , 5 ; 14 , 5 ; 14 , 5 ; 15,5 ; 15 : milieu 14 , 8

19. Sept.

11. La première tache regardée par le télescope étoit diminuée, mais avoit son atmosphère , & toutes ses compagnes étoient disparues . La *seconde & la troisième* étoient grossies de manière, que *la seconde bien ronde* en apparence avoit une petite compagne bien peu éloignée , & la troisième moins mince aussi la sienne . L' une , & l' autre avoient le noyau bien noir entouré de cette espèce d' atmosphère .

1 tache : bord bor. 239 ; 241 ; 240 ; 240 ; 240 : milieu 240
2 tache : bord bor. 330 ; 332 ; 334 ; 332 ; 332 : milieu 332
3 tache : bord bor. 610 ; 609 ; 611 ; 610 ; 611 : milieu 610,2

1 bord ..	2^h. 34'. 26"	2^h. 37'. 14"	2^h. 41'. 51"	2^h. 43'. 47"	2^h. 46'. 43"
1 tache ..	2 . 35 . 3	2 . 37 . 50	2 . 42 . 26	2 . 44 . 23	2 . 47 . 19
2 tache ..	2 . 35 . 24	2 . 38 . 10	2 . 42 . 47	2 . 44 . 44	2 . 47 . 40
3 tache ..	2 . 36 . 22	2 . 39 . 8	2 . 43 . 46	2 . 45 . 43	2 . 48 . 39
2 bord ..	2 . 36 . 34	2 . 39 . 22	2 . 43 . 59	2 . 45 . 55	2 . 48 . 51

Diff. 1 tache — 27" ; — 28" ; — 29" ; — 28" ; — 28" : milieu — 28"
2 tache — 6 ; — 8 ; — 8 ; — 7 ; — 7 : milieu — 7,2
3 tache 52 ; 50 ; 51 ; 52 ; 52 : milieu 51,4

21. Sept.

12. Le ciel n' étoit pas assez pur, & de temps en temps en voyant bien tout le disque du soleil, on ne pouvoit pas apercevoir les taches. A' la fin on vit avec la lunette de la machine parallatique la seconde, & la troisième des jours précédents: on voyoit foiblement la petite compagne de la troisième, & une, qu'on crut nouvelle un peu plus boréale, & un peu plus occidentale. On ne put jamais voir la première ni avec la petite lunette, ni avec le télescope, quoique on voyoit de temps en temps aussi bien la seconde peu éloignée de sa place, laquelle pourtant avoit perdu sa petite compagne, & paroissoit plus petite. Voici les déterminations de la seconde & troisième des jours précédents.

2 tache: bord bor. 242; 242; 240; 243; 241 : milieu 241,6
3 tache: bord bor. 592; 592; 594; 594; 592 : milieu 592,8

1 bord .. 2ʰ. 47′. 29″	2ʰ. 51′. 54″	2ʰ. 55′. 8″	2ʰ. 58′. 45″	3ʰ. 1′. 42″
2 tache .. 2 . 48 . 6	2 . 52 . 32	2 . 55 . 47	2 . 59 . 23	3 . 2 . 20
3 tache .. 2 . 49 . 2	2 . 53 . 28	2 . 56 . 42	3 . 0 . 19	3 . 3 . 16
2 bord .. 2 . 49 . 37	2 . 54 . 2	2 . 58 . 16	3 . 0 . 53	3 . 3 . 50

Diff. 2 tache —27″; —26″; —25″; —26″; —26″: milieu —26″
3 tache 29; 30; 30; 30; 30: milieu 29,8

22. Sept.

13. La seconde tache étoit aussi disparue, & il y en avoit une nouvelle vers le bord oriental, qu' on voyoit bien avec la petite lunette: avec le télescope on en découvroit aussi une autre beaucoup moins éloignée du bord, & très-foible. Dans l' endroit de la troisième on en voyoit trois: une beaucoup plus foible que les deux autres, qu' on y avoit vu le jour précédent: une de ces deux, qui avoit été déterminée ce jour-là, avoit une petite compagne à côté, & je crois que celle-là fût la troisième des jours antérieurs: mais j'ai commencé à déterminer la position de toutes les deux pour le cas, où celle-ci, qui sera ici la précé-

dent

dente des deux mises au num. 3, fut celle, qu'on a observé depuis le 19. La 4 sera la nouvelle.

3 tache : bord bor. { 494 ; 496 ; 496 ; 496 ; 496 : milieu 495,6
{ 516 ; 518 ; 517 ; 518 ; 518 : milieu 517,4
4 tache : bord bor. 641 ; 640 ; 640 ; 640 ; 640 : milieu 640,2

1 bord ..	2^h.36'.23"	2^h.39'.24"	2^h.42'.30"	2^h.45'.10"	2^h.48'. 2"
3 tache	2.37.21	2.40.23	2.43.27	2.46. 7	2.49. 0
	2.37.26	2.40.28	2.43.33	2.46.12	2.49. 5
4 tache ..	2.38.20	2.41.23	2.44.29	2.47. 8	2.50. 0
2 bord ..	2.38.31	2.41.32	2.44.38	2.47.17	2.50.10

3 tache { — 6" ; — 5" ; — 7" ; — 6",5 ; — 6" : milieu — 6",1
{ — 1 ; — 0 ; — 1 ; — 1,5 ; — 1 : milieu — 0,9
4 tache .... 53 ; 55 ; 55 ; 54,5 ; 54 : milieu 54,3

23. Sept.

14. La première des deux marquées 3 paroissoit plus grande que la seconde ; après la 4 on en voyoit une autre nouvelle plus près du bord.

3 tache : bord bor. { 432 ; 431 ; 431 ; 433 ; 432 : milieu 431,8
{ 461 ; 461 ; 461 ; 462 ; 462 : milieu 461,4
4 tache : bord bor. 610 ; 610 ; 609 : 608 ; 608 : milieu 609

1 bord ..	2^h.28'.16"	2^h.30'.55"	2^h.33'.49"	2^h.36'.42"	2^h.39'. 11"
3 tache	2.29. 2	2.31.41	2.34.34	2.37.27	2.39.57
	2.29. 7	2.31.46	2.34.39	2.37.32	2.40. 1
4 tache ..	2.30. 7	2.32.45	2.35.34	2.38.32	2.41. 2
2 bord ..	2.30.24	2.33. 3	2.35.57	2.38.50	2.41.19

3 tache { — 18" ; — 18" ; — 19" ; — 19" ; — 18" : milieu — 18",4
{ — 13 ; — 13 ; — 14 ; — 14 ; — 14 : milieu — 13,6
4 tache .... 47 ; 46 ; 46 ; 46 ; 47 : milieu 46,4

25. Sept.

25. Sept.

15. J' ai déterminé la position des trois mêmes précédentes il y en avoit une autre nouvelle plus près du bord ; mais je n' en ai pas pris la position.

3 tache : bord bor.	474 ;	474 ;	474 ;	474 ;	475	: milieu 474,2
	500 ;	500 ;	500 ;	500 ;	501	: milieu 500,2
4 tache : bord bor.	562 ;	562 ;	563 ;	563 ;	563	: milieu 562,6

1 bord	2h. 23'. 17"	2h. 27'. 25"	2h. 30'. 1"	2h. 32'. 55"	2h. 35'. 41"
3 tache	2 . 23 . 51	2 . 27 . 59	2 . 30 . 36	2 . 33 . 30	2 . 36 . 15
	2 . 23 . 56	2 . 28 . 4	2 . 30 . 41	2 . 33 . 35	2 . 36 . 20
4 tache	2 . 24 . 56	2 . 29 . 5	2 . 31 . 41	2 . 34 . 35	2 . 37 . 20
2 bord	2 . 25 . 25	2 . 29 . 33	2 . 32 . 9	2 . 35 . 3	2 . 37 . 49

3 tache	— 30" ;	— 30" ;	— 29" ;	— 29" ;	— 30"	: milieu — 29",6
	— 25 ;	— 25 ;	— 24 ;	— 24 ;	— 25	: milieu — 24,6
4 tache	35 ;	36 ;	36 ;	36 ;	35	: milieu 35,6

26. Sept.

16. On voyoit avec beaucoup de difficulté les deux marquées 3 : on voyoit très-bien la quatrième avec sa suivante, qui en avoit plusieurs plus petites vers la précédente, comme aussi on voyoit encore la nouvelle plus près du bord. M. Brisson de l' Académie des Sciences a été présent à l' observation : je lui ai fait voir les taches, & directement sur le soleil par la petite lunette, & par le télescope, & sur l' image prise tant vis-à-vis de la lunette, que renvoyée à côté par un petit miroir de métal appliqué devant l' oculaire.

3 tache : bord bor. { 338 , 336 , 339 ; 338 ; 337 : milieu 337,6
                              357 ; 358 ; 358 ; 357 ; 357 : milieu 357,4

4 tache : bord bor. 507 ; 508 ; 508 ; 509 ; 509 : milieu 508,2

1 bord ..	$3^h.\ 2'.\ 22''$	$3^h.\ 5'.\ 11''$	$3^h.\ 8'.\ 3''$	$3^h.\ 11'.\ 33''$	$3^h.\ 15'.\ 52''$
3 tache	3 . 2 . 47	3 . 5 . 35	3 . 8 . 28	3 . 12 . 0	3 . 16 . 16
	3 . 2 . 52	3 . 5 . 40	3 . 8 . 33	3 . 12 . 5	3 . 16 . 21
4 tache ..	3 . 3 . 52	3 . 6 . 40	3 . 9 . 33	3 . 13 . 5	3 . 17 . 21
2 bord ..	3 . 4 . 30	3 . 7 . 19	3 . 10 . 11	3 . 13 . 41	3 . 18 . 0

3 tache { − 39″; − 40″; − 39″; − 37″; − 40″: milieu − 39
                 − 34 ; − 35 ; − 34 ; − 32 ; − 35 : milieu − 34

4 tache..... 26 ; 25 ; 26 ; 28 ; 25 : milieu 26

27. Sept.

17. Les deux marquées 3 n' étoient plus visibles : j'ai déterminé la seule 4 , mais à côté de sa compagne il y en avoit plusieurs , comme aussi on voyoit bien les deux autres des jours précédents avec d'autres petites : je n' en parlerai plus , & je me bornerai à la seule détermination de la 4 ; puisque le départ de Noslon fixé pour le commencement d'Octobre rend inutile la détermination des nouvelles.

4 tache : bord bor. 470 ; 468 ; 470 ; 468 ; 470 : milieu 469,2

1 bord ...	$2^h.\ 25'.\ 47''$	$2^h.\ 28'.\ 36''$	$2^h.\ 31'.\ 25''$
4 tache ...	2 . 26 . 47	2 . 29 . 36	2 . 32 . 25
2 bord ...	2 . 27 . 54	2 . 30 . 43	2 . 33 . 33

4 tache ... 2″, 5 ; 3″, 5 ; 4″ ; milieu 3″, 3

28. Sept.

18. On voyoit bien toutes les taches du jour précédent avec du changement dans leurs petites compagnes , & sans aucune nouvelle vers le bord oriental ; j'ai déterminé la position de la seule marquée 4 .

4 tache: bord bor. *398 ; 398 ; 399 ; 399* : milieu *398, 5*

1 bord . . .	$2^h. 20'. 16''$	$2^h. 24'. 44''$	$2^h. 27'. 32''$	$2^h. 33'. 5[illegible]''$
4 tache . . .	2 . 21 . 3	2 . 25 . 32	2 . 28 . 18	2 . 34 . 43
2 bord . . .	2 . 22 . 24	2 . 26 . 52	2 . 29 . 40	2 . 36 . 4

4 tache — 17''; — 16''; — 18''; — 17'': milieu — 17''

29. Sept.

19. On voyoit très-bien les taches des jours précédents : celle, que je continuois à déterminer, étoit belle, isolée, pure : autour de deux autres il y avoit un bon nombre des petites, surtout autour d' une des deux : on voyoit une nouvelle bien belle, isolée, pure, très-près du bord oriental, sur lequel elle avoit monté probablement peu après l' observation du jour précédent. Le départ fixé pour le 1 Oct. ne permit pas d' y faire attention.

4 tache: bord bor. *333 ; 333 ; 333 ; 333* : milieu *333*

1 bord . . .	$1^h. 52'. 49''$	$1^h. 55'. 36''$	$1^h. 58'. 17''$	$2^h. 1'. 3''$
4 tache . . .	1 . 53 . 25	1 . 56 . 12	1 . 58 . 54	2 . 1 . 39
2 bord . . .	1 . 54 . 57	1 . 57 . 44	2 . 0 . 25	2 . 3 . 11

4 tache — 28''; — 28''; — 27''; — 28'': milieu — 27'', 7

20. Ayant fait toutes ces observations, j' ai calculé après la position géocentrique & héliocentrique de la première tache seule, pour en déduire les éléments de la révolution du soleil autour de son axe dans l' Opuscule précédent, où j'en ai développé toute la théorie.

OPU-

OPUSCULUM III.

De determinatione longitudinis penduli oscillantis ad singula secunda temporis medii.

INTRODUCTIO.

1. LONGITUDO penduli simplicis oscillantis ad singula secunda temporis medii est distantia puncti suspensionis, quod est centrum circuli descripti, usque ad id punctum, in quo concipitur unitum totum pondus oscillans, factâ abstractione a mole, & figura ponderis, ac a pondere fili, cui affigitur, & concipiendo oscillationes excurrentes per arcus minimos ita, ut singulis horis temporis medii respondeant accurate oscillationes 3600: si libet, addi potest conditio oscillationum factarum in vacuo.

2. Hæ conditiones haberi non possunt in experimentis, in quibus debet adhiberi pondus molis, & figuræ cujusdam, ac suspendi per filum: res esset nimis molesta reductio longitudinis penduli ad eam, quæ exhibeat accurate eum numerum secundorum eo tempore: arcus debent esse cujusdam magnitudinis, ut observari possit numerus oscillationum, & oscillationes conservari possint tempore satis longo ad habendum numerum satis magnum, in quo error exiguæ partis unius oscillationis distributus per totum numerum evadat insensibilis respectu longitudinis determinandæ per numerum eundem. Observatio potest quidem institui in vacuo saltem eo, quod obtineri potest in machina pneumatica, sed ob difficultatem ejus observationis plerumque fit in aere libero.

3. Quod pertinet ad molem & figuram, ad virgam, vel filum, habetur remedium ei malo ex formulis Hugenii pro centro oscillationis. Datâ figurâ & pondere tam massæ oscillantis, quam fili sustinentis, & distantiâ ipsius molis a puncto suspensionis,

quod sit centrum arcus descripti, invenitur facile per eas formulas distantia puncti suspensionis a centro oscillationis, in quo si totum pondus & massæ, & fili esset compenetratum, oscillationes essent æque diuturnæ. Omnis cura observatoris ex eo capite debet collocari in seligenda materia, & figura massæ, quæ debet esse homogenea sine vacuis interpositis, & sine inæqualitate densitatis, & seligenda forma suspensionis, ac habendo accurate pondere tam massæ, & eorum omnium, quæ adhibentur pro suspensione, ac simul moveri debent, quam *fili*, *cum distantia puncti* suspensionis ab aliquo puncto dato *massæ ipsius*.

4. Reductio ad *oscillationes accurate respondentes secundis temporis medii facile* evitatur assumptâ longitudine quavis, & notato numero *oscillationum ipsius*, qui respondeat dato cuipiam numero secundorum eorundem satis magno: cum enim ex legibus gravitatis Galileanæ, & compertis Hugenii circa descensus in curvis lineis debeant esse quadrata numerorum oscillationum factarum dato tempore reciproce ut longitudines pendulorum; determinatâ ea longitudine, & eo numero *oscillationum*, invenitur facile longitudo, quæ respondeat accurate singulis secundis, faciendo ut quadratum numeri secundorum ad quadratum numeri oscillationum habiti ex observatione, ita longitudo determinata penduli adhibiti assumpta a puncto suspensionis usque ad centrum oscillationis ad longitudinem quæsitam. Quare omnis cura observatoris ex eo capite post determinatam longitudinem penduli simplicis isochroni suo pendulo debet collocari in determinando accurate numero oscillationum ipsius respondentium tempori satis longo, & numero secundorum temporis medii respondentium eidem tempori, habitâ ratione, si opus sit, etiam *partis unius oscillationis*.

5. Magnitudo arcus *minus accurate compensari potest*, *quam superiora duo capita*. Potest *observari* satis accurate magnitudo arcus cujusvis oscillationis: potest per theoriam corporum *oscillantium* determinari ratio temporis ejus oscillationis ad tempus per arcus minimos, unde profluit ratio numeri oscillationum ipsi æqualium ad numerum oscillationum, qui haberetur in arcubus minimis eodem tempore, adeoque hic ipse numerus. Sed oscillatio-

nes non durant diu magnitudinis ejusdem potissimum in aere : hujus resistentia , & resistentia aliqua in puncto suspensionis , quæ agit etiam in machina pneumatica , imminuunt sensim ipsos arcus . Adhuc tamen potest afferri remedium etiam huic malo , determinando per observationem factam identidem ipsam magnitudinem arcus . Ope ejus determinationis potest evitari omnis error sensibilis adhibito calculo idoneo : potest itidem effici , ut inæqualitas arcuum non sit ita notabilis , reddendo identidem motum ipsi *pendulo* , & determinando per idoneam observationem *effectum impulsionis adhibitæ* in acceleranda per eam vim ex*traneam ea oscillatione . Hinc omnis cura observatoris ex eo capite debet collocari in seligenda methodo accurata determinandi magnitudinem arcus oscillationis identidem , & , si libeat restituere* motum , in seligenda methodo imprimendi motum novum , & determinandi quantitatem , per quam prima oscillatio impulsionis *novæ* acceleratur vi illa externa , ac in adhibendis diligenter me*thodis* , quæ fuerint selectæ .

6. Effectus aeris extra machinam pneumaticam est duplex : primo quidem *ejus gravitas imminuit vim* gravitatis massæ per quantitatem respondentem gravitati specificæ utriusque . Immi nutio celeritatis cujusvis oscillationis , adeoque numeri oscillationum respondentium dato tempori , *facile* computatur data ratione earum gravitatum specificarum . Deinde resistentia , quæ oritur e motu impresso aeri a massa oscillante , retardat itidem oscillationes singulas , adeoque imminuit numerum oscillationum respondentium dato tempori . Ea accurato calculo determinari non potest , cum nondum inventa sit ratio determinandi per calculum effectus resistentiæ fluidorum potissimum elasticorum sine hypothesibus arbitrariis . Ipsa imminutio arcus oscillationum , quam diximus ob*servari* debere identidem , potest prodesse ad æstimandum effectum *resistentiæ* , in ordine ad producendum tempus cujusvis oscillationis . V*erum evitatur* plurimum ejus effectus , si adhibeatur pondus *non exiguum* , quod quo est *majus* cum *majore* densitate materiæ adhibendæ , quæ imminuat molem , eo is effectus est minor , adeoque error residuus in ejus effectus æstimatione est minor .

minor .

nor. Deinde potest inquiri in eum effectum per observationes; observando nimirum eodem pendulo in aere *libero*, & in vacuo machinæ pneumaticæ, atque id adhibendo arcus variæ magnitudinis. Diversa aeris densitas orta ex diversa constitutione atmosphæræ inducit aliquod discrimen: sed imprimis id debet esse admodum exiguum, & cum totus effectus sit jam exiguus, videtur id discrimen tuto negligi posse. Deinde posset inquiri in id ipsum per seriem observationum institutarum in diversis constitutionibus barometri expositi aeri *libero*, *vel in diversis altitudinibus* barometri inclusi machinæ pneumaticæ, aere magis, *vel minus* exhausto. Observatoris *cura* ex eo *capite reducitur* ad *summum* ad observandum *identidem statum* barometri, & thermometri tempore suæ observationis.

7. Observatio thermometri necessaria est etiam ad habendam longitudinem penduli, quæ non potest determinari ab observatore, nisi per comparationem cum aliqua mensura metallica, in qua habeatur accurata longitudo pedum aliquot, ut trium. Cum ea varietur, variatâ altitudine thermometri, necessarius est hujus status ad comparandas *inter* se *longitudines* penduli simplicis observatas in *diversis locis reducendo ipsas ad statum* communem cujuspiam *temperaturæ constantis*.

8. Dicendum de singulis, quæ *proposita* sunt, & *pertinent* ad observationem rite instituendam, ac deducendam inde quæsitam longitudinem penduli simplicis: 1 de materia massæ oscillantis: 2 de figura: 3 de magnitudine, & ejus mensura: 4 de filo sustinente massam: 5 de suspensione: *6* de mensura distantiæ centri arcus oscillando descripti ab aliquo puncto dato ipsius massæ: 7 de determinando numero oscillationum respondentium tempori longo: 8 de determinando numero secundorum temporis medii, qui respondet eidem tempori: *9* de determinanda magnitudine arcus descripti: 10 de restituendo motu: 11 de determinanda acceleratione primæ oscillationis post impulsum facta per vim extraneam. Addetur methodus deducendi ex magnitudine arcuum identidem observata, & numero oscillationum inter eas arcuum observationes numerum oscillationum, quæ haberentur, si arcus essent

mi-

minimi omnes, & methodus eruendi inde longitudinem quæsitam penduli illius idealis, cum aliis nonnullis, quæ cum eodem argumento connexa sunt.

§. I.

De materia massæ oscillantis.

9. Quo gravitas specifica est major, eo massa est aptior ad minuendum effectum resistentiæ aeris. Hinc aurum esset omnium aptissimum; verum id commodum ejus metalli nimis pretiosi est nimis exiguum supra alia, ut idcirco videatur potius adhibendum aliud communius. Videtur maxime idoneum aurichalcum. Adhibenda est tam in fusione, quam post, diligentia ad evitanda interna spatiola vacua: possent post fusionem adhiberi ictus mallei, quorum vis ea posset implere. Adhuc tamen ei etiam malo remedium afferri poterit, licet aliqua vacuola supersint, ut mox patebit.

§. II.

De figura massæ oscillantis.

10. QUÆCUNQUE figura adhibeatur, potest semper determinari centrum oscillationis: adhuc tamen censeo omnium maxime idoneam figuram sphæricam, in qua est facilior suspensio, quæ non lædat figuram, nec inducat positionem minus idoneam ad determinandum centrum oscillationis commune: eadem est magis uniformis pro resistentia aeris æstimanda: in eadem facilius corrigitur effectus cavitatis cujuspiam, vel densitatis inæqualis mutando punctum affixionis in diametraliter oppositum: in globo, cujus diameter non est nimis magna respectu longitudinis penduli, vitia exiguæ inæqualis densitatis, vel exiguorum foraminum internorum inducunt in iis binis suspensionibus oppositis effectus contrarios ita æquales ad sensum, ut omnis error sensibilis evitetur, capiendo medium inter numeros oscillationum, si ii inveniantur inæquales post ejusmodi conversionem: proderit adhibere

non

non solum binas suspensiones e diametro oppositas, sed etiam plures pertinentes ad plures diametros ejusdem globi.

11. Cavendum, ut forma sit accurate sphærica: forma accurate conica facilius efformatur ab artifice, & verificatur ab observatore: adhuc tamen, diligentiâ ingenti adhibitâ potest induci figura sphærica accurata, & potest verificari eâdem methodo, quæ adhibebitur ad habendam magnitudinem diametri: patebit enim, an omnes diametri sint æquales inter se, quærendo magnitudines plurium diametrorum.

§. III.

De magnitudine, & ejus mensura.

12. Magnitudo est arbitraria: nollem nimis exiguam, ut minuatur effectus resistentiæ aeris, nimis magnam, ut melius compensentur inæqualitates internæ, si adsint, per suspensiones e diametro oppositas: potest adhiberi diameter duorum, vel trium pollicum.

13. Determinatio accurata *magnitudinis* diametri est necessaria, quia centrum *oscillationis globi ex compertis Hugenii est infra centrum sphæræ per* $\frac{2}{5}$ *tertiæ proportionalis post distantiam puncti suspensionis a centro globi*, & *semidiametrum ipsius*. *Porro* ex eo ipso theoremate haud difficulter eruitur hoc aliud, errorem commissum in positione centri *oscillationis*, nimirum in *longitudine penduli simplicis isochroni ei pendulo adhibito*, fore paullo minorem dimidio errore commisso in mensura diametri ipsius globi. Id demonstrabitur num. 93.

14. Instrumentum idoneum ad eam determinationem potest esse ejus formæ, quam exhibet fig. 1 (Tab. V), quæ est parum absimilis ab iis micrometris, quæ addi solent telescopiis astronomicis. ABCD est rectangulum, cujus latera AB, DC sunt duplo longiora lateribus AD, BC. Constat quatuor laminis metallicis, cujus latitudines arbitrarias terminant latera interna *abcd*; altitudo itidem arbitraria debet esse ejusmodi, ut infra lineas *ad*, *bc* possint in iis excavari crenæ, quæ excipiant lamellas minus altas

HIE*h*,

HIEh, GKFg affixas laminæ EFfe parallelæ laminis AB, DC ejusdem altitudinis cum ipsis. Hanc instrumenti partem exhibet figura 2 oblique positam, quæ debet excurrere motu parallelo ope laminarum IH, KG excurrentium intra eas crenas, quæ determinabunt parallelismum perpetuum lateris ef respectu ab in eo excursu.

15. Eæ crenæ facilius fient sequenti pacto: concipiantur (fig. 1) rectæ ba, cd productæ usque ad AD in a'', d'', & aa'', dd'' sectæ bifariam in a', d'. Potest effici lamina $a'a''d''d'$ triplo tenuior laminis Ba'', Cd'' adnexa imæ ipsarum crassitudini: tum per cochleas ipsi adnecti binæ aliæ, altera minus lata $a'a''d''d'$, altera latior $aa''d''d$, atque idem fiet ex parte opposita per laminas $b'b''e''e'$, $bb''e''e$, superficiebus supremis laminarum ad'', $\overline{c}b''$ congruentibus cum superficiebus supremis laminarum crassarum AB, DC. In $aa'd'd$, & $bb'c'c$ habebitur spatium vacuum ad excipiendam laminam IH. Excursus rectæ fe parallelus fiet ope cochleæ (fig. 1) insertæ mediis lateribus AB, DC in L, M, & mediæ laminæ EF habenti foramen cochleatum in N. Possent itidem foramina, quæ debent excipere ejusmodi cochleam excavari in frustis metallicis affixis superficiei vel superiori, vel inferiori laminarum AB, DC, EF. Affixio cochleæ in medio longitudinum AB, DC, EF proderit ad habendum facilius motum parallelum tertiæ uniformem utrinque. Circulus QR affixus lateri DC habebit divisiones pro partibus singularum revolutionum, & index O affixus manubrio mobili P ipsius cochleæ determinabit partes ipsas. Latera ad, bc habebunt in superficie superiore divisionem aliquot pollicum, & linearum, quæ subdivisio in lineas erit inutilis in pollice primo. Posset autem ipsi laminæ EK affigi etiam ex utraque parte nonius, qui exhiberet partes aliquotas linearum. Satis esset divisio alterius tantum e lateribus ad, bc cum altero tantum nonio ipsi affixo; sed si divisio habeatur utrobique cum nonio utroque, determinatio duplex erit magis certa, & magis certus parallelismus linearum ab, ef. Quin immo si forte regulæ parallelismus non fuerit accuratissimus, ea duplex divisio indicabit quantitatem inclinationis per differentiam positionis punctorum e, & f respectu divisionum correspondentium, quæ inæqualitas exigua distri-

buta per totam longitudinem *ab* æqualiter, indicabit accuratam distantiam TS lateris *ef* ab ipso latere *ab* in quavis distantia *a*S ab *a*. Verum si instrumentum sit satis affabre elaboratum, ut superficies IH, KG contingant accurate superficiem crenæ, cui inseruntur, motus non poterit haberi sine continuo accurato parallelismo: quam ob rem posset ipsum instrumentum fieri fere duplo minus, laminâ BC positâ prope cochleam, & factis lateribus AB, DC paullo longioribus, quam sint BC, AD.

16. Usus instrumenti est manifestus; *collocato globo*, *cujus diameter* ST, *supra planum horizontale*, *apponetur instrumentum in positione horizontali elevatum ad altitudinem proximam radio globi*, qui radius debebit esse paullo minor altitudine facierum superiorum A*b*, E*f* ipsius instrumenti: id facile fiet suppositis cuneis duplicibus, & positis ita, ut anguli singulorum binariorum spectent partes contrarias, cujusmodi sunt cunei AB, CD in fig. 3: admovendo bases A, C ad se invicem elevatur planum AB, & removendo illas, hoc deprimitur; ut *admodum facile sit adducere ope trium*, *vel quatuor ejusmodi binariorum facies superiores instrumenti figuræ* 1 *ad altitudinem tantillo majorem altitudine centri globi*. Idem præstari poterit ope quatuor cochlearum longiorum, quæ affigantur angulis ABCD. Applicabitur alterum extremum S diametri globi ad latus *ab*, & *adducetur ope cochleæ latus ef ad alterum extremum* T, notato in ejusmodi motu appulsu puncti *f*, & *e*, vel cujuspiam lineæ nonii ad aliquam e divisionibus lateris *ad*, & *bc*, ac numero particularum conversionis ulterioris usque ad contactum in T.

17. Patet, hoc pacto haberi posse diametrum ST accuratissime, quæ nimirum erit æqualis rectis *ae*, & *bf*; & si forte eæ sint inæquales, correctio erit facilis, factis ut *ab* ad semidiametrum globi proxime definitam æqualem *a*S, ita earum differentia ad particulam addendam *ae*, si ea fuerit brevior quam *bf*, vel ab ea auferendam, si fuerit longior. Habebitur divisio lineæ in partes 3600: quin immo sensibiles esse possunt etiam particulæ plures singularum divisionum, ut possit obtineri mensura $\frac{1}{1000}$ par-

partis unius lineæ, quæ inducat errorem diametri minorem $\frac{1}{10000}$ parte lineæ, adeoque evitet errorem in longitudine penduli minorem $\frac{1}{20000}$ parte lineæ; si nimirum satis accuratæ fuerint divisiones instrumenti, & cochlea: ea exactitudo in iis sperari omnino non potest; sed multo minor sufficit ad rem præsentem. Globus ponetur inter cochleam, & alterum e binis lateribus AD, BC, alterâ remanente inutili: sed videtur multo utilior positio cochleæ in media longitudine quam brevitas laminarum. Longitudo *ab* debebit esse dupla maximæ diametri globi adhibendi: videtur abunde esse, si habeat longitudinem paullo majorem quatuor pollicibus, ut globi binorum pollicum commode inseri possint inter cochleam, & latus ipsi parallelum.

18. Porro satis patet, eo instrumento inquiri posse in ipsam figuræ sphæricæ perfectionem. Nam conversione globi facta directionibus plurimis inter rectas *ab*, *ef*, apparebit, an aliqua diameter minor recedat ab altero contactu, vel major conversionem impediat: si inveniatur aliqua exigua inæqualitas in diametris globi; potest ingens earum numerus determinari methodo superiori, & assumi medium arithmeticum: sed præstabit uti globo accurate sphærico.

§. IV.

De filo sustinente massam oscillantem.

19. Si ageretur non de determinatione longitudinis penduli simplicissimi mente sola concepti, cujus totum pondus concipitur collectum in unico puncto, sed de comparanda gravitate in diversis terræ locis ope ejusmodi penduli solidi translati ex uno loco in alium, oporteret suspendere massam oscillantem per virgam solidam inflexilem affixam supernæ machinulæ habenti longitudinem perpendicularem ipsi virgæ, & desinenti in binas acies impositas fulcris constantibus ex materia admodum dura. Tum enim gravitatis discrimen habetur e solo numero oscillationum ejusdem pen-

 duli.

duli. *At ubi agitur de determinanda longitudine penduli simplicis, ad habendum tutius centrum oscillationis oportet adhibere potius filum, cui affigatur globus.*

20. Si quis velit suspensionem ope machinulæ transversalis desinentis in binas acies impositas binis fulcris; adhibebit *filum metallicum* rigidum, cui ipsa virga transversalis pareat, ut in tota oscillatione figura totalis conservetur illæsa, & partes singulæ tam fili metallici, quam ejus virgæ ipsum sustinentis describant arcus circuli similes circa axem conversionis; nam ea conditio assumitur in determinanda distantia centri oscillationis a suspensione, quæ distantia est quæsita longitudo penduli simplicis. *Defectus rigiditatis summæ, qui semper occurrit in ejusmodi filo metallico* exiguæ crassitudinis, ut unius *lineæ*, *conjunctus cum aliqua rigiditate*, quæ reddat minus *facilem flexum* partium exiguarum totius longitudinis, posset inducere metum curvaturæ alicujus ejusmodi fili in tota sua longitudine, ne nimirum a pondere massæ appensæ non possit ita tendi, ut maneat in tota *oscillatione* accurate rectum. In eo casu posset mutari nonnihil distantia globi ab axe conversionis, & haberi dissimilitudo arcuum descriptorum a singulis ejus punctis, & a punctis virgæ transversalis, quæ officerent accuratæ determinationi longitudinis penduli simplicis. Vis, quæ conatur inducere ejusmodi flexionem, est *illa*, quæ inducitur a nisu partium propiorum axi conversionis ad describendos arcus suos breviore tempore: is nisus est admodum exiguus, & videtur debere producere effectum insensibilem: at id ipsum indigeret accuratiore determinatione.

21. Si adhibeatur filum metallicum; oportet habere & densitatem ejus fili uniformem, & crassitudinem eandem ubique, ut rite computetur ipsius effectus in elevando centro oscillationis: pro eodem autem habenda ratio etiam effectus illius machinulæ transversæ simul oscillantis, cui id affigitur: is ob ejus viciniam respectu axis conversionis erit perquam exiguus, sed ubi agitur de particulis minoribus $\frac{1}{100}$ lineæ; computandus erit, ut certo constet, quid præstet. Ea machinula constat prismate basis quadran-

gu-

gularis desinente in duo prismata basium triangularium : ipsam refert figura 4. ABCD est basis rectangularis ima horizontalis, EFGH summa prismatis prioris: prisma posterius triangulare alterum habet pro basibus verticalibus triangula MIL, EKF, alterum triangula HNG, QOP: acies sunt IK, NO, quæ sunt productiones rectæ KN secantis bifariam latera basis AB, DC : in ipsa basi debet haberi apertura T in medio, cui inseratur filum illud metallicum crassitudinis prorsus ejusdem, & solidissime affigatur : ita autem erunt collocanda fulcra, quibus debent inniti illæ acies, ut recta ipsas excipiens remaneat vel prorsus accurate, vel saltem quamproxime horizontalis, quo casu pondus massæ appensæ nullam sensibilem vim inferet filo ferreo ad habendam positionem verticalem penduli.

22. Satius esset efficere, ut acies IK, NO responderent non basi imæ ABCD, sed punctis parum admodum altioribus, quam sint centra laterum AEFB, DHGC : eo pacto oscillatio ipsius machinulæ non turbaret oscillationem massæ, & fili metallici eam sustinentis, quæ fieret tanquam si ea machinula non adesset. Sed cavendum erit, ut binæ ipsæ acies respondeant accurate eidem rectæ lineæ, quæ sit parallela basi BD, quod facilius, & tutius præstatur, ubi eæ acies sunt productiones ejusdem rectæ KN : eam ob causam fortasse in machinula adhibita a Grahamo ad hanc rem, quæ nunc habetur Parisiis, acies habent eam positionem.

23. Filum ipsum metallicum debet firmiter adnecti globo. In ea machina adhibita a Grahamo id fit ope cochleæ, quam habet ima pars ipsius fili metallici : ea introducitur in foramen cochleatum globi, quem ipse adhibuit. In eo globo habentur quatuor ejusmodi foramina in extremis binarum diametrorum sibi invicem perpendicularium, ut possit mutari locus ipsius affixionis ad agnoscendum, & corrigendum effectum exiguæ inæqualitatis, quam forte habeat densitas interna globi. Verum oportebit deinde habere rationem vacuorum, quæ remanent in foraminulis, quibus non immittitur filum cochleatum. Jam vel inde constat, hanc methodum esse multo complicatiorem, quanquam in ea habetur major

jor certitudo accuratæ determinationis puncti suspensionis, quod est centrum arcuum descriptorum.

24. Methodus multo simplicior est illa, quæ adhibet filum tenue prorsus flexile ex substantia habente pondus minimum. Ejus affixio est multo simplicior: ejus pondus est ita exiguum, ut in æstimatione quantitatis, per quam id elevat centrum oscillationis, nullus error sensibilis timeri possit. Solent adhibere ad eum usum id fili genus, quod appellant *fil de pite*, quod non sit intortum: est enim leve, & flexile: sed cavendum, ut sit crassitudinis idoneæ ad sustinendum onus non nimis exiguum, ut globi metallici habentis diametrum unius, vel potius duorum pollicum. Credo, tuto adhiberi posse sericum, quod admodum tenue potest sustinere pondus satis magnum. In ejusmodi filis, quæ sunt intorta, illud solet esse incommodum, quod facile aguntur, & agunt in gyrum globum appensum: quo motu etiam producitur filum ipsum inter oscillandum. At id incommodum evitatur facile duplicando filum ipsum, & removendo a se invicem bina ejus superiora capita, quod jam pertinet ad suspensionem. Huc pertinet illud, quod ob ejusmodi duplicationem seligi potest filum magis tenue. Assumenda sunt plura diversæ tenuitatis, & singulis duplicatis appendendus est globus maximi ponderis eorum omnium, quæ adhibenda sunt, donec deveniatur ad eam crassitudinem, in qua filum confringitur: filum paullo crassius ipso seligi potest, quod erit maxime omnium idoneum. Filum tenue metallicum, ut aureum, vel argenteum, non adhiberem ob defectum flexilitatis: prope punctum suspensionis metuenda est curvatura per intervallum non ita exiguum, ut possit negligi: potest tamen adhiberi ita, ut ex parte superiore adnectatur filo serico maxime flexili prope suspensionem ipsam superiorem ita, ut per unam, vel duas lineas infra eam suspensionem habeatur filum sericum, reliquum omne sit argenteum: id præferrem reliquis omnibus. Id nihil metuit ab humiditate, quæ si mutetur tempore observationis, poterit mutare longitudinem fili serici: eadem nullam sensibilem mutationem inducet in longitudinem adeo exiguam filorum sericorum, quibus argenteum est affixum: ne calor mutatus huic noceat, caveri pot-

est

est retinendo ope thermometri eundem ad sensum caloris gradum.

25. Ad impediendam ex parte tensionem diversam fili serici ortam e diversa vi tendente, potest adhiberi frictio tenuis cum cera, quæ tamen omitti debet in situ proximo ei, per quem fit suspensio superior fili ipsius, ubi debet curari flexilitas, quæ maxima haberi potest: habebitur autem satis magna ad habendum centrum motus in ipsa affixione, si filum sit satis tenue, & ibi allidatur compressione ingenti, de qua re paullo inferius, ubi agemus de suspensione. Discrimen vis tendentis provenit a diversa *obliquitate positionis* fili in diversis punctis ejusdem oscillationis, & a *diversa vi centrifuga* respondente diversis velocitatibus motus circularis in iisdem diversis punctis. Utraque vis tendens est maxima in ima oscillatione, in qua filum acquirit positionem verticalem, & in qua vis centrifuga est maxima. Quo pacto inquirendum sit in effectum ejus diversæ tensionis, dicemus infra, ubi de distantia inter punctum suspensionis, & imum punctum globi positi in directione verticali: sed frictio ceræ ejusmodi metum imminuet.

§. V.

De suspensione.

26. Consideranda est duplex suspensio, ea, qua filum affigitur massæ oscillanti, & qua affigitur fulcro sustinenti ipsum pendulum. Agemus de utraque singillatim. Pro casu fili metallici crassioris ipsum immittitur in foramen excavatum in globo, ut jam diximus: pro casu fili tenuis maxime flexilis, ut serici, proponam binas methodos affigendi ipsum globo ita, ut pars globi ima remaneat libera, quod credo necessarium ad habendam accuratam distantiam puncti suspensionis a puncto globi infimo. Potest 1°. exiguus circulus ex tenui materia, ut e tenui velo serico, agglutinari superficiei sphæræ ita, ut ex ejus centro prodeat breve filum, qui possit inseri aliud longum, & intra ipsum excurrere: ipsius autem brevioris bina capita relicta inter velum sericum, & superficiem globi habeant ibi nodum, qui impediat egressum ex eo forami-

ramiṅulo veli serici, ex quo id filum duplicatum prodit. 2°. Poteſt ex eodem tenui filo fieri exiguus circulus, qui applicetur ſuperficiei globi prope punctum ipſius infimum, cujus quatuor punctis æque a ſe invicem diſtantibus applicentur bina capita ſingulorum e binis filis, quæ itidem applicata ſuperficiei globi ipſius ſe decuſſent in eo ejus puncto, quod debet remanere ſummum, ubi ſub utroque traducatur filum, cujus capita ſumma debent deinde affigi fulcro ſuperiori.

27. Primam ex iis ſuſpenſionibus exhibet figura 5. *Ibi* A eſt globus, C centrum circuli BDE agglutinati, ex quo *prodit filum* F, cui inſeritur *filum* GFH. Circulus *agglutinandus poteſt* eſſe perquam exiguus, *agglutinatus autem glutine ita tenaci*, ut a pondere globi *non poſſit avelli: poteſt* effici, ut filum in F prodeat parum admodum, quantum ſatis eſt, ut ipſi poſſit ope acus inſeri aliud GFH. In hoc ſchemate ejus nodus exhibetur largior, & curvilineus: ubi globus e fulcro pendebit libere ope fili GFH, filum, cui hoc inſeritur, apparebit unicum tendens recta a C ad F.

28. Secundam ſuſpenſionem exhibet figura *6*. Circulus BDB'D' habebit pro centro punctum C, quod remanebit infimum: ipſi alligata erunt *fila* BIFI'B', *DEFE'D'*, ſe decuſſantia in F, ubi inſeretur inter ipſa, & *ſuperficiem globi filum* GFH. Globo pendente *libere ab hoc filo*, filum BDB'D' amittet *figuram* circularem ob tenſionem in iis quatuor punctis, & fila in F recedent a ſuperficie: verum id ſuſpenſioni *non oberit*: punctum F remanebit in ſummo globo, & punctum infimum remanebit inter puncta B, D, B', D' liberum a *filo*, quod erit neceſſarium ad obtinendam menſuram exactam diſtantiæ ejus puncti infimi a puncto ſuſpenſionis, ut *mox patebit*. Effectus ponderis hujus fili in ordine ad poſitionem centri oſcillationis determinari poſſet conſiderata poſitione reſpectu globi ipſius, ad quam redigetur ab ejus *pondere: ſed*, ut patebit inferius, is effectus poterit omnino *negligi*.

29. Suſpenſio ſuperior indigebit pluribus figuris: conſtructio machinæ erit admodum ſimplex, licet prima fronte videatur ſatis compoſita. Diviſiones, & cochlea indigebunt ſumma accuratione, cætera præſtare poterit quivis artifex non imperitus, nec in-

indiligens. Figura 7 exhibet sectionem verticalem totius machinæ, cujus partes quædam apparebunt melius in binis sequentibus. Ea autem est aptata suspensioni per filum tenue figuræ 5, & 6. In fig. 10 exhibebitur id, quod pertinet ad suspensionem per filum metallicum crassius, & acies figuræ 4. Figura 11 (Tab. VI) exhibet fulcrum oblique visum, figura 12 obliquam positionem machinulæ separatæ imponendæ fulcro ad determinandam magnitudinem oscillationum: figura 13 pendulum oscillans cum divisione machinulæ ipsius directe visæ.

30. In fig. 7 (Tab. V) filum GFG' sustinet globum A, ut in fig. 5, & 6. Id filum comprimitur inter binas laminas sibi invicem superpositas in B, B', quarum altera apprimitur alteri ope cochlearum C, C'. Earum altera habet partem DHH'D' sursum prominentem, quæ inseritur crenæ excavatæ in basi parallelepipedi solidi KDD'K', & adnectitur ipsi ope cochlearum. In ipsa prominent duo exigui cylindri in E, E', quibus affiguntur bina capita fili, quod inde descendit inter binas laminas in G, G'. Parallelepipedum solidum immittitur in tubum LMM'L' quadratum cavum, quod superne sustinet circulum, cujus diameter NN', divisum in ingentem numerum partium, ut in dimidios gradus, & habet in centro cochleam cum manubrio P, & indice O denotante partes cujusvis conversionis. Ea cochlea immittitur in foramen cochleatum parallelepipedi, & sustinet ipsum, & laminas cum filo, & globo. Sustinetur tubus a basi QQ', quam melius exhibebit figura 8: ea innititur cochleis longioribus, ut facile possit collocari in plano horizontali ope libellæ, per virgas longiores QR, Q'R' crassas, & solidas ipsi affixas in R, R', & per breviores (fig. 7) transversas ST, S'T'.

31. Figura 9 exhibet tubum ipsum quadratum LMM'L', in cujus facie NN' habetur apertura parum lata, sed longa fere per totam ejus longitudinem, figura 10 parallelepipedum KHH'K'. Hujus faciei KH' adnectitur ope binarum cochlearum regula ejusdem latitudinis cum apertura NN' figuræ 9, & ejusdem crassitudinis cum parietibus tubi ejusdem figuræ, sed multo brevior. Parallelepipedo immisso in tubum, hæc regula debet prodire ex

eadem apertura ita, ut ejus superficies extima congruat cum superficie extima tubi. Tum in NN' figuræ 9 habetur divisio in plures pollices, & lineas, & in PP' figuræ 10, vel unica lineola transversalis, vel divisio, quæ respondeat nonio exhibens linearum partes, quæ remanebit contigua divisioni figuræ 9.

32. Pro suspensione per acies figuræ 4 paranda sunt ex materia bene dura bina fulcra ejus formæ, quam exhibet figura 11 (Tab.VI). Anguli ABC, DEF, A'B'C', D'E'F' excavandi sunt in binis parallelepipedis solidis, quorum facies externæ *AH*, *D'I'* affigi possunt ope cochlearum machinæ habenti formam KNM. *Habebit* ea machina binas laminas planas in K, & *M* : ipsis ex parte earum interna applicabuntur facies externæ fulcrorum, priori quidem facies prioris AH, posteriori vero facies posterioris D'I', & hæ illis adnectentur firmiter ope earum cochlearum : ita ea fulcra remanebunt inter eas binas laminas : sulci autem triangulares ABCFED, & A'B'C'F'E'D' remanebunt liberi ad excipiendas acies IK, NO' figuræ 4 (Tab. V) sibi impositas, quæ libertas fulcrorum interna relinquet pendulo adnexo machinulæ motum oscillatorium prorsus liberum. Machina autem KLM habebit laminam LN prominentem sursum immittendam in crenam *HH'* figuræ 7, ac ipsi affigendam per cochleas eodem modo, quo in altera suspensione: laminæ BB' sustinentes filum tenue affiguntur ibidem per laminam HDD'H' itidem prominentem sursum immissam in eandem crenam. Sic ea machina adnexa parallelepipedo solido KDD'K' figuræ 7, poterit cum ipso elevari, ac deprimi ope cochleæ P, & elevare secum & deprimere fulcra, & pendulum.

33. In fig. 7 VV' est speculum metallicum planum, quod exhibebit determinatione evidentissima contactum globi A, cum ejus superficie inducendum a cochlea deprimente parallelepipedum KH. Fulcrum, ut innui, videre est in fig. 8. Ejus basim quadratam efformant quatuor regulæ ferreæ crassiores, quarum binæ QQ'. habent singulæ binas cochleas illas longiores. Ex angulis quadrati prodeunt quatuor virgæ QR sustinentes tubum quadratum, quarum una prodiens ex angulo anteriore dextero exhibetur fracta, ut possit post ipsam apparere altera. Binis lateribus quadrati affixa

est

est regula transversa aa' sustinens mensulam ferream qq', cui speculum imponitur, & ea ipsa regula, ad amovendum periculum alicujus flexionis, quæ occurrat inter observandum, potest habere binas cochleas prope mensulam, per quas innitatur pavimento postea quam priores quatuor adduxerint basim ad horizontalitatem.

34. In fig. 7 si loco fili serici libeat adhibere filum tenue metallicum; potest id adnecti juxta num. 24 prope puncta G, G' filis sericis brevissimis descendentibus ab E, E' infra superficiem inferiorem laminarum BB' per unam alteramve lineam: filum metallicum erit minus variabile, sericum erit flexile, ut oportet.

35. In eadem fig. 7 X est instrumentum, quod melius exprimitur in fig. 12 (Tab. VI). Ibi ex basi latiore A assurgit baculus teres AB immissus in cylindrum cavum C, qui potest elevari, & deprimi, & adstringi in altitudine quavis ope cochleæ D. Ipsi cylindro affixus est ex parte altera baculus E sustinens regulam II', in cujus facie verticali habetur usque ad lineam infimam horizontalem divisio in plures pollices, & lineas, incipiendo a medio versus partem utranque. Id collocabitur in fig. 7 (Tab. V) inter mensam, & regulam aa' figuræ 8 ita, ut pars ima superficiei divisæ sit paullo altior puncto globi summo F, sit perpendicularis plano trianguli GFG', nimirum in directione arcus describendi in motu oscillatorio, & punctum ejus medium respondeat ad perpendiculum puncto ipsi F. Fila GF, G'F oculo posito in eorum plano apparebunt unicum filum, ut exhibet figura 13 (Tab. VI) in GF, GF': id excursu suo hinc, & inde determinabit tangentem arcus descripti ad radium æqualem distantiæ GH, quam habebit punctum G a linea infima superficiei II' terminante divisionem.

36. Facile erit definire eam distantiam, applicatâ regulâ quapiam: & quidem satis est, eam nosse veræ proximam, utut non penitus accuratam; neque enim necessaria erit summa accuratio in mensura arcus descripti. Eam ob causam id instrumentum poterit etiam esse ligneum, & partes lineæ postremæ ejus tangentis addendæ lineis integris poterunt assumi sola æstimatione; quamvis liceret eas habere multo accuratius reddendo partem imam II' figuræ 13 mobilem in latus ope cochleæ, quæ eam promo-

 veret,

veret, donec extremum oscillationis punctum accurate congrueret cum fine divisionis cujuspiam, & circulus adjectus cum indice, ac etiam nonius, si liberet, partis superioris fixæ collatæ cum inferiore mobili exhiberet etiam partes linearum admodum accurate.

37. Motus cylindri C figuræ 12 est utilis pro collocanda regula II' in ea altitudine, quam requiret elevatio globi supra planum speculi, supra quod elevabitur post contactum, ut libere possit excurrere sine incursu in superficiem ipsius speculi in ima oscillatione, & ipsa magnitudo ejusdem globi. Omnis autem usus machinæ totius figuræ 7 (Tab. V) jam satis patet. Possent fortasse tuto fieri e ligno omnes partes, quæ habentur in fig. 8 præter tubum quadratum. Adhuc tamen multo melius erit ejus virgas, & regulas curare ferreas. Tubus ipse quadratus, & parallelepipedum cum laminis inferioribus debent fieri ex aurichalco, ut magis affabre construi possint: tota moles metallica figuram melius servabit toto tempore observationis.

§. VI.

De mensura distantiæ centri arcus oscillando descripti ab aliquo puncto dato ipsius massæ.

38. DETERMINANDUM est prius ipsum centrum arcus descripti oscillando, ut determinetur quæsita distantia: deinde seligendum punctum massæ, a quo distantia determinari possit commodissime: demum exponenda methodus ejus determinationis.

39. In suspensione per acies figuræ 4 ipsæ acies immittuntur angulis ABC, DEF, A'B'C', D'E'F' figuræ 11 (Tab. VI). Axis conversionis erit recta EB', in cujus medio puncto G habebitur centrum arcus descripti a centro oscillationis. In ea vero suspensione, quam exhibet figura 7 (Tab. V), id centrum est in I in medio inter puncta G, G', si fila ibi sunt bene flexilia, & bene compressa: id appellabimus punctum suspensionis.

40. In priore suspensione remanet tantummodo timor curvaturæ fili metallici inter oscillandum, quæ curvatura num adsit sensibilis, patebit diligenter intuenti filum ipsum inter oscillandum

prope

prope verticem, ubi ea, si adsit, debebit esse maxima. In secunda timent aliqui, ne centrum non sit non nihil infra ipsa puncta G, G', ex quibus fila prodeunt. Timerem id, si fila essent tota metallica: sed in filo serico tenui, & bene compresso, potissimum arcu oscillationis existente paucorum graduum, & globo non nimis exiguo, mihi videtur omnino timeri non posse, ne filum resistat ponderi trahenti, ac impediat omnem distantiam a puncto G, quam permittit longitudo ipsius fili. Adhuc tamen indicabo inferius methodum verificandi id ipsum, & corrigendi, si quid in eo vitii occurreret. Posset adhiberi suspensio utraque, quarum determinationes si conspirent, habebitur major certitudo boni successus.

41. Pro puncto massæ in casu globi adhibiti omnium maxime idoneum erit punctum globi infimum. Suspensio figuræ 5, & 6 relinquit liberum id punctum. Basis in fig. 7 ope cochlearum Q, & libellæ facile reducitur ad positionem, in qua superficies speculi VV' sit satis accurate horizontalis. Ope cochleæ P admodum facile adducitur sensim id punctum infimum ad contactum speculi, qui accuratissime determinatur oculo oblique posito: nam evidentissime distinguitur momentum, in quo evanescit distantia inter globum superiorem descendentem, & ejus imaginem inferiorem ascendentem.

42. Pro determinanda distantia puncti suspensionis ab eo puncto infimo globi, habenda est regula, quæ contineat pedes tres, & pollices duos, vel tres: sed in determinanda ea mensura adhiberi debet diligentia summa, ut etiam in eo, quod bases binæ ipsius sint accuratissime planæ, & accuratissime perpendiculares longitudini. Adducto ad horizontalitatem speculo, lamina BB' elevetur ope cochleæ P ad distantiam majorem longitudine ipsius regulæ, cujus verticaliter erectæ applicetur superficies ima ad superficiem speculi remoto nonnihil in latus ope regulæ ipsius globo, quod adhuc pendebit ipsi applicatum in positione obliqua nonnihil, sed quæ non imminuet ad sensum vim, qua globus ipse tendet filum, ubi libere pendebit sibi relictus: tum paullatim ipsa lamina BB' deprimatur, donec contingat parte sui inferiore in medio inter G, G' su-

superficiem summam regulæ verticalis : sed inter descendendum notetur numerus , cui respondet index O in circulo fig. 11 cum aliqua e divisionibus laminæ PP' figuræ 10 congruet cum aliqua e divisionibus rectæ NN' figuræ 9 ; & notentur tam partes revolutionis in circulo , quam numerus revolutionum integrarum , si plures adsint , ab ea congruentia usque ad contactum.

43. Si notetur etiam transitus ejusdem divisionis prioris laminæ per plures divisiones rectæ posterioris ; innotescet , quot partes micrometri respondeant uni lineæ , adeoque in quavis alia majore , vel minore elevatione laminæ BB' innotescet distantia rectæ GG' a speculo , addendo longitudini regulæ , vel ab illa auferendo lineas , & earum partes , quæ respondebunt partibus micrometri notatis inter positionem contactus cum ipsa regula , & novam positionem quamcumque .

44. Si adhibeatur suspensio per acies figuræ 4 ; oportebit parare aliam aciem continuam BEB'E' (Tab.VI fig. 14) immittendam in angulos fulcrorum figuræ 11 loco penduli adhibendi pro oscillatione : ipsi debebunt adnecti ope fili duplicis prope E, B' bina pondera , quæ simul æquentur ponderi ipsius penduli , ut tendant machinam eadem vi , qua tendi debet ab eodem iis fulcris imposito , & ope cochleæ P demittenda erunt fulcra cum ea acie , donec ipsa acies contingat superficiem superiorem regulæ verticalis . Ablata hac acie reponendum erit ejus loco pendulum cum aciebus figuræ 4 (Tab. V).

45. His ita paratis deprimendus erit paullatim globus ope cochleæ P , donec contingat speculum : & innotescet longitudo auferenda a longitudine regulæ , ut habeatur accurata distantia puncti suspensionis a puncto infimo ipsius globi . Eâ determinatâ , elevabitur nonnihil globus , ut possit libere oscillare sine contactu speculi in parte infima cujusvis oscillationis . Hoc pacto distantia quæsita , a qua pendet longitudo penduli simplicis , habebitur per immediatam collationem cum regula , quæ poterit esse ferrea : tantummodo notandus status thermometri tempore applicationis regulæ , quæ applicari poterit ope forcipis cujuspiam , vel adhibitis chirothecis , quæ impediant ejus dilatationem majorem a calore ma-

manus. Ea longitudo non pendebit a reliquis machinæ partibus præter valorem partium micrometri in circulo. Dempta autem semidiametro globi habebitur distantia puncti suspensionis a centro globi.

46. Distantia semel inventa conservabitur in tota oscillatione, vel poterit innotescere quantitas mutationis, si qua forte occurrat. Binæ possent esse mutationis causæ: prima est inæqualitas vis tendentis filum in diversis partibus oscillationis, secunda actio humiditatis, & caloris in filum. Inæqualitas provenit a duplici causa: primo quidem ab obliqua positione penduli GFG' figuræ 7 in variis distantiis a medio, tum a vi centrifuga motus circularis inæquali in diversis punctis ob inæqualem velocitatem. Prima causa reddit in quovis puncto oscillationis vim minorem, quam in infimo, & eo minorem, quo major est distantia ab eo puncto: secunda ubique præter maximam elongationem a puncto eodem infimo reddit majorem, quam esset globo quiescente in ea positione, in qua capta est ejus distantia a puncto suspensionis.

47. Utraque ex iis virium differentiis est ita exigua, ut nihil inde videatur timeri posse: adhuc tamen utraque facile computatur, & globo quiescenti addi potest pondus inducens differentiam vis tendentis æqualem inventæ eo calculo, ut ex observatione innotescat, an id additamentum inducat aliquod discrimen longitudinis fili. Adducto enim globo ad contactum cum speculo ante, & post ejusmodi additamentum, apparebit ex positione indicis, an habeatur discrimen sensibile longitudinum inde proveniens, & quantum id sit.

48. Ex resolutione vis gravitatis in duas, quarum altera tendit filum, altera accelerat descensum obliquum per arcum circuli, est gravitas tota ad eam, quæ tendit filum, ut radius ad cosinum arcus distantiæ a puncto infimo, adeoque gravitas tota ad partem amissam erit, ut radius ad sinum versum ejus dimidii gradus. Si oscillatio fiat per quatuor pollices in circulo habente pro radio pedes tres, arcus erit $= 6^{\circ}.22'$, adeoque distantia a medio $3^{\circ}.11'$, cujus sinus versus est circiter $= \frac{1}{700}$ radii. Addendo globo pondus, quod sit $\frac{1}{700}$ ponderis totius, si hoc additamentum

non

non auxerit longitudinem ad sensum, defectus æqualis non minuet. In oscillatione pollicum trium sinus versus est pars quarta, adeoque tantummodo $\frac{1}{2800}$ totius.

49. Vis centrifuga inducit in ima oscillatione augmentum duplo majus, quod tamen est adhuc perquam exiguum. Ex compertis Hugenii vis centrifuga æquatur vi gravitatis tum, cum velocitas in circulo est æqualis illi, quæ acquireretur casu libero per quartam partem diametri, nimirum per dimidium radii, mutatis vero velocitatibus in eodem circulo est, ut quadratum velocitatis: ex compertis autem ipsius collatis cum compertis Galilei, velocitas in fundo arcus æquatur ei, quæ acquireretur in casu libero per sinum versum ejusdem arcus, & ex Galileanis quadrata velocitatum sunt, ut altitudines. Hinc erit vis centrifuga in media oscillatione ad vim centrifugam æqualem gravitati, ut est quadratum velocitatis in casu per sinum versum ad quadratum velocitatis in casu per dimidium radium, nimirum ut ipse sinus versus ad dimidium radium. Prius habebatur ratio sinus versi ad totum radium. Hinc ex vi centrifuga in imo habetur additamentum duplum jacturæ in initio oscillationis ex obliquitate, quod est theorema sane elegans. In oscillatione pollicum quatuor hoc additamentum est $= \frac{2}{700}$ totius ponderis globi: in oscillatione pollicum 3 est $= \frac{1}{1400}$. Utraque causa reddit vim tendentem maximam in media oscillatione, & in reliquis punctis eo minorem, quo magis ea puncta distant a puncto infimo: nam pars amissa ob obliquitatem in puncto quovis eo est major, quo id punctum est remotius ab eodem puncto infimo, & additamentum factum a vi centrifuga eo ibidem minus ob minorem velocitatem. Hinc ad videndum effectum maximum utriusque causæ conjunctæ addenda est summa eorum binorum ponduscolorum. Videtur tamen omnino fore, ut longitudo fili nihil ad sensum augeatur a ponduscolis tam exiguis. Id ipsum docebit melius experientia.

50. Multo autem minus timendum erit ex ejusmodi causis fi-

lo

lo metallico etiam tenuissimo, quod productioni magis resistit, quam sericum. Idem etiam nihil timet ab humiditate, a cujus variatione magis timendum esset filo serico, quam ob causam videtur maxime idonea applicatio fili argentei ad filum sericum prope puncta G, G': fila serica præstabunt flexum facilem, filum argenteum excludet effectum humiditatis. Ipsum producitur a calore: sed in primis potest per experimenta inquiri prius in effectum caloris respectu substantiæ fili metallici adhibiti, ut respectu argenti, quod quidem fieri potest etiam respectu fili serici, sed multo difficilius. Deinde, quod caput est, potest experimentum institui in conclavi clauso, & redacto ope ignis tempore hyemali ad temperiem ad sensum constantem: ibidem nullus erit metus humiditatis ad sensum variatæ tempore oscillationum. Satis erit notare gradum caloris pro regula ferrea eo tempore, quo ipsa adhibetur ad determinandam distantiam centri suspensionis ab imo globo, & conclavi occluso, ac temperie ipsius conservata quamproxime, habere illam distantiam pro conservata. In fine oscillationum licebit iterum eadem methodo eam distantiam comparare cum ea ipsa regula ferrea, notato itidem gradu caloris ope thermometri, & apparebit, an revera ea sit eadem, quæ fuerat ante initium.

51. Ex ea distantia facile erit deducere longitudinem penduli simplicis: distantiæ inventæ puncti suspensionis a centro globi addendæ sunt $\frac{2}{5}$ quadrati radii divisi per eandem distantiam, ut habeatur distantia a centro oscillationis ipsius globi: facile autem per methodos cognitas invenietur exigua mutatio, quam inducet filum adnexum, cujus pondus debet determinari, & pro suspensione figuræ *6* fila in F, & infra, pro suspensione figuræ 5 exiguus circulus veli BDE, & glutinis, quorum pondus habebitur appenso ad bilancem prius globo libero, tum globo habente velum sibi affixum. Ea determinabuntur §. XIV.

§. VII.

De determinando numero oscillationum respondentium tempori longiori.

52. POSSENT computari oscillationes numeratione continua, succedentibus sibi observatoribus saltem binis post aliquot horas, & ad evitandum magis periculum erroris, posset, quod jam a nonnullis est præstitum, post singula centenaria projici in urnam nummus. Singulis horis pendulum longitudinis non nimis diversæ ab ea, quæ respondet singulis secundis, habebit oscillationes circiter 3600, adeoque satis sunt nummi 36 in singulas horas: quin immo possunt adhiberi 40, vel 50, quibus immissis omnibus in priorem urnam, potest alius nummus immitti in aliam, adhibitis illis iisdem ad novam seriem æqualem priori.

53. Adhuc tamen hæc continua numeratio est admodum incommoda, si observatio continuanda sit per horas 24, ut infra proponam, ad habendam comparationem immediatam cum conversione diurna integra fixæ cujuslibet. Evitari potest id incommodum methodo adhibita a Mairanio, quæ est commodissima, & si rite adhibeatur, tutissima. Habeatur horologium oscillatorium utut commune, & mediocre, ante quod ad exiguam distantiam collocetur machina X figuræ 7, observatore posito ante ipsam: is autem ad habendam determinationem magis accuratam poterit applicare oculum ad exiguum foramen excavatum in charta crassiore, & affixum fulcro cuipiam, ut ei parti superiori cujuspiam sellæ, cui humeros applicamus in sedendo, collocando ipsum in directione, quam habent pendula horologii, & figuræ 7 dum quiescunt, in qua directione collocari poterit post pendulum horologii charta, vel tabella cum recta linea verticali crassiore.

54. Facile est, elevando, vel demittendo nonnihil puncta G, G' ope filorum EG, E'G' in secunda methodo, & in prima intrudendo magis, vel minus filum metallicum crassius intra foramen T figuræ 4, reducere pendulum figuræ 7 ad eam longitudinem, in qua tempus oscillationum hujus parum admodum differat a tempore oscil-

scillationum penduli horologii. Impresso motu utrique expectandum erit, donec virga illius, & filum hujus simul perveniant ad medium oscillationis denotatum ab illa linea posteriore, ubi cum celerrime transeant, facile erit oculo collocato ad foramen notare oscillationem, in qua transeunt simul, sive in qua id pendulum, quod transibat prius, incipiet transire posterius. Numeratio oscillationum incipiet fieri ab illa oscillatione ejusmodi consensus, notato numero minutorum, ac secundorum horologii, expectandum, donec deveniatur ad consensum novum, quo tempore pendulum *figuræ 7 lucrabitur* unam *oscillationem* supra pendulum horologii, vel *amittet* unam. Novus numerus *horologii* notatus exhibebit numerum oscillationum *ipsius horologii respondentem ei periodo*: unâ adjectâ, vel ablatâ habebitur numerus *oscillationum figuræ 7*. Si utrumque pendulum haberet oscillationes accuratissime æquales; novus concursus fieret post æqualem prorsus numerum oscillationum: verum si habeatur inæqualitas aliqua, ea erit sane exigua, & *periodi* posteriores usque ad novos concursus habebunt numeros oscillationum *parum abludentes* ab illo priore. Satis erit identidem accedere ad *pendulum*, & *horologium*, & *nisi committatur error* integræ periodi, *nullus error committi poterit in numero* oscillationum. Notatis *binis*, *vel ternis prioribus periodis*, *licebit recedere*, & *redire post senas*, *vel denas*, ac *notare novum concursum*: innotescet numerus periodorum usque ad ipsum, si numerus secundorum a præcedente concursu usque ad illum dividatur per numerum secundorum inter ipsum, & alterum anterius ipso, quæ divisio si *non sit* accurata, parum residui superit, vel parum desiderabitur ad accuratam divisionem: quotus ille vel accuratus, vel vero proximus, erit numerus periodorum, qui erit numerus oscillationum adjiciendus numero notato ab horologio, vel inde auferendus, ut habeatur numerus oscillationum penduli ad observationem adhibiti. Reditus per intervalla 10, vel etiam 15 periodorum sufficiet, quia dubitari omnino non poterit, an fuerint potius 11, vel 16, aut 9, vel 14 potius, quam 10, vel 15.

55 Inæqualitas aliqua oscillationum penduli habebitur ex diminutione arcuum, & in horologio ex imperfectione aliqua horolo-

gii ipsius ; sed eæ nihil obsunt , nec omnino est necessaria in ipso ingens æquabilitas : satis est, si inæqualitas non sit enormis, ut post 10, vel 15 periodos non possit committi error in numero oscillationum . Periodus absolvetur paullo ante , vel post eum numerum , qui respondet numero primæ periodi multiplicato per numerum periodorum , sed id nihil oberit . Observato fine periodi habebitur limes numeri , post quem certus numerus accedet supra numerum horologii , vel ab eo deficiet , atque id sine ullo errore vel minimo commisso in determinando numero oscillationum.

56. Licebit autem etiam definire veræ proximam partem oscillationis , qua pendulum dissentit ab horologio in quovis momento assumpto intra periodum , in quo aliqua observatio fuerit instituta , & relata ad tempus horologii . Sit numerus oscillationum unius periodi m , & numerus oscillationum a concursu præcedenti usque ad finem ejus oscillationis in horologio n , oportebit numero periodorum integrorum addere fractionem $\frac{n}{m}$, & eum integrum cum hac fractione addere , vel detrahere numero indicato ab horologio ad habendum numerum penduli respondentem fini ejus oscillationis horologii ipsius . Quod si observatio fiat non in fine oscillationis horologii , sed in aliqua ejus parte (nam observationes nonnullæ peraguntur a diligenti Astronomo ita , ut notetur secundum cum $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{4}$, vel aliquot partibus decimis unius secundi) , habenda erit ratio ejus partis etiam : horum usus patebit §. sequenti . Illa fractio addenda est , quia ob æqualitatem motus intra eandem periodum , ex quo capite nullus haberi potest error sensibilis , si horologium sit saltem mediocre , acquiritur in singulis oscillationibus pars eadem unius oscillationis divisæ in partes æquales sui temporis a pendulo celeriore ; unde patet , acquisitâ unâ post oscillationes m , debere acquiri post oscillationes n partem $\frac{n}{m}$. Patet autem , commisso etiam exiguo errore in numeris m , n ob minus certum initium verum periodi , committi errorem exiguum respectu fractionis addendæ , adeoque contemnendum .

§. VIII.

§. VIII.

De determinando numero secundorum temporis medii, qui respondet eidem tempori.

57. Pro numero secundorum temporis medii comparando cum numero oscillationum penduli simplicis est maxime idoneum horologium oscillatorium ex illis, in quibus correcto effectu caloris non habetur error unius secundi post plures dies: sed ex altera parte ejusmodi horologia sunt rariora, & ex altera non sunt necessaria. Suppleri potest eorum usus per motum solis, & fixarum. Potest haberi appulsus cujuspiam fixæ, aut plurium, ad filum positum in foco objectivi telescopii dioptrici communis in positione circuli horarii; quod si fiat binis diebus, & habeantur bini appulsus ad horologium utut mediocre, ad quod interea referatur pendulum oscillans toto eo tempore, habebitur accuratus numerus oscillationum hujus respondens tempori eidem. Habitis autem iis binis appulsibus ad id filum eruetur inde numerus secundorum temporis medii.

58. Erit opportuna collocatio telescopii in plano proximo plano meridiani, ad evitandum tutius effectum inæqualitatis refractionum, posito filo in plano proxime verticali. Non erit necessaria exactitudo nec in positione telescopii, nec in positione ejus fili; cum fixæ intra unum diem non mutent declinationem, & inæqualitas refractionis potissimum in majoribus elevationibus supra horizontem non possit ita variare punctum fili, ad quod fixa appellit, ut inducat errorem in intervallo integræ conversionis diurnæ, cujus ratio haberi debeat. Necessaria est sola firmitas telescopii, & fulcri. Pro fulcro posset adhiberi unum e candelabris majoribus metallicis cujuspiam ecclesiæ insistens fornici, vel muro in apertura fenestræ, & pro telescopio tubus e tenui lamina ferrea, & plures fixæ habentes exiguum discrimen in declinatione possent adhiberi ad confirmandam determinationem.

59. Si habeatur horologium oscillatorium, de cujus æquabilitate nullum sit dubium; observatio erit facilior. Satis erit impellere

lere pendulum ita, ut initium ejus oscillationis conſpiret proxime cum initio oscillationis penduli, ac expectare, donec media ejus oscillatio conspiret cum media oscillatione horologii. Inde incipiet periodus, & numerabuntur oscillationes unius periodi: satis erit per intervalla proxime æqualia redire ad observationem, & notare finem duorum, vel trium periodorum: tum omissis etiam pluribus intermediis, habebitur satis tuto methodo superius exposita numerus periodorum usque ad finem cujuspiam periodi, quo fine notato, habebitur numerus oscillationum penduli ex numero secundorum horologii elapso ab initio primæ periodi ad finem postremæ, additis, vel ablatis tot oscillationibus, quot periodi elapsæ fuerint.

60. Si observentur in eodem horologio momenta binorum appulsuum fixæ ad filum telescopii immobilis intervallo unius diei, vel potius plurium dierum; habebitur admodum accurate numerus secundorum temporis medii respondens dato cuivis numero oscillationum ipsius. Singulis diebus habentur secunda $24 \times 3600 = 86400$, qui erit circiter numerus oscillationum horologii: circiter, neque enim est necessarium reducere horologium ad oscillationes accurate æquales secundis temporis aut medii, aut veri: satis est scire, quæ sit acceleratio, vel retardatio ipsius, quod obtinetur observando appulsum fixæ ad filum telescopii fixi. Hic erit itidem circiter numerus oscillationum penduli habentis oscillationes parum diversas, cujus penduli longitudo erit proxime pedum trium linearum 8, nimirum linearum 440. Si committatur error unius integræ oscillationis uno die, facile determinabitur error inde profluens in longitudinem penduli relati ad id horologium. Cum quadratum numeri oscillationum sit reciproce ut longitudo penduli; erit quadratum ad suam differentiam, ut longitudo ad suam. Est quadratum ad suam differentiam quamproxime ut radix ad duplam differentiam radicis, ubi differentia est exigua, adeoque ut 86400 ad 2, ita longitudo penduli linearum 440 ad suam differentiam, quæ erit $\frac{880}{86400} = \frac{11}{1080} = \frac{1}{98}$.

61. Error unius secundi in horologio comparato cum unica vo-

volutione diurna cælesti inducit errorem $\frac{1}{98}$, sive proxime $\frac{1}{100}$ unius lineæ in longitudinem penduli comparati cum ipso. Hinc ad evitandum errorem $\frac{1}{600}$ partis lineæ requireretur motus in horologio uniformis per 6 dies, & error in binis observationibus, per quas determinatur ejus status, minor secundo integro: si status horologii habeatur ex observationibus factis ad intervallum unius diei, oportebit evitare in ipsis errorem $\frac{1}{6}$ unius secundi ad evitandum ex eo capite errorem $\frac{1}{600}$ lineæ in pendulo.

62. Hic error augebitur ab errore commisso in comparatione penduli cum horologio; sed id augmentum potest reddi penitus negligendum, si instituatur comparatio per integras periodos oscillationum recurrentium ad congruentiam. Potest facile reduci pendulum ad longitudinem, in qua periodus sit longior 300 oscillationibus, quo casu singulis horis haberentur minus, quam 10 periodi. Si in æstimando recursu fiat error unius oscillationis, non habebitur inde nisi error $\frac{1}{300}$ oscillationis, qui si fiat in partes contrarias; adhuc non habebitur nisi error $\frac{1}{150}$ unius oscillationis. Error etiam quadruplo major comparatione instituta per plures horas, inducet errorem penitus contemnendum. Verum error quatuor oscillationum committi non poterit in æstimatione concursus oscillationum oculo applicato ad foramen fixum. Si per aliquot oscillationes videbuntur filum penduli, & virga horologii transire simul per illam rectam mediæ oscillationis; satis erit notare secundum, in quo videbuntur incipere transire simul, & id, in quo desinent, quorum medium exhibebit secundum congruentiæ citra errorem unius, vel alterius oscillationis. Quinimmo in periodo 200, vel 300 oscillationum diligens observator animadverteret oscillationem, in cujus præcedente alterum ex iis binis transibit prius per medium, in sequente posterius ope illius lineæ verticalis positæ post virgam horologii, ad quam oculus appli-

plicatus eidem puncto referet constanter & filum penduli, & virgam ipsam in transitu : videbit enim, utrum prius per ipsam lineam transibit sine ulla sensibili congruentia, vel sine congruentia per binas successivas oscillationes. Hinc evitabitur error etiam $\frac{1}{200}$, vel $\frac{1}{300}$ partis unius oscillationis inde proveniens.

63. Alius error oriri posset ex inæqualitate oscillationum penduli comparati cum horologio, quæ eo celerius fiunt, quo breviores sunt, & ea inæqualitas reddet etiam inæquales numeros oscillationum pertinentes ad singulas periodos. Fiunt breviores per resistentiam, ut diximus in introductione. Si non adhibeantur oscillationes nisi ad sensum æquales; comparatio institui non potest per longum intervallum temporis, & quo brevior est comparatio, eo magis crescit error proveniens ab observatione congruentiæ in initio primæ periodi, & fine ultimæ : sed de remedio erroris orti ex inæqualitate oscillationum penduli agemus in sequentibus. Interea notabo illud, si observatio instituatur per comparationem cum ejusmodi horologio, satis esse exiguum horarum numerum; dummodo horologii motus determinetur per observationes distantes pluribus diebus, intra quos tamen id habuerit motum uniformem; nam observatio periodorum, quam exposui, impediet augmentum erroris sensibile proveniens a comparatione penduli cum horologio, impedito errore partis sensibilis unius oscillationis.

64. Si observatione instituta uno in loco, libeat eam repetere in alio, non erit necessarium restituere horologio eandem positionem in secundo loco, ut ejus motus sit idem in ipso, qui fuerat prius; quod quidem est factu impossibile. Satis est, si in utroque loco motus ipsius sit æquabilis, utut in altero lentior, in altero celerior. Comparando ipsum in utroque cum reditu solis, vel fixæ ad meridianum, vel ad filum telescopii immoti obtinebitur utrobique numerus secundorum temporis medii respondens dato cuivis numero oscillationum ipsius, sine errore majore eo, qui provenit ex errore commisso in determinando appulsu ejus [illegible] in principio, & fine intervalli adhibiti ad comparationem ipsius

cum

cum cælo. Satis est habere in utroque loco horologium æquabile, sive sit idem, vel diverſum, & barometrum, ac thermometrum, dummodo transferatur regula ferrea, per quam longitudo penduli determinatur methodo in ſuperioribus expoſita.

65. Ex his patet ſumma utilitas horologii, quod ſummam æquabilitatem ſervet per plures dies: verum ejuſmodi horologia ſunt admodum rara; licet habeant virgas e diverſis metallis, quæ effectum caloris compenſent, vel adhibeatur ſumma diligentia in conſervando eodem gradu caloris intra conclave, in quo fit obſervatio. *Comparatio immediata cum appulſu fixæ ad filum teleſcopii immobilis eſt immunis a metu erroris, quem inducat inæqualitas aliqua in motu horologii, quod erit ad rem idoneum, licet ſit commune, & mediocre; ſed requirit obſervationem motus penduli continuatam per longum tempus, nimirum ſaltem per integram converſionem diurnam.*

66. Obſervatio inſtituetur hoc pacto. Collocato teleſcopio immobili, impellatur pendulum paullo ante, quam fixa ingrediatur teleſcopium, & notetur hora, minutum, ſecundum horologii, in quo habetur congruentia ipſius cum horologio in media ipſorum oſcillatione: applicetur oculus ad teleſcopium, & notetur momentum, in quo fixa tranſit per filum ipſius, quod audiendo oſcillationes horologii, poterit definiri ad ſemiſecundum, & vero etiam ad quadrantem unius ſecundi, ſi teleſcopium augeat objecta augmento non exiguo: obſervetur finis ejus periodi, & fines plurium periodorum methodo ſuperius indicata, quantum requiritur ad obtinendum numerum oſcillationum penduli per comparationem cum oſcillationibus horologii: obſervatio continuetur uſque ad diem ſequentem, reddendo motum pendulo, ſi oſcillationes fiant inſenſibiles methodo, quam exponemus in §. X: ſequenti die obſervetur momentum horologii, in quo eadem fixa tranſit per idem filum, cum initio, & fine ejus periodi, intra quam cadit is reditus.

67. Ex ejuſmodi obſervatione habebitur numerus ſecundorum temporis medii reſpondens converſioni diurnæ fixarum, quæ cum ſit horarum 23. 56'. 3'', 4; is numerus erit 86163,4. Numerus

 oſcil-

oscillationum horologii habebitur ex indice ipsius, & pro numero oscillationum penduli addetur, vel auferetur numerus æqualis numero periodorum, sed habenda erit ratio quatuor fractionum: binæ pertinent ad partes unius secundi, quibus transitus fixæ per filum fuit posterior initio secundi notati ab horologio, & binæ ad partes oscillationis, quibus initium oscillationis penduli fuit posterius initio ejusdem secundi. Illæ priores notatæ sunt ab observatore, hæ posteriores deducuntur a numero oscillationum pertinente ad binas periodos, intra quas acciderunt ii transitus, & numeris oscillationum ab initio singularum periodorum usque ad suum transitum. Numerus pro periodo diei præcedentis sit m, sequentis m', numerus oscillationum ab initio periodi usque ad initium ejus secundi indicati ab horologio, intra quod fit transitus priore die, n, posteriore n': erunt autem m, & m' æquales vel accurate, vel proxime. Numerus oscillationum penduli ab initio periodi usque ad initium ejus secundi indicati ab horologio erit $n \pm \frac{n}{m}$ priore die, $n' \pm \frac{m'}{n'}$ posteriore, adhibito signo $+$, si pendulum movetur celerius, quam horologium, & $-$, si lentius.

68. Fractiones notatæ ab observatore ab initio secundi notati ab horologio ad transitum fixæ reducantur ad partes centesimas, & sint a, a', valores $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m'}$ redacti pariter ad partes centesimas sint b, b': numerus secundorum horologii ab initio primæ periodi diei præcedentis ad initium postremæ diei sequentis sit c: numerus periodorum ab initio primæ diei præcedentis ad initium postremæ diei sequentis e. Incipiendo numerationem ab initio primæ periodi, transitus primus fiet habente horologio secunda $n + a$, transitus secundus habente horologio $c + n' + a'$. Habente horologio n habebit pendulum $n \pm b$, adeoque illo habente $n + a$, hoc habebit $n + a \pm b$: cum enim exiguum sit discrimen inter singulas oscillationes horologii, & penduli; fractio a exprimens partem pertinentis ad horologium, exprimet etiam partem pertinentis ad pendulum. Habente horologio secunda c, habebit pendu-

lum

lum $c \pm e$ ob singulas oscillationes accedentes ad numerum c singulis periodis, vel ab eo deficientes. Numero secundorum horologii $n' + a'$ respondet numerus oscillationum penduli $n' + a' \pm b'$: quare momento secundi transitus habebit pendulum oscillationes $c \pm e + n' + a' \pm b'$. Subtrahendo ab hoc numero numerum pertinentem ad primum transitum, qui erat $n + a \pm b$: habebitur numerus $c \pm e + n' - n + a' - a \pm (b' - b)$.

69. Numerus c habebitur subtrahendo more solito horam horologii, quæ notata fuerit pro initio primæ periodi diei præcedentis, ab hora notata pro initio periodi postremæ diei sequentis aucta horis $24: n$ habebitur subtrahendo horam illam priorem eandem ab hora notata pro transitu fixæ diei præcedentis, neglectâ fractione $a: n'$ pariter subtrahendo horam notatam pro initio postremæ periodi diei sequentis ab hora notata pro transitu secundo, neglectâ itidem fractione a': fractiones a, a' sunt immediate observatæ, & notatæ cum hora: b, b' sunt valores $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m'}$, ubi m, & m' habentur subtrahendo horam notatam pro initiis earum binarum periodorum ab hora notata pro fine. Demum numerus e habebitur ex observatione, cum sit numerus periodorum ab initio primæ diei præcedentis ad initium postremæ sequentis.

70. Hoc pacto redactis horis, & minutis ad secunda habebitur totus valor oscillationum penduli $c \pm e + n' - n + a' - a \pm (b' - b)$, qui æquivalebit secundis horariis temporis medii 86163,4, ubi habita erit ratio non solum oscillationum integrarum, sed & partium. Ex comparatione penduli cum horologio nullus error timeri poterit, qui non debeat negligi; nam error, si quis exiguus occurrat in determinandis initiis periodorum, reddet quidem erroneos valores c, n, n', sed error in iis singulis commissus evanescet in valore toto $c + n' - n$, cum errores utriusque valoris n', n simul debeant reddere tantundem erroneum valorem c errore contrario, ut facile demonstrari potest, sed satis per se patet consideranti. Errores autem inde commissi in m, m', n, n' reddunt erroneas fractiones b, b' jam per se exiguas errore exiguo respectu ipsarum, qui non potest assurgere nisi ad paucas cente-

 simas

simas unius oscillationis. Quare totus error, qui timeri possit, provenit a fractionibus a', a observatis. Si bini transitus observentur usque ad $\frac{1}{4}$ unius secundi, & errores non se corrigant, error inde proveniet $\frac{1}{200}$ partis lineæ, cum error integri secundi tempore unius diei secum ducat errorem $\frac{1}{98}$, sive proxime $\frac{1}{100}$.

71. Si observatio produceretur per plures dies, posset is error adhuc imminui, sed res esset multo magis incommoda, & aliunde inutilis; quia nimirum in determinanda mensura *trium pedum*, & *trium pollicum* regulæ ferreæ, & in divisionibus figuræ 9, & 10, ac partibus micrometri major error timeri debet. Oporteret autem motum restituere pluribus vicibus, qui restituendus erit identidem etiam pro continuando motu usque ad finem revolutionis diurnæ, quod quo pacto fieri debeat, & an inde novi errores timendi sint, patebit §. X: ut etiam numerus oscillationum penduli reducendus est ad eum, qui haberetur, si omnes essent minimæ, de qua reductione agemus in §. XII.

72. Hic tantummodo addemus illud, methodum computandi oscillationes per periodos concursus cum oscillationibus horologii relinquere liberum tempus pro observationibus aliis, ut transitus fixæ per filum telescopii, magnitudinis arcus descripti, status thermometri, &. barometri, altitudinum correspondentium, si iis uti libeat: sed pro earum usu in perquisitione adeo delicata necessarium est horologium admodum perfectum, & multo major observatoris diligentia requiritur. Hinc hac methodo unicus observator posset rem perficere: verum præstabit habere adjutorem, potissimum si transitus fixæ fiat prope finem periodi, quæ requirit observationem concursus binarum oscillationum: tum alter observabit hanc, alter transitum. Si adjutor non adsit, oportebit observare transitum fixæ, & notare horam horologii, tum initium periodi deducere ex initio periodi præcedentis, vel sequentis, & duratione, quæ in periodis proximis debet continere eundem numerum oscillationum m.

§. IX.

§. IX.

De determinanda magnitudine arcus deſcripti.

73. Determinatio ejus magnitudinis fiet facile ope machinulæ figuræ 12 (Tab. VI). Sit in fig. 13 H punctum medium lineæ horizontalis infimæ II', quæ ſit diviſa in pollices, & lineas. Foramen fixum, quod eſt adhibitum pro obſervanda congruentia oſcillationum, collocetur e regione penduli quieti in directione ad ſenſum perpendiculari plano oſcillationis, & in altitudine æquali altitudini rectæ II', quæ ita collocetur, ut oculus, filum quieſcens, & punctum H jaceant in directum: aſſumatur menſura diſtantiæ ejus foraminis a filo, & a puncto H, ac diſtantia puncti G a puncto fili, quod reſpondet puncto H, nimirum quod jacet in directum cum oculo, & ipſo puncto H. His ſemel præparatis, notetur diſtantia HH', ad quam oculo judice pervenit filum in fine oſcillationis, notando pollices, & lineas notatas in recta II', ac partem etiam lineæ æſtimatam: fiat ut diſtantia oculi ab H ad ejus diſtantiam a filo, ita diſtantia notata HH' per lineam viſualem in recta II' ad aliam diſtantiam, quæ erit excurſus HH' fili per dimidiam oſcillationem: tum ut diſtantia GH jam definita per obſervationem ad hanc HH' ita inventam, ita radius circuli ad quartum terminum: is erit tangens anguli HGH' dimidiæ oſcillationis, quæ eo pacto innoteſcet ſatis accurate; quanquam in eo non eſt opus accuratione ſumma.

§. X.

De reſtituendo motu.

74. Ubi jam oſcillationes imminutæ fuerint ita, ut ſint vix ſenſibiles, vel ſi libet, etiam multo ante, poteſt reſtitui motus nova impulſione, quæ inducat oſcillationem ampliorem. Is impulſus fieri poterit vel manu libera, vel ope elaſtri, quod exercebit vim magis regularem ſequenti ratione.

75. Baſi ligneæ C (fig. 15) affigatur regula CB verticalis: huic alli-

alligetur crus CB elastri angularis BCD, quod habeat latitudinem unius, vel duorum pollicum, quæ hic oblique visa abit in rectas CB, CD: bina autem capita B, D binorum crurum sint alligata filo brevi BED: teneatur caput D digito appressum capiti B, dum versus finem unius periodi basis C ita promovetur versus locum oscillationis, ut latus CD in maximo excursu parum admodum distet ab ipso globo. In postrema oscillatione periodi, ubi globus pervenerit ad finem oscillationis, remoto repente digito liberetur crus CD elastri, quod urgebit globum tamdiu, quamdiu filum BED permittet, usque ad positionem CD', in qua id a filo BD' jam tenso retinebitur: globus hac nova vi sollicitatum ascendet ex parte opposita altius, quam ascendisset solâ vi suæ gravitatis: antequam redeat, removebitur basis C, & habebitur oscillatio integra jam libera, ac major præcedente.

76. Augmentum oscillationis erit majus, vel minus, prout filum BD' fuerit longius, vel brevius. Experiendo ante observationem regulariter institutam pluribus vicibus cum eodem elastro, & diversis longitudinibus fili, ac applicando id instrumentum ad diversas oscillationum amplitudines, facile invenientur longitudines filorum, quæ conveniant, quæ nimirum reddant oscillationes nec nimis magnas, nec nimis exiguas: neque enim agitur de inducenda nova oscillatione certæ magnitudinis, sed tantummodo nec nimis ingenti, nec nimis parva. Magnitudo postremarum oscillationum ante novum impulsum, & primarum post ipsum obtinebitur ope instrumenti figuræ 12, quod quidem commode fiet in distantia aliquot oscillationum ante, & post impulsum; nam amplitudines oscillationum proximarum, quæ nullo novo impulsu turbantur, sunt ad sensum æquales.

77. Hoc novo impulsu nec accedet nova oscillatio, nec deficiet: earum numerus erit idem: pars aliqua oscillationis accedet, quia prima semioscillatio post impulsum fiet breviori tempore, adeoque numero oscillationum accedet particula illa, quæ respondebit excessui temporis, quod debuisset impendi in prima semioscillatione, quæ habita est post impulsum, supra tempus, quod revera impenditur. Quomodo ejus habenda sit ratio, apparebit in §. sequenti.

§. XI

§. XI.

De determinanda acceleratione primæ oscillationis post impulsum facta per vim extraneam.

78. Si impulsus novus advenerit in fine periodi, debuisset sine impulsione in media ea oscillatione ad sensum congruere in medio filum penduli cum virga horologii, qui consensus habitus fuisset ad sensum etiam in sequenti oscillatione: observator poterit videre in ea sequenti oscillatione reditum fili ad medium ante virgam, sed non poterit determinare quotæ parti unius oscillationis æquivaleat illa temporum differentia. Poterit eam determinare ope periodi sequenti pacto.

79. Inter præcedentes observationes periodorum habebit aliquam periodum, in qua oscillationes erant ejusdem amplitudinis cum novis: id accidet, si curaverit, ut nova impulsio non inducat oscillationem majorem oscillatione prima, quæ habita est initio suarum observationum. Si oscillationes horologii, & penduli essent omnes æquales; numeri oscillationum omnium periodorum essent æquales: horologii oscillationes erunt æquales quam proxime, & oscillationes penduli habebunt tempus parum admodum inæquale, quia tempus oscillationis exiguæ parum admodum differt a tempore oscillationis minimæ: hinc numeri oscillationum pertinentium ad diversas periodos parum admodum different inter se, quam ob causam pro numero oscillationum periodi pertinentis ad oscillationes, quæ subsequentur impulsum, posset assumi sine errore notabili numerus pertinens ad quamvis ex præcedentibus periodis: verum habebitur minus periculum erroris, si assumatur numerus oscillationum periodi, in qua oscillationes fuerint magnitudine anguli proxime æquales iis, quæ subsequentur impulsum. Ea periodus deberet incipere in ipsa prima oscillatione post impulsum, & desinere post eum numerum oscillationum. Quare si determinetur numerus oscillationum ab impulsu usque ad primum concursum fili penduli cum virga horologii in media oscillatione; is nu-

numerus collatus cum numero, quem prima *illa periodus debuisset habere*, determinabit partem oscillationis, qua ea prior fuerit brevior ex impulsu, quam esset, si sine impulsu habuisset utrumque dimidium æquale, & pervenissent ad medium simul filum, & virga.

80. Duplex casus haberi potest: vel oscillationes penduli fiunt breviore tempore, quam oscillationes horologii, vel longiore. In utroque casu pendulum veniet citius ad medium in prima oscillatione, quam deberet; sed in *primo accelerando semper* magis, lucrabitur unam oscillationem paullo citius, quam deberet, & concursus fiet post numerum oscillationum minorem illo, qui respondet integræ periodo. Dicatur m'' numerus, qui respondet illi periodo, & excessus ipsius supra numerum observatum a novo impulsu ad primum concursum sit r: pars respondens accelerationi primæ oscillationis post impulsum erit $\frac{r}{m''}$: nam adveniet ad medium primæ tanto prius, quam advenisset sine impulsu, quanto prius advenisset, si initium periodi præcessisset impulsum per numerum oscillationum r, & habuisset lucra respondentia singulis unitatibus *contentis in eo numero*.

81. *Quod si oscillationes penduli habeant tempus* longius, tunc vero in *prima quidem oscillatione advenietur ad concursum* citius, tum ea differentia in singulis sequentibus minuetur, donec evanescat in oscillatione concursus. Quare in eo casu si notetur numerus oscillationum ab impulsu usque ad primum concursum, & is numerus dicatur r; erit itidem $\frac{r}{m''}$ pars oscillationis, quæ respondebit accelerationi illius primæ provenienti a vi impressa, quæ ejus descensum reddidit breviorem ascensu.

82. Quare en methodum corrigendi effectum ejus accelerationis. Sit m'' numerus oscillationum pertinens ad periodum respondentem ei oscillationum amplitudini: notetur numerus oscillationum ab impulsu usque *ad primum concursum fili*, & *virgæ in media* oscillatione, & si oscillationes penduli *sunt celeriores* oscillationibus horologii, excessus numeri m'' *supra* eum numerum dicatur r;

tur r; si autem priores sint lentiores, dicatur r is ipse numerus. Fractio $\frac{r}{m}$ dicatur f, & a numero omnium oscillationum penduli auferatur fractio f. Totidem diversi f debebunt auferri, quot impulsus fuerint adhibiti.

83. Quoniam numerus m erit ingens, ut 300; $\frac{1}{m}$ erit fractio exigua; adeoque si decies adhibeatur impulsus, & in quovis valore n observato post impulsum committatur error unius oscillationis, ac omnes errores conspirent, quod sane non accidet; non committetur error nisi $\frac{1}{30}$ unius oscillationis, qui in observatione durante per diem integrum non inducet errorem longitudinis quæsitæ penduli, nisi $\frac{1}{3000}$ partis lineæ. Patet inde, tuto adhiberi posse restitutionem motus, & quidem si globus non fuerit nimis exiguus, oscillationes admodum sensibiles durabunt per plures horas, ut pauci admodum impulsus novi futuri sint necessarii.

84. Post primum impulsum relinquendum erit sibi pendulum, donec oscillationes sensim imminutæ evadunt sensibiles, ita, ut possint satis accurate, vel proxime observari concursus in medio, adeoque initia novarum periodorum: tum adhibendi novi impulsus, notatis identidem magnitudinibus arcuum, qui semper notandi erunt ante, & post singulos impulsus, ac notandi numeri oscillationum plurium periodorum respondentium pluribus arcuum magnitudinibus, & numeri oscillationum post singulos novos impulsus usque ad primum concursum. Ex iis observationibus eruetur numerus oscillationum respondens toti conversioni diurnæ fixarum, cum omnibus fractionibus, quæ addendæ, vel demendæ erunt juxta ea, quæ huc usque sunt exposita: supererit sola correctio ejus numeri respondens reductioni oscillationum habitarum ad oscillationes minimas, de qua agemus in sequenti paragrapho.

§. XII.

De reductione oscillationum observatarum ad minimas.

85. In cycloide, seclusâ aeris resistentiâ, oscillationes omnes sunt æquidiuturnæ; sed in circulo eo celerius fiunt, quo sunt minores: oportet majores illas reducere ad minimas, quibus æquales sunt omnes cycloidales eadem penduli longitudine, utcunque sint magnæ. Primo quidem data amplitudine oscillationis invenienda est ratio temporis ipsius ad tempus oscillationis minimæ: id problema pertinet ad elementa Mechanicæ, in quibus traditur methodus determinandi per approximationem tempus casus per arcum circuli dato radio, & numero graduum. Inde eruitur ratio temporis oscillationis cujuscumque numeri graduum ad tempus oscillationis minimæ, quæ est eadem, ac ratio temporum casus per dimidios arcus earum oscillationum. Habetur ex calculo Bernoullii (*) per approximationem hujusmodi theorema: *quævis oscillatio exigua amittit partem sui octavam ductam in sinum versum arcus dimidii*. Inde facile potest computari tabula, quæ pro diversis oscillationum amplitudinibus exhibeat rationem temporis unius oscillationis ejus amplitudinis ad tempus oscillationis minimæ: si ea ratio sit $1 + q$ ad 1, erit proxime $q = \frac{1}{8}\,sin.vers.$ dimidii arcus, eruntque valores q, ut ii sinus versi, sive proxime ut quadrata amplitudinum. Pro 6 gradibus est $sin.vers.3^\circ =$ 0,001371, adeoque $q =$ 0,000171, & pro tribus quarta ejus pars = 0,000043.

86. Si omnes oscillationes essent amplitudinis ejusdem; inde admodum facile reduceretur numerus oscillationum observatus ad numerum, qui haberetur eodem tempore, si omnes fuissent *minimæ*.

(*) Daniel. Bernoullius in Opusculo, quod præmium retulit ab Acad. Par s. anno 1747. Sit tempus minimæ oscillationis T, radius 1000000, sinus versus dimidii arcus oscillando descripti b; erit tempus oscillationis $T + \frac{bT}{8000000}$

mæ. Ii numeri sunt in ratione reciproca temporis singularum, adeoque erit ut 1 ad q, ita numerus observatus ad numerum addendum ipsi. Idcirco hic numerus addendus haberetur multiplicando numerum observatum per q. Sed cum omnes oscillationes sint inæquales; ad accuratam reductionem requireretur determinatio amplitudinis singularum, vel potius omnium dimidiorum arcuum, qui sunt inæquales, hinc, & inde. Id quidem fieri non potest; sed observatâ identidem amplitudine oscillationum, facile habebitur reductio ita veræ proxima, ut nullus error metui possit, cujus ratio habenda sit.

87. Partes (fig. 16) AB, AC, AD, AE rectæ AR exprimant numeros oscillationum observatarum, & assumpta AF perpendiculari ad AR longitudinis cujusvis, ducatur per F recta parallela AR, quæ occurrat rectis parallelis ipsi AF erectis ex B, C, D, E, R in H, I, K, L, G: producanturque AF, BH, CI, DK, EL in M, N, O, P, Q in ratione temporis oscillationis minimæ ad tempus oscillationum amplitudinis, quam habebant oscillationes observatæ in A, B, C, D, E, ac per omnia puncta M, N, O, P, Q, & per alia intermedia pertinentia eodem modo ad oscillationes intermedias concipiatur curva MNOPQ: erit tempus omnium oscillationum observatarum ad tempus totidem oscillationum minimarum, ut area MAEQ ad aream rectanguli FAEL.

88. Si enim lineola Bb exprimat quamvis oscillationem intermediam, & areola BHhb tempus oscillationis minimæ; areola BNnb exprimet tempus oscillationis observatæ Bb. Quare rectangulo AFLE exprimente tempus omnium oscillationum minimarum respondentium singulis oscillationibus observatis expressis a tota AE, area AMQE exprimet tempus omnium oscillationum observatarum.

89. Hinc habebitur hujusmodi theorema: si rectangulum LERG æquetur areæ MFLQ; erit AE ad AR, ut numerus oscillationum observatarum ad numerum minimarum, quæ haberentur eodem tempore. Erit enim area AFGR æqualis areæ AMQE, adeoque tempus oscillationum observatarum ad tempus totidem minimarum, ut area AFGR ad AFLE. Sed etiam numerus mini-

marum, quæ habitæ fuiſſent priore tempore, ad numerum totidem minimarum, quot ſunt oſcillationes obſervatæ, eſt ut tempus AFGR ad tempus AFLE, nimirum ut AR ad AE. Igitur exprimente AE numerum obſervatarum, exprimet AR numerum minimarum, quæ eodem tempore fuiſſent obſervatæ.

90. Porro facile erit habere aream MFLQ veræ quamproximam, habita identidem amplitudine arcus. Si fiat AF $= 1$, erunt FM, HN, IO &c. valores illi q pertinentes ad oſcillationes A, B, C &c., quarum amplitudines cum ſint obſervatæ, habebuntur ex tabella pro ſingulis earum oſcillationum amplitudinibus: erunt autem FH, HI, IK numeri oſcillationum inter amplitudines obſervatas: quare per notas interpolationum methodos habebitur ea area.

91. Quoniam ipſa eſt admodum exigua ob ordinatas ita exiguas; poterunt conſiderari MFHN, NHIO, OIKP &c. ut trapezia rectilinea, quorum ſingulorum areæ ſunt productum e ſingulis FH, HI, IK &c. ductis in ſemiſummam ordinatarum contiguarum FM + HN, HN + IO &c. Hinc habebitur hujuſmodi regula. Numeri oſcillationum inter amplitudines notatas dicantur n, n', n'' &c., valores q reſpondentes ſingulis amplitudinibus ſint q, q', q'' &c. Quivis numerus n ducatur in binos q præcedentem, & ſequentem, ac omnium ejuſmodi productorum ſumatur ſemiſumma: is erit valor quæſitus areæ: ſi is dicatur x, erit $x = \frac{1}{2}(n(q + q') + n'(q' + q'') + n''(q'' + q''')$ &c.). Hic numerus addendus erit numero obſervato ad habendum numerum oſcillationum minimarum reſpondentium eidem tempori.

92. Si amplitudines arcuum aſſumantur poſt numeros oſcillationum æquales, calculus evadet ſimplicior ob omnes valores n, n', n'' &c. æquales inter ſe: is huc reducitur. Summæ omnium valorum q intermediorum addatur ſemiſumma primi, & poſtremi: numerus proveniens multiplicetur per valorem n, & productum addatur numero oſcillationum determinato per obſervationem ad habendum numerum oſcillationum minimarum reſpondentium eidem tempori.

93. En

93. En tabellam valorum q pro diverſis oſcillationum amplitudinibus:

gradus	valor q
6	0,000171
5	0,000119
4	0,000076
3	0,000043
2	0,000019
1	0,000005

Ex ipſa poſſunt erui etiam valores q pro oſcillationibus intermediis, ſed pro ipſis accuratius eruetur valor q ex valore reſpondente gradibus 6. Semioſcillatio ſit minutorum m: numerus minutorum ſemioſcillationis graduum 6 eſt $3 \times 60 = 180$, cujus quadratum 32400: valor q ipſi reſpondens 0,000171. Quare valor q pro oſcillatione propoſita erit $\frac{0,000171 m^2}{32400}$. Calculus evadet adhuc facilior per ſolas elongationes HH' (fig. 13) obſervatas immediate, quarum quadratis ſunt itidem proportionales valores q. Inveniatur elongatio apparens HH', quæ reſpondeat oſcillationi graduum 6. Erit nimirum HH' in ſitu fili $=$ GH$\times tan. 3°$, vel facto radio GH $= r$ erit $= 0,0524r$, & ſi diſtantiæ oculi a filo, & a plano II' dicantur p, p', erit HH' apparens in diviſione $= \frac{0,0524rp'}{p}$. Hic valor fiat $= h$, & quævis alia diſtantia HH' obſervata ſit $= h'$. Erit pro ipſa $q = \frac{0,000171 h'^2}{h^2}$.

§. XIII.

Demonſtrationes nonnullæ huc reſervatæ.

94. Numero 13 affirmavimus, errorem commiſſum in poſitione centri oſcillationis fore paullo minorem dimidio errore commiſſo in menſura diametri globi, id autem erui ex theoremate Hugeniano, quod centrum oſcillationis globi eſt inferius centro figuræ per $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis poſt diſtantiam puncti ſuſpenſionis a centro globi, & radium ipſius. Id ſic facile demonſtratur.

95. Di-

95. *Distantia* puncti suspensionis ab imo globo sit a, semidiameter globi x: erit distantia puncti suspensionis a centro globi $a - x$, distantia puncti ipsius a centro oscillationis $a - x + \frac{2}{5} \times \frac{x^2}{a - x}$. Si sit dx error radii x dimidius erroris diametri $2x$; erit error ejus formulæ $- dx + \frac{4 \times x dx}{5(a - x)} + \frac{2x^2 dx}{5(a - x)^2}$: facto $y = \frac{x}{a - x}$, habebitur $dx(-1 + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5}y^2)$. Is valor est minor valore dx negativo ob binos terminos positivos $\frac{4}{5}y + \frac{2}{5}y^2$; sed paullo minor, ob longitudinem $a - x$ circiter trium pedum, dum radius x est minor uno pollice, vel non multo major. Quare error in positione centri oscillationis erit paullo minor dimidio errore diametri, ut ibi affirmavimus. Id autem ostendit necessitatem determinandi eam diametrum cum magna diligentia.

96. Numero 15 affirmavimus defectum parallelismi rectarum ae, bf (fig. 1 Tab. V) facile corrigi distributâ æqualiter per totam longitudinem ab differentiâ rectarum ae, bf. Sit $ab = a$, aS semidiameter globi vel accurate, vel quam proxime $= b$, tum $bf - ae = c$. Ad habendam diametrum ST addenda erit distantiæ ae correctio $\frac{bc}{a}$, quæ erit positiva, vel negativa, prout recta bf fuerit major, vel minor, quam ae, nimirum prout valor c fuerit positivus, vel negativus.

97. Id patet in fig. 17, & 18 (Tab. VI). Sit in priore bf major quam ae, in posteriore minor: concipiatur recta ex e parallela ab, quæ occurrat rectis bf, ST in I, H. Cadet H in fig. 17 citra T respectu S, in fig. 18 ultra: erit autem utrobique $ae = b\text{I} = \text{SH}$, tum $f\text{I} = bf - ae$ in fig. 17, & $- bf + ae$ in fig. 18. Eo valore facto $= c$, erit $e\text{I} = ab = a : e\text{H} = a\text{S} = b :: f\text{I} = c : \text{TH} = \frac{bc}{a}$, qui valor positivus in fig. 17, negativus in fig. 18 erit addendus valori $\text{SH} = ae$ ad habendum valorem ST.

98. Numero 48 diximus, esse gravitatem absolutam ad vim, quæ

quæ tendit filum penduli in sua poſitione obliqua, ut eſt radius ad coſinum arcus diſtantiæ a puncto infimo. Id eſt ſatis notum. Patebit autem in fig. 19 (Tab. VII). Sint ibi puncta A, G, A' eadem ac in fig. 12 (Tab. VI), & recta A'P parallela GA exprimat gravitatem totam: ſit autem PB perpendicularis filo GA' producto, & compleatur rectangulum A'BPD, ac ſit A'E perpendicularis rectæ GA. Vis A'D ſollicitabit deſcenſum obliquum, A'B tendet filum. Quare erit gravitas tota ad vim, quæ tendit filum, ut A'P ad A'B, ſive ut GA' ad GE, quæ eſt ratio radii ad coſinum arcus A'A. Ipſa autem gravitas ad vim amiſſam erit ut GA' ad AE, ſive ut radius ad ſinum verſum ejus arcus, quod ibidem affirmavimus.

99. Numero *60* ad computandum effectum unius oſcillationis ſpatio 24 horarum in mutanda longitudine penduli ſimplicis ſuppoſitum eſt hujuſmodi theorema: *quadratum ad ſuam differentiam eſt quamproxime ut dupla radix ad ſuam*. Id theorema adhibetur paſſim in calculo differentiali, in quo ea ratio habetur pro accurata. Aucto valore radicis x per differentiam dx, aſſumitur pro differentia quadrati $2xdx$, & eſt x^2 ad $2xdx$ ut x ad $2dx$. Negligitur ibi etiam dx^2 quantitas infiniteſima ſecundi ordinis, cum quadratum $x + dx$ ſit $x^2 + 2xdx + dx^2$. Differentia $2xdx$ non habetur accurata, niſi ubi tranſitur ab $x - \frac{1}{2}dx$ ad $x + \frac{1}{2}dx$, cum quadratum prioris ſit $x^2 - xdx + \frac{1}{4}dx^2$, poſterioris $x^2 + xdx + \frac{1}{4}dx^2$, quorum differentia eſt $2xdx$. Ubi tranſitur ab x ad $x + dx$, & dx eſt quantitas exigua quidem reſpectu x, ſed non infiniteſima, tum ratio x ad $2dx$ radicis ad duplam ejus differentiam non eſt accurate, ſed proxime ratio quadrati ad ſuam differentiam. Ibi agebatur de numero oſcillationum ingenti 86400, in quo committatur error unius oſcillationis: idcirco adjectum eſt, rationem quadrati ad ſuam differentiam eſſe *quamproxime* eam, quam habet radix ad duplum ſuæ, nimirum 86400 ad 2, vel 43200 ad 1. Sed id erat abunde ibi, ubi nimirum quærebatur æſtimatio quædam erroris longitudinis penduli, qui oritur ex errore admiſſo in numero oſcillationum.

§. XIV.

§. XIV.

De determinatione centri oscillationis communis totius materiæ oscillantis.

100. NUMERO 51 diximus per methodos cognitas facile inveniri mutationem exiguam, quam inducunt in positionem centri gravitatis filum, circulus agglutinatus in C in suspensione figuræ 5 (Tab. V), & tota machinula MO in suspensione figuræ 4. Proponam hìc primo loco formulas exhibentes effectus singularum earum partium admodum simplices, ad quas reducitur formula generalis magis composita, ubi negligantur quantitates, quæ sensum omnem effugiunt: tum apponam formulæ ipsius generalis deductionem ex theorematis simplicibus, & notis in theoria centri oscillationis, ac derivationem singularum simplicium ex ipsa magis composita. Sed oportet nosse singularum partium pondus, antequam possint eæ formulæ deduci ad usum.

101. Facile obtinetur pondus globi appositi ad bilancem. Si ipsi agglutinetur circulus fig. 5 cum exiguo filo F, & iterum assumatur ejus pondus; habebitur pondus partis ibi adjectæ. Fili pondus habebitur ipsum itidem appendendo: sed si agatur de filo tenui; potest appendi ejus massa major, & reduci id pondus faciendo, ut tota longitudo ad longitudinem adhibitam, ita pondus inventum ad pondus ejusdem, & si agatur de filo metallico longiore immittendo in globum ex parte altera, & ex altera in machinulam figuræ 4, oportet detrahere toti ponderi fili partem, quæ inseritur utrinque: quanquam id, quod inseritur in ipsam machinulam prope axem rotationis, potest negligi. Pro machinula MO oportet invenire separatim pondus prismatis rectangularis AG, & binorum prismatum triangularium, quæ desinunt in acies IK, NO. Id facile fiet, cum bases triangulares MIL, HNG sint dimidiæ basis rectangularis AEFB, unde fit, ut ambo prismata triangularia simul sint æqualia soli rectangulari habenti eandem basim AEFB, & altitudinem LF, adeoque eorum summa sit ad rectangulare AG, ut est LF ad FG. Hinc, habito pondere totali,

tali, fiat ut LG ad FG, ita ipsum ad pondus partis rectangularis, quo dempto a toto pondere, habebitur pondus binarum triangularium. Filum, quod in fig. 6 advolvitur globo, potest omnino contemni, ut patebit inferius.

102. Dividendo pondus harum quatuor partium minorum per pondus globi, sit quotus pro circulo agglutinato m, pro filo m', pro parte rectangulari machinulæ m'', pro parte triangulari m''', qui valores exprimunt rationem ponderis singularum partium ad pondus globi. Sit autem r radius globi, a distantia AI (fig. 7) centri A ipsius ab axe conversionis, b distantia fI infimi ejus puncti f, quod tetigit speculum, ab eodem axe, c in fig. 4 altitudo FB communis utrique basi. Priores binæ partes elevabunt centrum oscillationis, posteriores depriment per valores sequentium formularum, qui idcirco pro illis habebunt signum negativum, pro his positivum. Ponemus autem primo loco depressionem ortam ex forma globi, tum eos quatuor valores. Omnium summa addenda erit valori a ad habendam distantiam centri oscillationis communis a puncto suspensionis, nimirum longitudinem penduli simplicis isochroni pendulo adhibito, demptis iis, quæ non adhibeantur, ut in suspensione figuræ 5 non adhibentur postremæ 2, in suspensione figurarum 4, & 6 non adhibetur prima.

Denominationes.

Distantia puncti suspensionis { a centro globi . . . . a
{ a puncto ejus infimo . . . . b

Radius globi . . . . r

Altitudo FB (fig. 4) c

Ratio ponderis partium ad pondus globi

I. circuli agglutinati . . . . m

II. fili . . . . m'

III. prismatis rectangularis AG . . . . m''

IV. binarum acierum triangularium . . . . m'''

Effectus in positionem centri oscillantis respectu centri globi erit ex

Mole globi . . . . $+\frac{2r^2}{5a}$.

Parte I. . . . . $-mr$

II. . . . . $-\frac{1}{6}m' b$

III. . . . . $+\frac{1}{2}m'' c$

IV. . . . . $+\frac{2}{3}m''' c$

103 Si habeatur cavitas aliqua exigua alicubi in globo, cujus elevatio supra planum horizontale transiens per centrum globi quiescentis, vel depressio infra sit $\pm f$, ratio ponderis massæ deficientis ad pondus globi g; erit effectus $\pm fg$: si ea cavitas æquivaleat globulo habenti diametrum $\frac{1}{10}$ diametri globi; erit $g =$ 0,001: si ea sit in summo globo, ac diameter globi sit pollicum duorum; erit $f = r =$ 12 *lin.*, adeoque $fg =$ 0,012 major parte centesima lineæ, cujus ratio habenda esset. Si pondus circuli agglutinati globo in fig. 5 sit multis partibus minus pondere ejusmodi globuli; ejus effectus erit ad sensum nullus: sed an ejusmodi sit, innotescet ex pondere ipsius cum suo glutine.

104. Patet autem ex hac formula, ad evitandos effectus exiguarum cavitatum, quæ sint intra massam globi, satis esse ipsum adhibere cum binis suspensionibus oppositis tantummodo, quia effectus omnium ejusmodi inperfectionum materiæ erunt oppositi, & ad sensum æquales, adeoque satis erit assumere medium arithmeticum inter numeros oscillationum provenientes ex iis binis suspensionibus. Patet præterea, exiguas imperfectiones figuræ globi compensari itidem per ejusmodi inversionem suspensionis. Satis erit assumere diametrum mediam inter multas, quæ obtinentur ope instrumenti figuræ 1. In globo Grahami habente quatuor foramina, nullum effectum edent illa duo, quæ remanent horizontalia: reliquorum binorum in summo, & imo globo effectus se mutuo corrigunt: accedit tantummodo pars fili metallici crassioris, quæ immittitur in id, quod est superius. Sed habebitur ejus ratio, si pro eruendo valore m' partis II numeri 102 assumatur pondus totius longitudinis ejus fili, quæ habetur a puncto suspensionis non solum usque ad globum, sed usque ad finem ejus particulæ, quæ immittitur in id foramen ipsius globi. Ad habendum hoc pondus, de-

debet a pondere totius ejus fili demi ea pars, quæ immittitur in cavitatem T figuræ 4, quod facile præstabitur, factis, ut tota longitudo totius ejus fili ad longitudinem partis immissæ in id foramen, ita totum pondus ad partem ipsius auferendam. Reliquum divisum per pondus globi exhibebit valorem *m* illius partis II. Si pars fili immissa in cavitatem figuræ 4 ipsam non penitus impleat; id vacuum, quod remanet, nullum edet effectum sensibilem ob tantam viciniam axis.

105. Videndum jam, quomodo eæ formulæ deriventur e theoria centri oscillationis (*). In primis fundamentum omnium formularum est theorema generale hujusmodi I. *Si omnes æquales particulæ totius materiæ ducantur in quadrata suarum distantiarum ab axe conversionis, ac summa omnium ejusmodi productorum dividatur per productum e summa omnium particularum, & e distantia centri gravitatis communis ab eodem axe; quotus erit distantia centri oscillationis communis ab eodem axe*. Deinde pro eo divisore habetur hoc theorema II. *Si centra gravitatis plurium massarum jaceant in eodem plano cum recta aliqua; distantia centri gravitatis communis ab eadem recta æquabitur summæ productorum e singulis massis in suas distantias perpendiculares ab eadem recta divisæ per summam omnium massarum: sed assumptis pro positivis distantiis centrorum jacentium ex parte altera ejus rectæ, habendæ sunt pro negativis distantiæ jacentium ex parte opposita*.

106. Ex theoremate I eruitur viceversa hoc aliud, quod erit III. *Si distantia centri oscillationis cujuspiam massæ ab axe conversionis multiplicetur per productum ex massa ipsa ducta in distantiam sui centri gravitatis ab axe eodem; productum erit summa productorum ex omnibus particulis æqualibus ductis in quadrata suarum distantiarum ab eodem*.

(*) Apponam §. XVIII num. 174 additamentum de centro oscillationis, in quo demonstrabo mea quadam methodo hoc ipsum theorema, & ex eo deducam centra ossillationum figurarum, quas hìc adhibebimus: ea ut pertinentia ad elementa, & vulgo cognita hìc omittam.

107. *Ex eodem theoremate generali I profluunt positiones centri oscillationis figurarum diversarum*, quæ supponantur constare singulæ e massa homogenea. Hìc occurrunt quinque figuræ 1°. sphæra, 2°. circulus figuræ 5 ipsi agglutinatus, 3°. *filum*, quod potest considerari ut recta linea, ob ejus tenuitatem, vel exiguam crassitudinem, 4°. prisma quadrilineum figuræ 4, 5°. bina prismata triangularia ejusdem.

108. In sphæra centrum oscillationis est infra centrum gravitatis per $\frac{2}{5}$ quadrati radii divisi per distantiam centri *figuræ ab axe* conversionis: centrum autem gravitatis est in ipso centro *figuræ*.

109. Circulus agglutinatus potest considerari ut circulus planus tangens *sphæram*, *sive perpendicularis ad rectam* suspensionis, neglecta exigua crassitudine, & exigua curvatura. Ejusmodi circuli centrum oscillationis est infra ipsum ejus centrum per quadratum ejus radii divisum per quadruplam distantiam ipsius centri figuræ ab axe conversionis: centrum gravitatis est *itidem* in centro figuræ.

110. In recta linea IF (fig. 7), & in binis GF, G'F distantia centri oscillationis ab axe conversionis est $\frac{2}{3}$IF, distantia centri gravitatis ab eodem $\frac{1}{2}$IF.

111. In rectangulo AF figuræ 4, *& in toto prismate* AG, si *oscillatio fiat circa axem* IO, *distantia centri oscillationis ab ipso* est $= \frac{2}{3}FB + \frac{2}{3} \times \frac{KB^2}{FB}$; distantia autem centri gravitatis $\frac{1}{2}$FB.

112. In triangulo MIL, & binis prismatis triangularibus existente basi ML = EF = AB, & altitudine = FB, distantia centri oscillationis ab axe IO est $= \frac{3}{4}FB + \frac{1}{4} \times \frac{KB^2}{FB}$, & distantia centri gravitatis $\frac{2}{3}$FB.

113. Hinc per theor. III (num. 106) invenientur summæ productorum ex omnibus particulis æqualibus materiæ ductis in sua quadrata distantiarum ab axe, ducendo pro singulis distantiam *centri* oscillationis in productum ex massa, & distantia centri gravitatis. Summam particularum materiæ æqualium in singulis massis exhibebunt earum pondera. Sit pondus globi p, pondus quatuor partium nu-

me-

meri 102; n, p', n'', n''': fiant autem pro iis partibus denominationes sequentes.

114. Radius sphæræ $= r$, distantia IA (fig. 7) $= a$: erit distantia centri oscillationis $a + \frac{2r^2}{5a}$, massa p ducta in distantiam centri gravitatis pa: adeoque summa productorum $pa^2 + \frac{2}{5}pr^2$.

115. Pro circulo agglutinato sit ejus radius $= e$, erit distantia centri oscillationis $= (a - r) + \frac{e^2}{4(a - r)}$, massa ducta in distantiam centri gravitatis $= n(a - r)$, adeoque summa productorum $= n(a - r)^2 + \frac{1}{4}ne^2$.

116. Pro filo IF, vel binis filis GF, G'F erit IF $= a - r$, distantia centri oscillationis erit $\frac{2}{3}(a - r)$, massa n' ducta in distantiam centri gravitatis $\frac{1}{2}n'(a - r)$: adeoque summa productorum $\frac{1}{3}n'(a - r)^2$.

117. Pro prismate rectangulari AG (fig. 4) sit FB $= c$, KB $= d$: erit distantia centri oscillationis $= \frac{2}{3}c + \frac{2d^2}{3c}$, massa ducta in distantiam centri gravitatis $\frac{1}{2}n''c$: adeoque summa productorum $\frac{1}{3}n''c^2 + \frac{1}{3}n''d^2$.

118. Pro binis prismatis triangularibus distantia centri oscillationis erit $= \frac{3}{4}c + \frac{d^2}{4c}$, massa ducta in distantiam centri gravitatis $\frac{2}{3}n'''c$: adeoque summa productorum $\frac{1}{2}n'''c^2 + \frac{1}{6}n'''d^2$.

119. Colligendo summam omnium summarum habebitur summa omnium productorum ex omnibus particulis ductis in sua quadrata distantiarum ab axe conversionis in numeratore fractionis sequentis, & productum ex tota massa ducta in distantiam centri gravitatis communis ab eodem axe in denominatore: ipsa autem fractio exhibebit valorem distantiæ centri oscillationis quæsiti accuratam

$$\frac{pa^2 + \frac{2}{5}pr^2 + n(a - r)^2 + \frac{1}{4}ne^2 + \frac{1}{3}n'(a - r)^2 + \frac{1}{3}n''c^2 + \frac{1}{3}n''d^2 + \frac{1}{2}n'''c^2 + \frac{1}{6}n'''d^2}{pa + n(a - r) + \frac{1}{2}n'(a - r) + \frac{1}{2}n''c + \frac{2}{3}n'''c}.$$

120. Hæc formula reducetur ad multo simpliciorem, si consideretur, omnes terminos, qui pertinent ad illas quatuor partes, esse mul-

multo minores terminis, qui pertinent ad globum. Fiant hi poſtremi, $pa^2 + \frac{2}{5}pr^2 = X$, $pa = Z$, omnes reliqui in numeratore $= x$, in denominatore $= z$: habebitur $\frac{X + x}{Z + z}$, qui valor erit quamproxime $= \frac{X}{Z} + \frac{x}{Z} - \frac{Xz}{Z^2}$, omiſſis nimirum terminis ordinum inferiorum.

121. Primus terminus eſt $\frac{pa^2 + \frac{2}{5}pr^2}{pa} = a + \frac{2r^2}{5a}$ diſtantia centri oſcillationis globi : reliqui continent effectum illarum quatuor partium : in $\frac{x}{Z}$, dividendi ſunt termini numeratoris per pa, & in $\frac{Xz}{Z^2}$ multiplicandi eſſent ſinguli termini denominatoris per $pa^2 + \frac{2}{5}pr^2$, ſed ob exiguitatem ſecundi termini reſpectu primi, & ſingulorum terminorum, qui multiplicandi ſunt, ſatis erit illos multiplicare per pa^2: dividendi autem ſunt per $Z^2 = p^2a^2$; adeoque ſatis erit ipſos dividere tantummodo per p. In numeratore habentur bini pro circulo, unus pro *filo*, bini pro priſmate rectangulari, bini pro binis priſmatis triangularibus : in denominatore ſinguli pro ſingulis. Oportet evolvere ſeorſum effectus ſingularum partium.

122. Pro circulo habebitur $\frac{n(a-r)^2}{pa} + \frac{ne^2}{4pa} - \frac{n(a-r)}{p}$. Eſt autem $\frac{n}{p}$ ratio ponderum (num. 102) $= m$, & pro $\frac{(a-r)^2}{a}$ poteſt poni $a - 2r$, omiſſo $\frac{r^2}{a}$, adeoque obtinetur ex primo, & tertio termino conjunctis $a - 2r - a + r = r$. Hinc totus valor erit $- mr + \frac{me^2}{4a}$. Sed neglecto ſecundo termino obtinetur pro effectu circuli tantummodo $- mr$, ut habetur eodem num. 102 pro parte I.

123. Pro filo habebitur $\frac{n'(a-r)^2}{3pa} - \frac{n'(a-r)}{2p}$. Eſt $\frac{n'}{p} = m'$,

&

& $\frac{(a-r)^2}{3a} - \frac{a-r}{2} = \frac{a-2r}{3} - \frac{a-r}{2} = -\frac{1}{6}a - \frac{1}{6}r = -\frac{1}{6}(a+r)$: posito $a + r = If = b$, habebitur $-\frac{1}{6}m'b$, ut num. 102 pro parte II.

124. Pro prismate rectangulari habebitur $\frac{n''c^2}{3pa} + \frac{n''d^2}{3pa} + \frac{n''c}{2p}$. Est $\frac{n''}{p} = m''$, & priores duo termini sunt ordinis secundi ob m'', & $\frac{c^2}{3a}$, $\frac{d^2}{3a}$ quantitates exiguas. Quare remanebit tantummodo $+\frac{1}{2}m''c$, ut num. 102 pro parte III.

125. Pro binis prismatis triangularibus habebitur $\frac{n'''c^2}{2pa} + \frac{n'''d^2}{6pa} + \frac{2n'''c}{3p}$. Est $\frac{n'''}{p} = m'''$, & priores duo termini sunt itidem ordinis secundi. Hinc remanebit tantummodo $\frac{2}{3}m'''c$, ut num. 102 pro parte IV.

126. Pro suspensione figuræ 5, postremi duo termini non aderunt, & distantia centri oscillationis erit... $a + \frac{2r^2}{5a} - mr - \frac{1}{6}m'b$.

127. Pro suspensione figuræ 6 deerit etiam circulus agglutinatus, & distantia centri oscillationis erit .... $a + \frac{2r^2}{5a} - \frac{1}{6}m'b$.

128. Pro suspensione figuræ 4 deerit solus circulus, & distantia centri oscillationis erit... $a + \frac{2r^2}{5a} - mr + \frac{1}{2}m''c + \frac{2}{3}m'''c$.

129. Hæc pertinent ad demonstrationem eorum, quæ proposita sunt num. 102. Id, quod adjectum est num. 103, facile deducitur ex formula numeri 122, in qua habentur tres termini pro circulo. Si totum ejus pondus reduceretur conjunctum in solo centro; secundus terminus evanesceret, & remanerent soli duo extremi, qui reducerentur ad unicum $-mr$. Si pro elevatione supra centrum globi $= r$ ponatur quævis alia elevatio f, & pro ratione ponderum m ratio g; habebitur $-fg$: sed si pro materia adjecta habeatur defectus materiæ; habebitur effectus contrarius, nimirum $+fg$: idem autem pro depressione f erit $= -fg$, ut ibidem est positum.

§. XV.

§. XV.

De determinatione longitudinis penduli simplicis oscillantis ad singula secunda temporis medii .

130. DETERMINATA distantiâ puncti suspensionis a centro oscillationis, & numero oscillationum minimarum ejus penduli cum numero secundorum temporis medii, quæ ipsis respondent, debet inde erui longitudo penduli simplicis oscillantis ad singula secunda. Id facile fit per theorema elementare, & notissimum, quo etiam in superioribus usi sumus, quod nimirum sint longitudines pendulorum reciproce, ut quadrata numeri oscillationum. Erit enim ut quadratum numeri secundorum temporis ad quadratum numeri oscillationum observatarum reducti ad numerum minimarum, ita distantia puncti suspensionis a centro oscillationis, quæ est longitudo penduli simplicis æquivalentis adhibito, ad longitudinem quæsitam penduli simplicis oscillantis ad singula secunda.

131. Hæc reductio exhibet methodum determinandi id, quod innuimus numero 40; nimirum an punctum suspensionis I in fig. 7 sit in ipsa recta GG', in qua fila prodeunt e binis laminis, an paullo inferius; & si sit paullo inferius, corrigendi errorem, qui inde oriri potest. Ad id obtinendum debent adhiberi plures longitudines penduli non parum discrepantes a se invicem. Id facile fiet reddendo brevius filum GFG': poterit haberi differentia longitudinum æqualis toti cochleæ P figuræ 7, & regulæ PP' figuræ 10. Sed oportebit accelerare fere tantundem oscillationes horologii, quod itidem facile fiet reddendo brevius ejus pendulum, vel si id non liceat, alligando parti virgæ superiori aliud pondus, quod elevabit centrum oscillationis, adeoque accelerabit motum ejus penduli. Nisi id fiat; non poterunt haberi periodi concursuum satis longæ ad evitandum laborem numerandi, & ad determinandas fractiones oscillationum.

132. Si quis velit adhibere pendulum multo longius, ut unius hexapedæ; debebit parare virgas addendas virgis QR figurarum 7, & 8,

& 8, ac regulam longitudinis paullo majoris, quam sit summa longitudinis penduli quæsitæ, & semidiametri globi, cujus regulæ mensura deberet haberi itidem accuratissima. Sed ad habendum numerum oscillationum, & earum fractiones per periodos methodo, quam exposuimus, oporteret mutare itidem pendulum horologii substituto alio ita longo, ut ejus oscillationes fierent tempore proxime æquali, vel alio quadruplo breviore, ut tempus oscillationum ipsius evaderet subduplum. In hoc secundo casu haberentur periodi per concursum virgæ penduli horologii cum filo penduli adhibiti longiore redeuntem in medio arcu post binas oscillationes horologii, & singulas ejus penduli. In iis omnibus occurrit difficultas observationis multo major cum fructu nimis exiguo.

133. Si adhibeantur plures longitudines penduli, debet ex omnibus longitudinibus adhibitis prodire eadem longitudo penduli simplicis quæsiti: & quidem prodibit eadem, si quadrata numeri oscillationum fuerint reciproce proportionalia longitudinibus. Si non habeatur ea proportio accurata, & error sit major, quam qui tribui possit erroribus commissis in observando, ac tribuatur ei depressioni centri arcuum oscillando descriptorum infra rectam GG'; quantitas depressionis ipsius sic invenietur. Sit ea $= x$, longitudines penduli non correctæ a, a', numeri oscillationum n, n': erunt longitudines correctæ $a - x : a' - x :: n'^2 : n^2$; adeoque $an^2 - n^2x = a'n'^2 - n'^2x$: & proinde $n^2x - n'^2x = an^2 - a'n'^2$, nimirum $x = \dfrac{an^2 - a'n'^2}{n^2 - n'^2}$.

134. Valor x erit correctio adhibenda utrique longitudini, qua adhibita, fiet ut quadratum numeri utriuslibet secundorum temporis medii ad quadratum numeri oscillationum ipsi respondentium, ita longitudo correcta ipsis respondens ad longitudinem quæsitam penduli oscillantis ad singula secunda. Hæc longitudo obveniet eadem utralibet longitudo correcta adhibeatur cum suis numeris secundorum, & oscillationum.

135. Si differentia longitudinum penduli oscillantis ad singula secunda proveniens a binis longitudinibus adhibitis in observatione, & non correctis fuerit ita exigua, ut tribui possit difficulta-

ti observandi ; tum satis erit assumere medium arithmeticum inter binas determinationes. Si longitudines adhibitæ fuerint plures, quam duæ ; tum valor x poterit determinari per singula binaria : si is obveniat semper idem ; id poterit esse indicio, inæqualitatem longitudinum derivatarum ex adhibitis, & non correctis provenire ex eo, quod centrum arcuum oscillando descriptorum sit paullo inferius punctis G,G', & habebitur major certitudo correctionis. Diximus, id fore indicium ; quanquam fieri posset, ut correctio a diversis binariis exhibita non proveniat eadem ex eo, quod distantia centri arcuum oscillando descriptorum a recta GG' non sit eadem pro omnibus longitudinibus pendulorum, sit autem plerumque diversa, sed aliquando eadem : verum id videtur minus verosimile. Quinimmo si adhibeatur prope G filum satis flexile, videtur sane fieri non posse, ut id non obtemperet penitus ponderi trahenti, nec remaneat penitus rectilineum ab ipso primo egressu e laminis usque ad globum, potissimum cum arcus oscillando descripti sint exigui. Hinc optimum factu erit, si nulla correctione adhibita longitudinibus assumptis pro observatione, assumatur medium arithmeticum inter longitudines deductas parum a se invicem differentes.

§. XVI.

De effectu aeris, & ejus correctione.

136. DIXIMUS num. *6*, duplicem esse effectum aeris, qui reddit longitudinem penduli oscillantis in ipso diversam ab ea, quæ haberetur, si oscillationes fierent in vacuo. Primus est ab ipsius pondere, quod minuit vim gravitatis, secundus a resistentia, quarum causarum utraque retardat descensum. Primus facile æstimatur. Si capiatur pondus globi in aqua, & in aere libero, habebitur ratio gravitatis specificæ materiæ globi ad aquam, quæ erit quamproxime, ut pondus in aere ad differentiam ponderum in eo, & in aqua ; cum ea differentia sit pondus molis aquæ æqualis moli globi. Sit ea ratio n ad 1. Gravitas specifica nostri aeris ad gravitatem specificam aquæ est circiter ut 1 ad 800. Hinc

erit

erit gravitas specifica globi ad gravitatem specificam aeris, ut 800 n ad 1. Porro ex theoria gravitatis habetur, spatia descensus liberi esse, ut est vis, & quadratum temporis. Quamobrem eodem tempore erunt ea spatia ut vires: tempora oscillationum ad tempora descensus liberi per radium circuli habent rationem eandem, quæcunque sit virium magnitudo. Quare ratio virium erit eadem, ac ratio longitudinum pendulorum oscillantium ad singula secunda. Erit igitur longitudo inventa pro pendulo oscillante in aere ad longitudinem requisitam in vacuo, ut $800n - 1$, ad $800n$, sive quamproxime ut $800n$ ad $800n + 1$. Cum longitudo sit circiter linearum 440, addenda erit longitudini inventæ pro pendulo oscillante in aere pars lineæ proxime $= \frac{44}{80n} = \frac{11}{20n}$.

137. Potest adhiberi correctiuncula hujus determinationis petita ab altitudine barometri; nam aer altitudine barometri auctâ est densior, adeoque habet gravitatem specificam majorem: sed hic effectus est exiguus per sese; adeoque si discrimen in pondere comprimente sit exiguum, ut solet; inducet variationem effectus perquam exiguam: ipsa ratio gravitatis specificæ aeris ad gravitatem specificam aquæ æstimata 1 ad 800 non est accurata, sed tantum proxima.

138. Multo operosior est determinatio retardationis ortæ a resistentia aeris, & quidem admodum incerta ob incertam legem ipsius resistentiæ, quæ pendet plurimum a celeritate, sed non potest accurate determinari in qua velocitatum ratione sit, & ea omnis perquisitio potissimum, ubi agitur de fluidis elasticis, est ita implexa, ut hucusque extricari nequaquam potuerit. Quoniam ex theoriis, quæ adhiberi solent ad eam rem, determinatur simul retardatio descensus, & ascensus, ac diminutio hujus posterioris, ex qua provenit diminutio successiva oscillationum, quantitas vero ipsius diminutionis innotescit ex observatis identidem amplitudinibus arcuum; ea observatio potest prodesse plurimum ei ipsi perquisitioni. Eam hìc omittemus; & satis erit notare illud, resistentiam, imminuta velocitate, imminui plurimum. Hinc cum in arcubus exiguis velocitas sit perquam exigua; resi-

stentia ipsa, & retardatio inde orta, debent esse perquam exiguæ: habetur & compensatio quædam pro tempore cujusvis oscillationis: celeritas imminuta per resistentiam producit tempus; sed arcus in ascensu brevior, quam esset sine ipsa, contrahit nonnihil.

139. Uterque aeris effectus evitatur, si observatio instituatur in machina pneumatica. Id quidem fieri potest; sed requiritur machina ingens parata ad eam rem: longitudo penduli determinari potest ante extractionem aeris: eo extracto, motus primo imprimi potest, & restitui identidem ope ipsius machinulæ figuræ 15. Ejus basis potest affigi basi recipientis ita, ut elastrum distet a globo quiescente per duos pollices: latus CD continebitur applicatum lateri CB per filum metallicum horizontale transmissum per foramen sibi æquale excavatum in latere recipientis: id filum extra ipsum recipiens ita continebitur, ut laxatum possit excurrere vel majore vi, ad imprimendum globo quiescenti primum motum majorem, vel minore ad restituendum motum minorem primo. Sine elastro potest haberi planum verticale affixum filo ferreo crassiori horizontali, quod manu libera impellatur magis, vel minus ad imprimendum motum majorem, vel minorem: tum retrahatur statim, ne obsit globo redeunti. Verum ibi, summotâ resistentiâ aeris, durarent multo diutius satis magnæ per sese; quod si fieret per integras 24 horas, non esset opus ulla restitutione motus.

§. XVII.

De loco ad observationem instituendam idoneo.

140. Si quæratur exactitudo summa hujus determinationis; locus maxime idoneus erit conclave bene occlusum, quod ope ignis continui conservetur in gradu caloris eodem, vel parum diverso per totum tempus observationis, teste thermometro: id excludet etiam mutationem humiditatis, quod proderit plurimum methodo fili serici. Optimum esset prius per unum, vel alterum diem continere machinam, & omnia instrumenta adhibenda in ejusmodi con-

clavi

clavi præparato, ut omnia reducantur ad statum quendam permanentem.

141. Curandum, ut id conclave habeat parietes bene solidos; sit intra ædes in parte remotiore a tremoribus, qui inducuntur a curribus. Optimum factu esset, si pavimentum inniteretur fornici potius, quam trabibus: si id non occurrat, optimum erit applicare horologium ad parietem internum solidum, & collocare machinam prope ipsum: nam prope parietes habetur semper soliditas pavimenti major. Exigui tremores machinæ, & horologii turbant oscillationes nonnihil, mutando locum puncti suspensionis, quod reddit arcum descriptum tantillo majorem, vel minorem: inde habetur discrimen in tempore oscillationis: id erit perquam exiguum, si tremores non sint satis magni: adhuc tamen id etiam evitari debet, quantum licet.

142. In eodem, vel in proximo conclavi apponendum erit telescopium pro fixa: si pavimentum sit innixum fornici, poterit prope fenestram applicari candelabrum solidum metallicum, cui id adnexum sit: secus oportebit affigere parieti solido machinamentum ferreum, quod contineat fixum, & immobile ipsum telescopium. Ne per foramen fenestræ, per quod transpicitur astrum, turbetur gradus caloris intra conclave, id erit reserandum paullo ante transitum fixæ, & occludendum statim post ipsum transitum. Si telescopium sit in eodem conclavi cum machina, facile audietur sonus singularum oscillationum horologii: si sit in proximo, adhibenda erit machina, quam appellant numeratorem, *le compteur*, quæ fortiorem sonum edit ad singula secunda, & ita disponenda erit, ut sonum edat accurate in fine cujusvis oscillationis horologii.

143. Optimum esset habere duo ejusmodi telescopia fixa, alterum affixum candelabro innixo pavimento firmo, alterum parieti, quorum alterum posset collocari in eodem conclavi, alterum in proximo: directo utroque in idem astrum ita, ut exiguo intervallo temporis fixa appellat ad eorum fila, haberetur indicium de eorum immobilitate ab æqualitate ejus intervalli binis consequenter diebus. Posset itidem eidem vel candelabro, vel machinæ ferreæ affixæ muro affigi aliud telescopium directum ad obje-

ctum

ctum terrestre parum remotum : si enim id perpetuo inveniatur directum accurate ad idem punctum ejus objecti ; id erit indicio, alterum etiam , quod ad fixam dirigitur , mansisse immobile .

144. Poterit seligi domus vicina cuipiam monumento publico stabili , ut templo , & notari positio respectu ipsius , ut innotescat futuris temporibus , quo in loco observatio sit habita . Templum ipsum nequaquam seligerem , quia intra ipsum temperies multo magis mutatur , quam intra calefactum conclave : nec potest ibi haberi proximum telescopium directum ad fixam , nec vero commode poterunt assumi altitudines correspondentes , quibus tamen minus fidendum censeo , ubi agitur de determinandis non solum secundis revolutionis diurnæ , sed etiam eorum fractionibus . Si templum non sit occlusum toto observationis tempore ; oportet ibi adesse perpetuo , ne quis contingat , & oscillationes turbet , dum e conclavi facile occludendo licet recedere per plures continenter periodos : nec unquam ipsum templum ita bene occluditur , ut omnis aditus præcludatur vento , cujus impulsus turbare potest observationem . Soliditas , quæ videtur habenda major in templo pro immobilitate instrumentorum , potest obtineri summa etiam in ædibus privatis , potissimum si seligatur conclave in ima domo adjacens horto , & remotum a via publica .

145. Si locus fuerit proximus monti , vel mari , timere quis poterit actionem attractionis , vel massæ eminentis supra superficiem regularem , ad quam mente concipimus redactam hanc irregularem , & asperam , vel undæ æstus supervenientis . A maris æstu nihil timendum esse , quod sensu percipi possit , demonstravi alibi . Si æstus maris elevet stratum aquæ altum 50 pedibus , & protensum in semicirculum circa punctum littoris contigui per leucas 17 , inveni , deviationem penduli in latus ab attractione ejus strati fore 2''. 28''', si aqua habeat densitatem æqualem mediæ densitati terræ , quæ quantitas deviationis augetur parum admodum , producto strato in immensum : recedendo inde per intervallum satis exiguum , ea ipsa tam exigua quantitas decrescit plurimum . Porro ejusmodi altitudo æstus nusquam protenditur ad ingens intervallum a littoribus ; sed quod caput est , ea deviatio fit in latus :

tus : augmentum gravitatis , quæ respondet diagonali ejus parallelogrammi , cujus latera exprimunt binas vires , remanet in eo ipso littore prorsus insensibile .

146. Deviatio $2''.28'''$ in filo penduli admodum longi potest utique ita esse sensibilis , ut ope microscopii observari possit etiam centesima ejus pars . Hinc si in ipso littore , ubi ad ejusmodi altitudinem assurgunt maria , habeatur solida turris 80 , vel 60 pedum , & ex ejus muro demittatur pendulum inclusum tubo prohibente ventum cum microscopio parallelo directioni littoris ; posset videri , an adveniente æstu habeatur ejus motus in latus versus eam undam proveniens ab hujus attractione , & quantus is sit : posset haberi mensura elevationis aquæ in littore , & in pluribus etiam distantiis a littore ipso , ut inde æstimetur magnitudo , & positio massæ advenientis , & computetur ejus effectus in hypothesi mediæ densitatis terræ æqualis densitati aquæ . Si is inveniatur per observationem major , vel minor quam per calculum ; innotescet , an media terræ densitas sit minor , an major densitate aquæ , & quantum . Eo pacto haberetur indicium de constitutione interna terræ : an nimirum ea sit quidam nucleus vacuus , an versus centrum multo densior : haberetur pondus ipsius relatus ad libras nobis cognitas , dum nunc habemus dumtaxat massam terræ relatam ad massam solis , Jovis , Saturni , non ad massam terrestrium horum corporum , quæ attrectamus . Hanc methodum determinandi massam terræ ego jam olim proposui . Cum sit difficile habere in ipso littore turrim ejus altitudinis ; posset in eodem elevari malus admodum vetustus , qui minorem subeat mutationem a mutatione aeris , maxime elevatus , & ipsi adnecti tubus cum ejusmodi pendulo , & microscopio : haberentur motus ipsius mali irregulares provenientes a discrimine caloris , & humiditatis : sed longa series observationum institutarum æstu adveniente , & recedente , indicaret partem debitam regulari effectui elevationis , & depressionis marium .

147. Ex actione exigua , quam montes etiam ingentes exercent in deviandis filis pendulorum pertinentium ad instrumenta astronomica , quæ inventa est quidem aliqua , sed exigua , videtur e-

rui ,

rui, densitatem terræ in majore profunditate, infra superficiem esse multo majorem, quam prope superficiem ipsam: quanquam id posset etiam provenire ex eo, quod montes habeant ingentes cavitates in ipso sinu. Plerique ex iis, & fortasse omnes, ortum ducunt a stratis terræ elevatis vi ignium internorum, quo casu ipsorum massa non exercet attractionem majorem, quam exerceret ante suam elevationem, & accedit solum attractio massæ aquæ, quæ insinuata intra cavitates relictas, eas implevit usque ad quandam altitudinem, ac debet esse sola causa ejus exiguæ deviationis.

148. Hæc exiguitas actionis lateralis montium in causa est, cur ego minus timeam inde incrementum gravitatis, quod respondet multo minori excessui diagonalis exprimentis vim compositam, potissimum ubi montes non sint immanes. Hinc satis erit pro hisce observationibus pendulorum oscillantium seligere loca, quæ non sint proxima montibus ingentibus. Magis timerem inæqualitates textus terræ, quæ habentur infra superficiem, quæ magis directe vel conspirant cum gravitate, vel ipsi opponuntur, cum addensationes ipsam augeant, cavitates minuant. Est admodum probabile, eam esse exiguam: adhuc tamen ea potest evadere sensibilis in experimentis hujus generis, quam ob causam esset res non inopportuna, si hæ observationes instituerentur cum hac præcisione, de qua hìc egimus, in locis pluribus satis distantibus a se invicem in eadem latitudine ad deprehendendum ejusmodi discrimen.

149. Erit res satis opportuna determinatio elevationis loci supra libellam maris: sed in eo non est necessaria nimia exactitudo. Abunde erit inæqualitas altitudinis mercurii in binis barometris ad mare, & in loco observationis.

§. XVIII.

De harum observationum usu.

150. PRIMUS harum observationum usus potest esse ipsa confirmatio attractionis generalis, a qua gravitas ortum ducat. Si enim in diversis locis habentibus latitudinem eandem, & longitudines diversas, ac parum diversas elevationes supra superficiem maris inve-

veniantur diversæ longitudines penduli oscillantis ad singula secunda; ea inæqualitas non poterit provenire a discrimine vis centrifugæ motus diurni : tribuenda omnino erit discrimini attractionis ortæ tam ab irregulari textu partium terræ, quam ab irregularitate ejus figuræ. Quin immo, quoniam satis comperta est quantitas discriminis, quod oriri potest a sola vi centrifuga, idem fructus erui potest ex hujusmodi observationibus institutis in diversis locis habentibus etiam latitudines diversas. Discrimen longitudinis penduli, quod in iis invenitur majus, quam requirat solum discrimen vis centrifugæ respondentis diversis parallelis, tribuendum est discrimini attractionis compositæ ex attractionibus omnium particularum, quæ attractiones non debent esse eædem respectu punctorum positorum in diversis parallelis superficiei figuræ non sphæricæ, sed compressæ ad polos.

151. Videtur prima fronte, posse ope hujusmodi observationum inquiri etiam in ipsam legem gravitatis, eas instituendo prius in campis, vel vallibus, tum in summis montibus. Verum hæc perquisitio poterit itidem docere potius inæqualem textum partium terræ, & irregularitatem ejus superficiei, quam legem, secundum quam gravitas augetur, vel minuitur in recessu a centro. Si terra esset sphæra accurata, & prorsus plena, ac homogenea ex materia, cujus puncta omnia se mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata distantiarum; vis in centrum puncti recedentis ab ipso augeretur usque ad superficiem in ratione distantiæ simplicis, & supra superficiem minueretur in ratione ipsius reciproca duplicata. In eo transitu fieret saltus quidam ab una lege ad aliam, in quo saltu ipso diversæ methodi exhibent diversam vim, & occurrunt contradictiones quædam, quarum causa præcipua est ipsa lex virium attractivarum crescentium imminutis distantiis in ratione potentiæ paris ipsarum distantiarum. Ostendi ego alibi pluribus in locis, legem ejusmodi continuatam usque ad centrum peccare contra naturam Geometriæ. Si enim distantia post transitum per zero fiat negativa; ipsius quadratum, & omnes potentiæ pares remanent positivæ, quam ob causam vis, quæ sequatur accurate eam legem, deberet post transitum servare directionem

priorem, dum ex natura attractionis debet eam mutare in contrariam, ut retrahat in centrum, quod est prætergressa.

152. Verum si intra ejusmodi sphæram ascendat non punctum unicum, sed massa quædam, ut globus, quæ occupet partem quandam ejus spatii interni, & multo magis, si sphæra non sit plena materiâ homogeneâ, nec terminata superficie accurate sphærica, tum lex gravitatis compositæ nec in ascensu usque ad superficiem sequitur accurate rationem directam, nec ultra reciprocam duplicatam distantiarum, sed habetur unica quædam lex continua*, quæ prope eum transitum recedit plurimum ab utraque, Id accidit in terra habente tot intervalla vel vacua, vel multo minus densa, & superficiem tam asperam. Mutatio vis in ascensu ab imis vallibus ad summos montes debet esse complicatissima, & in aliis rectis lineis verticalibus longe alia. Quamobrem nihil in eo genere determinari potest per hujusmodi observationes.

153. Hæc irregularitas nocet* etiam alteri usui, quem habere possunt observationes hujus generis, nimirum ad determinandam figuram terræ. Affirmaverat jam olim Newtonus in hypothesi homogeneitatis nuclei terræ, & marium, quibus is affunditur, debere haberi figuram ellipticam, quod deinde Mac-Lavrinus accurate demonstravit, & pro ejusmodi ellipsi Newtonus invenerat, ellipticitatem, & fractionem gravitatis debere esse æquales, nimirum utramque $= \frac{1}{230}$. Ellipticitas est differentia axium divisa per axem majorem, & fractio gravitatis differentia gravitatis in æquatore, & polo divisa per posteriorem. Gradus meridiani sunt ut radii circulorum osculatorum, & hi in verticibus axium ellipseos reciproce, ut cubi semiaxium. Quare si dentur gradus sub æquatore, & polo; dabitur ratio axium, adeoque ellipticitas. Gravitates sunt ut longitudines pendulorum isochronorum. Quare si dentur hæ longitudines in æquatore, & polo, dabitur fractio gravitatis. Adjecerat Newtonus ipse, gradus meridiani, & gravitatem, auctâ distantiâ ab æquatore, debere augeri ita, ut differentiæ a minimis existentibus in æquatore ipso sint proportionales sinubus versis latitudi-

num

num duplicatarum. Clairautius invenit postea pro casu heterogeneitatis nuclei, & fluidi ambientis, eas binas fractiones debere esse inæquales ita, ut illa fractio communis pro casu homogeneitatis $= \frac{1}{230}$ sit accurate media arithmetice proportionalis inter ipsas.

154. Inde fit, ut per differentiam gravitatis æque inquiri possit in figuram terræ, ac per mensuram graduum. Si habeantur per observationes bini gradus, & binæ longitudines penduli pro binis *parallelis* terræ satis a se invicem distantibus, & ipsius terræ *figura sit elliptica*; invenientur facile per id theorema & bini gradus, & binæ *pendulorum longitudines* pro æquatore, & polo. Inveniantur *sinus versi latitudinum duplicatarum* pertinentium ad loca observationum, & fiat ut eorum differentia ad *majorem*, ita differentia graduum, vel longitudinum observatarum ad quartum terminum auferendum a gradu, vel longitudine majore, ut habeatur respondens æquatori: tum ut sinus versus major ad duplum radium, nimirum ad sinum versum semicirculi, qui est dupla latitudo in polo, ita terminus inventus in priore proportione ad quartum *terminum addendum gradui*, vel longitudini sub æquatore, *ad habenda ea*, quæ *pertinent ad polum*.

155. *Hinc e binis longitudinibus pendulorum observatis determinaretur* ellipticitas æque, ac ex *binis gradibus*: ex *his* immediate, ex illis inventa fractione gravitatis, cujus numerator est differentia longitudinum in æquatore, & polo, & denominator longitudo posterior, ac eâdem per theorema Clairautii subtractâ a *dupla fractione* homogeneitatis $= \frac{2}{230}$. Hic esset unus ex præcipuis fructibus hujus observationis, nisi *irregularitas* & superficiei terrestris, & textus interni *ejus* partium turbaret *hanc methodum*. Sine ejusmodi irregularitate tam excessus graduum, quam *excessus longitudinum* penduli oscillantis ad secunda temporis supra *gradum*, & *longitudinem* debitam æquatori, sequerentur accurate rationem *illorum* sinuum versorum: bini gradus determinati in binis latitudinibus exhiberent ellipticitatem, & binæ longitudines pendulorum fractionem gravitatis: hæc autem per theore-

ma Clairautii exhiberet itidem ellipticitatem, quæ deberet prodire eadem utrâque viâ.

156. Clairautius redux ex Lapponia cum Maupertuisio censebat; & e dimensione graduum erui ellipticitatem multo majorem fractione homogeneitatis $\frac{1}{230}$, & ex longitudinibus pendulorum fractionem gravitatis fere eandem cum ellipticitate, multo itidem majorem eadem fractione $\frac{1}{230}$: id erat contrarium theorematì a se invento, & æquilibrio naturali ipsius terræ, nec aliter explicari posse censuit id phænomenum, nisi supponendo, figuram nuclei terræ magis compressam per sese, quam æquilibrium ferret, vi illata ipsi nucleo a cohæsione partium, quæ impediret acquisitionem figuræ requisitæ ab æquilibrio.

157. Ego hanc ipsam irregularitatem metuens jam tum ab initio, affirmavi in Dissertatione edita paullo post evulgatas a Maupertisio suas observationes, dubitandum esse de illa tanta compressione Telluris, quantam ipse Maupertuisius e suis observationibus deduxerat. Deinde in pluribus ex insequentibus meis operibus comparando inter se plures gradus meridiani, & plures longitudines pendulorum, ostendi, differentias non sequi rationem illorum sinuum versorum, unde fiebat, ut singula binaria graduum, & longitudinum penduli singulas diversas determinationes exhiberent. Verum animadverti, multo majorem inveniri irregularitatem in differentiis graduum, quam in differentiis longitudinum penduli. Id autem ipsum ostendi esse maxime consentaneum rationi: nam mensura graduum perturbatur ab actione laterali montium, & collium, quæ mutando directionem pendulorum in astronomicis instrumentis, mutant positionem punctorum verticalium, sive diversorum zenith, & parum admodum magnitudinem gravitatis, dum irregularitates, quæ habentur infra superficiem, debent actione magis directa turbare multo magis magnitudinem gravitatis, quam directionem. Porro inæqualitates in superficie videmus ubique, & infra superficiem videntur debere esse multo minores saltem in ea profunditate, in qua actio debeat esse parum

rum *obliqua*; adeoque debet omnino inveniri irregularitas major in gradibus, quam in pendulis.

158. Hæc exposui tam in meo Opere *de Litteraria Expeditione per Pontificiam ditionem*, quam in Supplementis Stayanis: sed in his exhibui theoriam, quæ determinat correctionem adhibendam quinque gradibus, qui tum habebantur, ut reducantur ad proportionem illam sinuum versorum, sed juxta leges quasdam probabilitatis ibidem expositas. Iis correctionibus adhibitis inveni ellipticitatem multo minorem illâ, quam Maupertuisius deduxerat, & illis, quas post ipsum reliqui omnes adhibuerunt alii alias, nimirum non solum non majorem illa $\frac{1}{230}$, sed multo minorem, & accedentem ad eam ipsam, quæ juxta theorema Clairautii eruitur e longitudinibus pendulorum. Multo plures graduum dimensiones habitæ sunt postea. Applicatâ eâdem theoriâ correctionum ei majori numero, occurrit ellipticitas fere prorsus consentiens cum *illa*, quam requirit ea tanto major fractio gravitatis exhibita a *longitudinibus* pendulorum. De tota hac re videnda est adnotatio *adjecta in fine versionis* Gallicæ *ejusdem* Operis *De Litteraria Expeditione* edita Parisiis sub titulo *Voyage Géographique*, *&* *Astronomique*, ubi hæc omnia pluribus evolvuntur.

159. Ex his omnibus constat, optimum fore, si in locis plurimis instituantur cum summa cura observationes pro eruenda longitudine penduli oscillantis ad secunda. Cum harum longitudinum irregularitas sit tanto minor; ipsæ erunt multo magis idoneæ ad determinandam quantitatem compressionis terræ, quam diversi gradus, potissimum si iis etiam applicetur eadem correctionum theoria, quæ eodem prorsus pacto iis convenit, quo gradibus: accedit, quod earum determinatio multo minorem exigit & impensam, & laborem, quam mensura graduum.

160. Alius usus hujusce observationis est pro determinanda quantitate accurata gravitatis terrestris, quæ deinde transferatur ad quantitatem gravitatis lunæ in terram, & quæ exhibeat accurate spatium, quod grave libero lapsu debet percurrere uno secundo temporis, quæ quidem mensura est plurimarum perquisitionum ba-

basis. Est notissimum theorema, tempus unius oscillationis minimæ ad tempus casus per duplam longitudinem penduli esse, ut est semicircumferentia circuli ad diametrum: hinc cum spatia in libero descensu sint ut quadrata temporum, erit quadratum diametri ad quadratum semicircumferentiæ, sive quamproxime 113×113 ad $\frac{1}{4} \times 355 \times 355$, ut dupla longitudo penduli ad spatium, quod grave libero descensu percurreret uno secundo temporis. Si longitudo dicatur l; id spatium evadit $\frac{355 \times 355 l}{113 \times 226}$. Cumque Parisiis sit l proxime linearum 440, evadit id spatium $=$ *lin.* $2171 \frac{1}{3}$, sive proxime pedum 15, & unius pollicis. Quantitas accurata pro locis singulis determinabitur habita pro iis accurata longitudine l penduli oscillantis ad singula secunda. Sed hæc ipsa quantitas erit alia in aliis locis. Si figura terræ esset regularis, habitâ eâ quantitate pro uno loco, eadem haberetur pro omnibus aliis positis in eadem latitudine, & facile deinde deduceretur pro reliquis latitudinibus omnibus ex illa proportionalitate excessuum supra gravitatem sub æquatore cum sinubus versis latitudinum duplicatarum: tum etiam facile determinaretur quantitas descensus majoris, quam impedit vis centrifuga. Sed irregularitas illa efficit, ut debeat inveniri aliquod discrimen non solum aliud in aliis latitudinibus irregulariter, sed etiam in eadem latitudine alibi aliud, exiguum quidem, sed tamen aliquod, quod impedit usum observationis institutæ in uno loco pro habenda ea quantitate in aliis penitus accurata.

161. Apponemus pro usu postremo mensuram universalem, quæ inde peti solet, quæ nimirum possit ex uno loco terræ extendi per totam ejus amplitudinem, & transmitti ad posteros. Ad eam rem censent, assumendam esse pro ea mensura universali longitudinem penduli simplicis oscillantis ad singula secunda. Cum ea inveniatur paullo longior tribus pedibus Parisiensibus; censent, ipsâ divisâ in partes æquales tres, posse eum appellari pedem horarium, quæ mensura remaneat certa, & immunis ab omni periculo erroris apud omnem posteritatem.

162. Ne habeatur ejusmodi mensura universalis pro locis omnibus,

bus, hic etiam opponitur irregularitas eadem figuræ terrestris, saltem si quæratur summa exactitudo. Oportet notare non solum latitudinem loci, sed etiam longitudinem, & designare locum ipsum observationis, ac mensuram ibi inventam transferre insculptam in regula metallica, uti nunc fit. Aliter qui pedem horarium invenerit uno in loco per ejusmodi observationem, non habebit pedem pertinentem ad alium quempiam accurate, sed tantum vero proximum.

163. *Accedit pro omnibus hisce usibus exigua quidem, sed tamen aliqua incertitudo* effectuum resistentiæ, & gravitatis aeris, *qui possunt* æstimari itidem veris *proximi*, non penitus accurati. Verum, quod pertinet ad mensuram universalem non solum respectu omnium diversorum locorum terræ, sed omnium temporum, habentur aliæ causæ incertitudinis, potissimum si agatur de temporibus admodum remotis.

164. *In primis* incertum est, an massa terræ conservetur semper *eadem*. *Exigua* mutatio ipsius habetur quotidie in exhalationibus, *quæ elevantur* supra superficiem Telluris: illæ particulæ, quando *erant infra superficiem*, augebant gravitatem; quando sunt elevatæ *supra*, eam *minuunt*. *Mutant quantitatem* attractionis etiam flumina, & *pluviæ*, *mutata positione particularum attrahentium*: æstus maris, & *alii motus ipsius varii idem præstant*. Ea omnia edunt effectus admodum exiguos, & insensibiles, sed tamen edunt semper aliquos, ut liceat ubique agnoscere discrimen inter veritates æternas, quas nobis suggerit Geometria, & Calculus, & illas, in quibus se immiscet Physica. In illis numquam fallimur, si rite procedimus: *in his non est datum homini*, ut non erret, sed ut minus erret.

165. Verum ubi agitur de tractu temporis multo longiore, ut *plurium* sæculorum, videtur haberi posse dubium de multo *majore*, & permanenti mutatione massæ totius terræ. Nescimus, an in *ejus motu circa* solem *aliquid*, quod ad eam pertinebat, remaneat retro, *immixtum atmosphæræ solari*; an aliquid ex atmosphæra solari e *contrario immixtum* cum atmosphæra terrestri ipsi accedat, & perpetuo adhæreat: an e cometarum caudis ali-

quid

quid in eorum transitu prope terram recidat in hanc ipsam. Fiet utique ex hisce omnibus capitibus mutatio aliqua: habebuntur compensationes, sed nunquam innotescet, an compensationes fiant accurate, an post admodum longam sæculorum seriem habeatur aliqua non insensibilis mutatio in massa terræ.

166. Verum non sola mutatio massæ terrestris mutaret longitudinem penduli: ejus mutatio proveniret etiam a mutatione motus diurni. Duplex in eo mutatio haberi potest, altera directionis, altera celeritatis. Videntur saltem jam a longo tempore poli terræ occupare eadem puncta superficiei ipsius: solent pro indicio afferri directiones laterum pyramidum Ægypti a borea in austrum permanentes per tot sæcula. Sed in primis non constat, an eam directionem habuerint accuratam initio, nec vero an hodie habeant penitus accuratam, an tantummodo proximam directioni lineæ meridianæ. Deinde si polus habuisset motum in ipsa directione ejus meridiani; directio earum pyramidum adhuc hodie abiret a borea in austrum. Altitudo poli conservata, & conjuncta cum conservata directione lineæ meridianæ melius probaret perseverantiam *poli in eodem loco*; sed non habemus veteres poli altitudines, nisi determinatione satis crassa per crassiora illa instrumenta, quibus Veteres utebantur.

167. Ex alia parte habentur causæ physicæ, quæ possent inducere mutationem positionis poli. Possent homines longo labore inducere ejusmodi mutationem, ut jam olim notavit Newtonus. Si nimirum congererent satis magnam partem massæ terrestris in unum locum, & extruerent montem ingentem; polus terræ inciperet mutare locum, & erraret per ejus superficiem. Mutationes exiguas positionis partium terræ inducit perpetuo Natura ipsa: nescimus, an eæ longo tractu temporis debeant inducere mutationem sensibilem. Sine ullo impulsu cometæ cujuspiam possent fortasse haberi post immanem sæculorum seriem mutationes in positione poli etiam ita magnæ, ut sunt eæ, quas suspicantur jam accidisse nostro globo ii, qui tribuentes ipsi immanem antiquitatem censent, æquatorem olim fuisse Lapponiæ proximum.

168. Quid vero de celeritate motus diurni? An ea perseveret

sem-

semper eadem, scire non possumus. Possunt quidem homines ope observationum accuratissimarum invenire rationem conversionis diurnæ ad conversionem annuam. Sed in primis eam nondum habemus satis certo cognitam: dubitatur adhuc ob crassiores Veterum observationes, an annus habeat hodie eundem numerum dierum, minutorum, secundorum, quem habuit olim: si habeat diversum, potest id discrimen provenire tam a mutata magnitudine temporis annui, quam a mutata magnitudine diurni: si habeat eandem; adhuc dubitari poterit, an magnitudo utraque remanserit constanter eadem, an potius mutatio facta fuerit in utroque motu in ratione eadem.

169. Porro habentur causæ physicæ mutationis cujuspiam non solum in motu annuo, sed etiam in diurno. Terra conversionem diurnam non peragit in vacuo, sed in fluido quodam, tenui quidem, sed tamen constante materiâ, quæ possit retardare motum ipsum. Newtonus ipse, cui tribuitur sententia de motu astrorum in vacuo, non admisit verum vacuum, sed fluidum tenue. Habetur expresse apud ipsum opinio de resistentia aliqua, dum dicit: *Majora autem Planetarum, & Cometarum corpora in spatiis minus resistentibus motus suos conservant diutius*. Hæc resistentia post longissimam sæculorum seriem posset minuere celeritatem motus diurni mutatione sensibili.

170. Verum mutatio fortasse multo major induci posset a mutatione positionum, quam multæ partes massæ terrestris subeunt respectu totius globi. Concipiamus partem massæ momento temporis avulsam a polo, ubi habebat tantummodo motum annuum, & translatam sub æquatorem nocturno tempore, quo motus diurnus conspirat cum annuo. Ibi impulsu partium contiguarum deberet acquirere etiam diurnum, adeoque accelerari: ea acceleratio deberet retardare motum diurnum totius globi. Si e contrario massa avulsa ab æquatore transferretur in binos polos; ea imprimeret motum majorem partibus sibi contiguis, qui motus induceret mutationem aliquam in motu annuo, nullam in motu diurno. Plurimæ partes massæ terrestris mutant distantiam a polo, ut flumina, ut maria tot motibus agitata, naves, currus, ho-

mines: ea omnia abeunt ad loca majoris, vel minoris celeritatis motus diurni, & exemplum massæ momento temporis translatæ a polo ad æquatorem, & ab æquatore ad polum, indicat compensationem non haberi in regressu versus polum, vel saltem inducit dubium de compensationis æqualitate. Si compensatio non sit accurata; habebitur post longam sæculorum seriem diminutio motus diurni.

171. Jam vero ea omnia inducerent mutationem in longitudinem penduli oscillantis ad singula secunda temporis medii in eodem loco. Massa mutata id præstaret ob mutatam vim gravitatis, cui cæteris paribus est proportionalis longitudo temporis: positio poli mutata mutaret vim centrifugam motus diurni, mutaret positionem partium terræ, mutato situ compressionis, & elevationis respondentium ei vi: ex utroque capite subiret mutationem longitudo penduli oscillantis in eodem loco. Sed mutata celeritas motus diurni id præstaret multo magis: quia duratio *conversionis* diurnæ fixarum magis diuturna admitteret *majorem numerum* oscillationum ejusdem penduli, cujus longitudo esset idcirco augenda ad reddendum numerum, qui ante ejusmodi mutationem habebatur.

172. Addi potest incertitudo naturæ *gravitatis*. Si ea pendet ab aliqua ex iis causis, quas appellant *mechanicas*, *nimirum* ab aliquo impulsu materiæ, ut Cartesiani eam repetebant a suis vorticibus, Hugenius a suis motibus circularibus in omnes plagas, & Dominus Le-Sage multo sane conformius ad leges mechanicæ, licet per hypothesim itidem prorsus arbitrariam, & quæ non ita facile admittenda esse videatur, impulsu suarum particularum ultramundanarum, ut illas appellat; haberi utique posset aliqua mutatio nobis ignota in motu, & celeritate ejus materiæ. Quod si gravitas provenit a lege aliqua primitiva, vel innata, & propria materiæ, vel inducta a libera voluntate Creatoris; utique nunquam homini constare poterit, an ea qualitas, undecunque proveniat, intendi possit, & remitti; quod si fiat, jam longitudo penduli mutationem subibit, & mensura credita universalis, ac transmissa ad posteros hac methodo eos fallet.

173.

173. Ex hisce omnibus constat semper magis, quantum incertitudinis ubique secum trahat Physica, ubi semel se puræ Mathesi immiscet, & quam misera sit humani generis conditio, potissimum ubi in naturam inquirit. Ubique illud se prodit, *Mundum tradidit disputationi eorum, ut non inveniat homo omne opus, quod operatus est*. Nihil habemus certum, & stabile, nisi prima principia, & quæ ab iis recta ratiocinatione deducuntur, quod æterna Geometriæ, & Calculi præclarissima inventa usque adeo commendat, & ostendit, ipsa etiam per sese nostris studiis, & humanæ mentis contemplatione dignissima.

§. XIX.

Additamentum de centro oscillationis.

174. In mea *Theoria Philosophiæ Naturalis* ut multa, ita & ea, quæ pertinent ad centrum oscillationis, deduxi ex sola lege vis compositæ expressæ per diagonalem parallelogrammi, cujus latera exprimunt vires componentes. Considerando actiones mutuas trium massarum, quæ agant in se invicem vel se mutuo attrahendo, vel repellendo, inveni theoremata generalia, & elegantia, & fœcunda, quæ pertinent ad vires agentes in massas singulas, quarum quælibet componitur e binis actionibus reliquarum binarum massarum. Horum alia pertinent ad directiones earum virium compositarum, alia ad magnitudines. Ex eo, quod pertinet ad magnitudinem earum virium, deduxi omnem theoriam centri oscillationis. Hìc methodo adhuc simpliciore demonstrabo illud unicum, ex quo profluit theorema generale, quod hìc appellavi I num. 105, tum ex eo deducam ea omnia, quæ pertinent ad centrum oscillationum figurarum, quibus usus sum in toto §. XIV, ad eruendas formulas ibidem propositas.

175. Sint in fig. 20 (Tab. VII) tres massæ in A, B, C, quæ agant in se mutuo utcumque: figura est aptata casui, quo omnes se mutuo attrahant: sed si vel omnia, vel aliqua e tribus actionum binariis se repellant; facile erit omnibus iis casibus aptare figuram huic similem, & in omnibus habebuntur hæc eadem, quæ hìc exhibe-

hibebo pro hoc casu. Massa A attrahatur a massis B, C per vires AD, AE, quæ componant vim AF: massa B a massis A, C per vires BG, BH, quarum composita sit BI: massa C a massis A, B per vires CK, CL, quarum composita sit CM.

176. Quod pertinet ad directiones, inveni omnes tres directiones AF, BI, CM, utrinque productas, semper transire per quoddam punctum commune, vel esse omnes parallelas inter se: tum in casu, in quo id punctum sit intra triangulum ABC, vel omnes tres eas vires compositas dirigi ad id punctum, vel omnes ad partes ipsi oppositas: & in casu, in quo id jaceat extra ipsum triangulum, vel earum mediam dirigi ad id punctum, & reliquas binas ad partes ipsi contrarias, vel illam ad partes contrarias, & binas reliquas ad ipsum: ubi autem, eo puncto abeunte in infinitum, evadant parallelæ ipsæ tres rectæ, vim mediam habere directionem contrariam directioni extremarum. Quod autem pertinet ad magnitudinem, vires binarum esse ad se invicem in ratione composita ex hisce tribus, reciproca massarum, reciproca distantiarum a tertia massa, & reciproca sinus anguli, quem earum virium compositarum directiones continent cum rectis jungentibus eas massas cum massa tertia.

177. En demonstrationem hujus postremi, quod solum hic erit satis. Ratio AF ad BI componitur ex tribus AF ad AD, AD ad BG, BG ad BI. Porro prima AF ad AD est ratio sinus ADF, ad sinum AFD, nimirum ob DF, AC parallelas ut sinus anguli CAB, qui est supplementum prioris, ad sinum CAF, qui est alternus posterioris: AD ad BG est ratio massæ B ad massam A: BG ad BI est ratio sinus GIB, sive CBI ejus alterni ob GI, BC parallelas, ad sinum BGI, sive CBA ejus supplementi. Secunda ex iis tribus est ratio reciproca massarum: prima, & ultima est *sin.*CAB $\times$ *sin.*CBI ad *sin.*CAF $\times$ *sin.*CBA. Hæc ratio componitur itidem ex binis, quarum prior est *sin.*CAB ad *sin.*CBA, sive CB ad CA, nimirum reciproca distantiæ CA ad distantiam CB earundem massarum a tertia, posterior est *sin.*CBI ad *sin.*CAF, quæ est ratio reciproca sinuum angulorum CAF, CBI, quos eæ directiones continent cum rectis jungentibus eas massas cum tertia.

tia.

tia. Adeoque habentur tres rationes propositæ in theoremate demonstrando.

178. Porro eadem ratio habebitur, sive illæ tres massæ agant in se invicem immediate, sive per intermedias, quarum actiones mutuæ ita se invicem destruant, ut remaneat solus effectus in motu, vel pressione extremarum: semper actiones in massis extremis erunt contrariæ, & reciprocæ massis agentibus, adeoque in iis recurrent proprietates eædem.

179. Sit jam in fig. 21 C punctum, per quod transit axis conversionis perpendicularis plano, in quo jaceant plures massæ positæ in diversis ejus punctis A, quæ concipiantur connexæ cum puncto C, & cum alia quadam massa B collocata in centro oscillationis, & connexa itidem cum C ita, ut omnes eæ massæ debeant conservare positionem mutuam, adeoque describere arcus circulorum similes habentes pro centro C. Sit M centrum gravitatis commune omnium ejusmodi massarum: CN linea verticalis: AA', BB', MM' perpendiculares in ipsam: Bb' arcus oscillando descriptus a massa B, qui ex natura centri oscillationis erit æqualis illi, quem ea massa describeret vi suæ gravitatis, si ea esset sola; nimirum quem describerent omnes massæ, si essent ibi compenetratæ cum ipsa, ubi Bb sit motus, quem sine actione nova gravitatis habuisset ea massa ex velocitate præcedente, bb' motus adjectus ex novo impulsu gravitatis ipsius. Pariter sit Aa' arcus descriptus a massa A, cujus Aa sit pars debita velocitati præcedenti, aa'' pars, quæ fuisset adjecta ab actione gravitatis, $a'a''$ pars ablata, ut figura exprimit, vel adjecta a nexu cum C, & B pro varia positione illius respectu harum.

180. Ex actione mutua massarum A, C, B massa A amittit, vel acquirit motum $a'a''$, adeoque massa B ex ipsa deberet acquirere, vel amittere partem motus, quem habet secundum directionem Bb, quæ esset ad $a'a''$, in ratione composita ex illis tribus, nimirum reciproca massarum B, A, reciproca distantiarum BC, AC, reciproca sinuum angulorum CBb, CAa: cum ii anguli sint recti, adeoque æquales, relinquuntur solæ priores binæ rationes: sed quoniam ea massa accelerata ab aliquibus massis A, retarda-

ta ab aliis, percurrit arcum, quem percurreret, si nullum haberet ejusmodi nexum; oportet, summa omnium ejusmodi actionum sit = o.

181. Dicantur eæ massæ A, & B. Erit ob arcus similes tam pars Aa ad Bb, quæ sunt continuationes motus præcedentis, quam totus arcus Aa' ad totum Bb', adeoque & residuum aa' ad bb' in ratione CA ad CB. Quare erit $aa' = \frac{CA \times bb'}{CB}$. Vis gravitatis absoluta ad eam partem, quæ accelerat descensum obliquum e in fig. 19, ut AP ad AD (num. 98), nimirum ut GA' ad AE, sive hic ut CA ad AA'. Quare eæ vires, quæ accelerant descensum in B, & A, erunt, ut $\frac{BB'}{CB}$ ad $\frac{AA'}{CA}$; adeoque erit $aa'' = \frac{AA'}{CA} \times \frac{CB}{BB'} \times bb'$, & $a'a'' = \frac{AA'}{CA} \times \frac{CB}{BB'} \times bb' - \frac{CA \times bb'}{CB}$. Hic valor ducendus erit in $\frac{A}{B} \times \frac{CA}{CB}$ ad habendum effectum nexus in B, qui effectus idcirco erit $\frac{A}{B} \times \frac{AA'}{BB'} \times bb' - \frac{A}{B} \times \frac{CA^2}{CB^2} \times bb'$.

182. Si summa horum valorum fiat = o; tollendi erunt factores, qui sunt communes omnibus terminis. Hujusmodi sunt bb', & B (valor A pro aliis massis est alius, adeoque pro aliis terminis alius), ac si summa exprimatur per S., & quantitates BB', CB^2 communes singulis binarum summarum terminis ponantur extra signum summæ, habebitur $\frac{S.A \times AA'}{BB'} = \frac{S.(A \times CA^2)}{CB^2}$, sive $CB = \frac{BB' \times S.(A \times CA^2)}{CB \times S.(A \times AA')}$. Porro si summa omnium massarum A dicatur M; productum ex M, & distantia MM' æquatur summæ productorum omnium e singulis massis A ductis in suas distantias AA', adeoque est $S.(A \times AA') = M \times MM'$. Quare habebitur $CB = \frac{BB' \times S.(A \times CA^2)}{CB \times M \times MM'}$.

183. Hoc ostendit, in quavis recta ducta ex C haberi aliquod punctum B, quod habebit partem oscillationis Bb eandem, quam ha-

haberet sine nexu cum aliis; sed si directio rectæ CB non congruat cum directione CM, id punctum in aliis positionibus penduli, nimirum in aliis partibus oscillationis erit aliud: nam manente $S.(A \times CA^2)$, & M, qui valores non pendent a loco totius systematis oscillantis, mutatur perpetuo MM', & $\frac{BB'}{CB}$, qui posterior est valor sinus anguli variabilis BCB'; adeoque mutabitur valor CB, nisi remaneat constans totus valor $\frac{BB'}{CB \times MM'}$. Hic valor erit constans solum in casu, in quo recta CB transeat per centrum commune gravitatis M. Eo casu erit CB : BB' :: CM : MM', adeoque $\frac{BB'}{CB \times MM'} = CM$, qui valor in tota oscillatione non mutatur, manente nimirum semper distantia CM centri gravitatis M a puncto suspensionis C.

184. Quare habebitur solum in recta CM transeunte per punctum suspensionis, & centrum gravitatis punctum quoddam B, quod oscillabit eodem modo, quo oscillaret sine nexu cum ullis massis, sive quo oscillaret, si omnes massæ essent compenetratæ in ipso. *Ejus autem distantia* CB a puncto suspensionis C, posito CM pro $\frac{BB'}{CB \times MM'}$ in formula finali num. 182 habebit pro valore $\frac{S.(A \times CA^2)}{M \times CM}$. Id erit centrum oscillationis commune. Si massæ non jaceant in eodem plano perpendiculari ad axem conversionis; describent singulæ arcus habentes pro centro diversa puncta C ipsius axis, æquales iis, quos describerent, si transferrentur per rectas parallelas eidem in planum ipsi perpendiculare transiens per centrum commune gravitatis, & acceleratio, ac retardatio massæ cujusvis A, & massæ conceptæ in puncto B fiet eodem modo; adeoque formula remanebit eadem, si pro distantiis CA, CM intelligantur distantiæ perpendiculares ab axe ipso. Hinc habebitur illud theorema I num. 105. *Si omnes æquales particulæ totius materiæ*, nimirum omnes massulæ A, *ducantur in quadrata suarum distantiarum ab axe conversionis*, nimirum in suos valores

CA^2,

CA^2, *ac summa omnium ejusmodi productorum*, nimirum S.(A $\times CA^2$), *dividatur per productum ex summa omnium particularum*, *&* *distantia centri gravitatis communis ab eodem axe*, nimirum per M$\times$CM; *quotus erit distantia centri oscillationis communis ab eodem axe*, nimirum CB.

185. Ut ex hoc theoremate deducantur centra oscillationis diversarum figurarum; oportet invenire summam productorum e singulis earum particulis ductis in quadrata suarum distantiarum ab axe conversionis: nam locus centri gravitatis figurarum regularium, quibus hìc indigebimus, est satis notus, adeoque & ejus distantia ab axe conversionis. Id facile præstabitur per prima elementa simplicia calculi integralis nota omnibus Tyronibus. Incipiemus a recta linea CD (fig. 22) suspensa per punctum C. Sit CD $= a$, CA $= x$, Aa $= dx$. Erit A$a \times CA^2 = x^2dx$, cujus integrale $\frac{1}{3}x^3$ pro CA, adeoque pro CD $= \frac{1}{3}a^3$. Summa particularum erit a, centrum gravitatis in medio, adeoque ejus distantia a puncto C $= \frac{1}{2}a$: horum productum $\frac{1}{2}a^2$. Dividendo $\frac{1}{3}a^3$ per $\frac{1}{2}a^2$, obtinetur $\frac{2}{3}a$, quod adhibuimus num. 110.

186. Sit jam recta EDF (*fig.* 23), quam secet bifariam, & ad angulos rectos recta CD; pertineat autem C ad axem perpendicularem plano ECF, & ponatur CD $= a$, DA $= y$, EF $= 2b$. Erit Aa $= dy$, $CA^2 = a^2 + y^2$; A$a \times CA^2 = a^2dy + y^2dy$, cujus integrale $a^2y + \frac{1}{3}y^3$ erit summa pertinens ad DA, & $a^2b + \frac{1}{3}b^3$ summa pertinens ad DF, $2a^2b + \frac{2}{3}b^3$ summa pertinens ad totam rectam EF, cujus si quæratur centrum oscillationis, oportebit dividere eum valorem per $2ab$ productum distantiæ centri gravitatis $= a$, & valoris rectæ $2b$; unde orietur $a + \frac{b^2}{3a}$. Sed hìc utemur summâ productorum pertinentium ad ipsam ad habendam summam eorum, quæ pertinent ad rectangulum, & prisma.

187. Sit (fig. 24) rectangulum GKLH, quod debeat oscillare circa axem perpendicularem ejus plano transeuntem per punctum C positum in medio latere GH. Recta CI parallela lateribus GK, HL secabit ad angulos rectos, & bifariam tam latus KL in I, quam omnes rectas EF, ef ipsi parallelas in D, d. Fiat CD $=$

x, Dd

x, D$d = dx$, CH $=$ DF $= b$. Ponendo in formula superiore x pro a, erit summa pertinens ad rectam EF $= 2bx^2 + \frac{2}{3}b^3$. Quare summa pertinens ad rectangulum EefF erit $2bx^2dx + \frac{2}{3}b^3dx$. Ejus integrale $\frac{2}{3}bx^3 + \frac{2}{3}b^3x$, exhibebit summam pertinentem ad GEFH; & si tota longitudo CI dicatur c; summa pertinens ad totum rectangulum GKLH erit $\frac{2}{3}bc^3 + \frac{2}{3}b^3c$.

188. Summa omnium particularum ipsius est $2bc$, centrum gravitatis in medio, adeoque ejus distantia a puncto C $= \frac{1}{2}c$, factum ex hisce binis terminis bc^2, per quod diviso valore $\frac{2}{3}bc^3 + \frac{2}{3}b^3c$, obtinetur $\frac{2}{3}c + \frac{2b^2}{3c}$. Idem autem obveniet, si loco simplicis rectanguli GKLH haberetur prisma rectangulare, cujus sectio esset GL, & longitudo parallela axi: nam ad habendam summam particularum ductarum in quadrata distantiarum ab axe valor $\frac{2}{3}bc^3 + \frac{2}{3}b^3c$ ducendus esset in eam longitudinem, & ad habendam summam earundem ductam in distantiam centri gravitatis, ducendus esset valor bc^2 in ipsam longitudinem, quæ per divisionem elisa reliquisset eundem valorem $\frac{2}{3}c + \frac{2b^2}{3c}$. Id adhibitum est num. 111. Est hìc c, quod ibi FB, & hìc b, quod ibi KB.

189. *Quod si habeatur* (fig. 25) *triangulum isosceles* KCL, cujus basim KL altitudo CI secet bifariam, & ponatur CI $= c$, IK $=$ IL $= b$, CD $= x$, erit CI $= c$: IL $= b$ :: CD $= x$: DF $= \frac{bx}{c}$. Hoc valore posito pro b in formula $2a^2b + \frac{2}{3}b^3$ numeri 186, & x pro a, habebitur summa pertinens ad rectam EF $= \frac{2bx^3}{c} + \frac{2b^3x^3}{3c^3}$, adeoque summa strati E$ef$F $= \frac{2bx^3dx}{c} + \frac{2b^3x^3dx}{3c^3}$: hujus integrale est $= \frac{bx^4}{2c} + \frac{b^3x^4}{6c^3}$. Posito toto valore c pro x, habetur $\frac{1}{2}bc^3 + \frac{1}{6}b^3c$. Summa particularum totius trianguli est bc: distantia centri gravitatis in triangulo a vertice C $= \frac{2}{3}$CI $= \frac{2}{3}c$: horum productum $\frac{2}{3}bc^2$. Dividendo $\frac{1}{2}bc^3 + \frac{1}{6}b^3c$ per hunc valorem, habetur $\frac{3}{4}c + \frac{b^2}{4c}$, quod eodem modo

applicatur prismati habenti longitudinem quamcumque parallelam axi. Id adhibitum est num. 112, ubi est FB altitudo, quæ hìc est c, & KB dimidia basis, quæ hìc est b.

190. Sit (fig. 26) recta CD perpendicularis plano circuli GNHM, cujus centrum D, diametri NM, GH sibi invicem perpendiculares, axis conversionis PQ parallelus priori, chordæ ED'F, edf parallelæ posteriori, adeoque sectæ ad angulos rectos, & bifariam in D', d: sit autem D'C' parallela DC, cui erit etiam æqualis in parallelogrammo CC'D'D. Fiat CD = C'D = a, DD' = x, D'F = y, DM = b, HF = z, $Ff = dz$, qui valor est $\frac{bdx}{y}$, cum in circulo sit cosinus D'F arcus HF = y ad radium = b, ut differentia sinus Dd = dx ad differentiam arcus $dz = \frac{bdx}{y}$. Erit $FC'^2 = a^2 + y^2$, adeoque summa productorum $FC^2 \times Ff = S.a^2dz + S.y^2dz$. Erit $S.a^2dz = a^2z$, & ponendo $\frac{bdx}{y}$ pro dz in secundo termino y^2dz habetur $bydx$. Porro ydx est areola D'dfF, adeoque $S.y^2dz$ erit productum ex b, & area DD'FH. Puncto F abeunte in M, arcus HF = z evadit = HM quadrans peripheriæ, & area DHFD' evadit quadrans areæ circuli = $\frac{1}{2}$ DM × HFM. Si autem ponatur 1 ad c ratio radii circuli ad circumferentiam, evadit HFM = $\frac{1}{4}cb$, & summa pertinens ad quadrantem peripheriæ HFM = $\frac{1}{4}ca^2b + \frac{1}{8}cb^3$. Hinc summa pertinens ad totam peripheriam = $ca^2b + \frac{1}{2}cb^3$.

191. Concipiantur jam circuli, quorum radii DD' = x, Dd = $x + dx$: habebitur summa pertinens ad aream prioris ponendo x pro b, & pro annulo genito a D'd eadem erit ducenda in dx. Quare pro annulo habebitur $ca^2xdx + \frac{1}{2}cx^3dx$. Ejus integrale erit $\frac{1}{2}ca^2x^2 + \frac{1}{8}cx^4$. Crescente DD' = x usque ad radium DM = b, erit summa pertinens ad totum planum circuli = $\frac{1}{2}ca^2b^2 + \frac{1}{8}cb^4$. Ejus circuli area est $\frac{1}{2}cb^2$, & centrum gravitatis in D, adeoque ejus distantia ab axe = a, & productum ex area in hanc distantiam = $\frac{1}{2}cab^2$. Diviso priore valore per hunc, remanet distantia cen-

centri oscillationis ab axe $= a + \frac{b^2}{4a}$. Id adhibitum est num. 109: nam remanet id centrum infra centrum circuli per $\frac{b^2}{4a}$.

192. Si habeatur cylindrus, cujus axis CD, basis æqualis ei circulo; concipiantur binæ ejus sectiones per puncta axis V, u, quæ erunt itidem circuli eodem radio $= b$, & fiat CV $= u$: pro priore circulo ponendo u pro a habebitur $\frac{1}{2}cb^2u^2 + \frac{1}{8}cb^4$; & pro strato, cujus altitudo Vu $= du$ fiet $\frac{1}{2}cb^2u^2du + \frac{1}{8}cb^4du$, cujus integrale $\frac{1}{6}cb^2u^3 + \frac{1}{8}cb^4u$. Quare pro toto cylindro ponendo a pro u erit summa $\frac{1}{6}cb^2a^3 + \frac{1}{8}cb^4a$. Centrum gravitatis existens in medio axe cylindri distat ab axe conversionis per $\frac{1}{2}a$, & ejus solidum est $= \frac{1}{2}cb^2a$, quorum productum $\frac{1}{4}cb^2a^2$. Diviso illo valore per hunc, obtinetur $\frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}$. Hìc esset valor pro filo, si id consideraretur ut cylindrus. Sed ob tenuitatem summam evanescente radio sectionis b præ longitudine fili a, omisso secundo termino, relinquitur $\frac{2}{3}a$, quod congruit cum eo, quod habetur num. 185 de recta, & applicatur filo habito pro simplici recta.

193. Remanet id, quod pertinet ad sphæram, & positum est primo loco num. 108: id deducemus considerato in fig. 27 circulo EMFN, cujus planum sit perpendiculare axi conversionis. Sit DC distantia perpendicularis ipsius ab eodem axe, quæ occurrat ejus peripheriæ in M, N, ac sit diameter GDH, & chorda EF perpendicularis diametro MN, quæ secabit ipsam chordam bifariam in D', ac fiat CD $= a$, DM $= b$, DD' $= x$, D'F $= y$, HF $= z$, omnia ut prius. Erit CF^2 $=$ CD^2 $+$ DF^2 $-$ 2CD $\times$ DD' $=$ $a^2 + b^2 - 2ax$; Ff $\times$ CF^2 $= a^2dz + b^2dz - 2axdz$. Priorum binorum terminorum summa est $a^2z + b^2z$: postremus evadit $2abdy$; nam in circulo est itidem $dz = -\frac{bdy}{x}$ (*), adeoque e-

(*) Id fluit etiam e valore $dz = \frac{bdx}{y}$ (num. 190). Cum enim sit $x^2 + y^2 = b^2$, est $2xdx + 2ydy = 0$, adeoque $-\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y}$.

jus integrale $2aby$. Abeunte F in M, & N, hic terminus evaneſcit facto $y = 0$, & pro dimidia peripheria MHN habetur $z = \frac{1}{2}cb$, adeoque ſumma pro ipſa $\frac{1}{2}ca^2b + \frac{1}{2}cb^3$, & pro tota peripheria $ca^2b + cb^3$. Hinc ſi concipiantur circuli, quorum radii DD', Dd, poſito x pro b, & ducendo in dx, erit ſumma pro annulo D'd $= ca^2xdx + cx^3dx$, cujus integrale $\frac{1}{2}ca^2x^2 + \frac{1}{4}cx^4$, po[illegible]to iterum b pro x, erit $\frac{1}{2}ca^2b^2 + \frac{1}{4}cb^4$.

194. Si quæreretur pro ipſo diſtantia centri oſcillati[illegible], dividendus eſſet hic valor per ejus aream $\frac{1}{2}cb^2$ cum diſtantia D[illegible]tri gravitatis D ab axe $= a$: obveniret $a + \frac{b^2}{2a}$. Sed ut procedatur ad ſphæram, ſit MGNH (fig. 28) ſectio ſphæræ facta per axem PQ, & centrum D cum diſtantia DC, diametro MN, chordis FE, fe perpendicularibus ad axem, & diametro GH ipſi axi parallela, quæ ſecabit bifariam in D' ad angulos rectos chordam FE. Chordâ ipſâ productâ uſque ad axem in C', ponatur CD $=$ C'D' $= a$, DM $= r$, DD' $= x$, D'E $= y$. Pro circulo EDF habebitur ſumma ponendo in formula numeri ſuperioris y pro b, adeoque erit $\frac{1}{2}ca^2y^2 + \frac{1}{4}cy^4$, & pro ſtrato EF$fe$ $\frac{1}{2}ca^2y^2dx + \frac{1}{4}cy^4dx$.

195. Cum ſit $y^2 = r^2 - x^2$, & $y^4 = r^4 - 2r^2x^2 + x^4$, habebuntur quinque termini $\frac{1}{2}ca^2r^2dx - \frac{1}{2}ca^2x^2dx + \frac{1}{4}cr^4dx - \frac{1}{2}cr^2x^2dx + \frac{1}{4}cx^4dx$, quorum integrale $\frac{1}{2}ca^2r^2x - \frac{1}{6}ca^2x^3 + \frac{1}{4}cr^4x - \frac{1}{6}cr^2x^3 + \frac{1}{20}cx^5$. Habebitur valor pro altero hemiſphærio ponendo r pro x, & pro tota ſphæra duplicando, adeoque erit $ca^2r^3 - \frac{1}{3}ca^2r^3 + \frac{1}{2}cr^5 - \frac{1}{3}cr^5 + \frac{1}{10}cr^5$. Eſt $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, & $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{15 - 10 + 3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$. Quare ſumma evadit $\frac{2}{3}ca^2r^3 + \frac{4}{15}cr^5$. Superficies globi quadrupla circuli, cujus radius $= r$ eſt $2cr^2$, quæ ducta in $\frac{1}{3}r$ exhibet globum ipſum $\frac{2}{3}cr^3$; hic ductus in diſtantiam ſui centri ab axe $= a$, evadit $\frac{2}{3}car^3$. Diviſo valore præcedente per hunc, obtinetur $a + \frac{2r^2}{5a}$. Id adhibitum eſt num. 108.

196. Hoc pacto habetur demonſtratio eorum omnium, quæ in toto

toto Opuſculo ſunt adhibita. Inde facile erui poterunt quæcunque pertinent ad paranda inſtrumenta, inſtituendam obſervationem, & ineundum calculum numericum pro obtinenda, quam fieri poteſt accuratiſſime, menſura quæſita penduli oscillantis ad ſingula ſecunda temporis medii, quibus accedunt, quæ pertinent ad ejuſdem obſervationis uſum.

APPENDIX

INSTRUCTIO PRACTICA.

§. I.

De inſtrumentis præparandis.

1. PRÆPARETUR globus habens diametrum circiter duorum pollicum bene ſphæricus e metallo bene compacto: magnitudo eſt arbitraria.

2. Pro menſura *diametri globi paretur* inſtrumentum figuræ 1 (Tab. V) ſimile *micrometris aſtronomicis*, *cujus* cochlea ſit accuratiſſime *æquabilis*: *habeat curſorem figuræ* 2, & *plura* paria *cuneorum figuræ* 3, vel cochleas, ope quarum *poſſit nonnihil* elevari, *vel* deprimi. Cochlea futura uſui in fig. 7 poteſt adhiberi eadem etiam in fig. 1, rite ipſi applicata.

3. Præparetur filum, vel metallicum craſſius, vel metallicum tenue, vel ſericum.

4. In *primo* caſu habeantur in globo bina foramina, e diametro oppoſita, quibus id filum *metallicum* intrudi poſſit: tum machinula figuræ 4, & 11, ac acies oblonga figuræ 14 (Tab. VI).

5. *In* ſecundo caſu filum tenue habeat longitudinem paullo minorem *duplo* diſtantiæ adhibendæ puncti ſuſpenſionis a globo, quod *poſſit in binis ſuis capitibus* adnecti *filis* ſericis tenuibus maxime *flexilibus*.

6. In tertio filum ſericum ſit tenue, quam fieri poteſt maxime, dummodo poſſit ſuſtinere pondus globi.

7. Pro

7. Pro secundo, & tertio paretur circulus exiguus, qui habeat e centro prodiens filum sericum, quem exhibet figura 5 (Tab. V), vel filum sericum, quod ambiat globum methodo expressa in fig. 6.

8. Pro suspensione paretur machina, quam exhibet figura 7. Fulcrum exhibet figura 8: tubum metallicum quadratum figura 9, parallelepipedum ipsi intrudendum figura 10, in quo haberi debet foramen cochleatum ad excipiendam cochleam.

9. Potest id foramen fieri adhuc amplius, ut intra ipsum intrudi possit cochlea cava excipiens solidam, quæ illam elevet cum ipso parallelepipedo, & reliquis omnibus, quæ debent oscillare.

10. Habeatur cochlea exactissima, habens spiras tenuissimas, & manubrium pro conversione, ac indicem sibi affixum cum circulo diviso in partes plurimas.

11. Notetur apertura in latere tubi quadrati figuræ 9, & regula adnexa parallelepipedo figuræ 10, quæ inde prodire debet, cum suis divisionibus.

12. Parentur laminæ expressæ in fig. 7, quarum altera debet adnecti firmiter parallelepipedo, altera priori ita, ut inter eas comprimantur fila tenuia secundæ, vel tertiæ suspensionis.

13. Paretur instrumentum figuræ 12 (Tab. VI) pro determinatione magnitudinis arcuum oscillando descriptorum, horologium oscillatorium, charta cum linea nigra ponenda post ejus pendulum, & foramen, ad quod oculus applicetur ad determinandum concursum penduli oscillantis cum pendulo ejus horologii, ac magnitudo arcus oscillando descripti.

14. Paretur regula ferrea habens longitudinem trium pedum cum 3 pollicibus accuratissime determinatam, cujus bases sint accuratissime perpendiculares longitudini.

15. Paretur speculum metallicum planum imponendum mensulæ figuræ 8 (Tab. V).

16. Paretur machinula figuræ 15 (Tab. VI) pro restituendo motu.

17. Si observatio sit instituenda in vacuo; paretur machina pneumatica satis magna ad excipiendam machinam figuræ 7 (Tab. V), quæ habeat in latere foramen, per quod possit immitti filum metallicum crassius pro restituendo motu, si opus sit, sine immissione aeris.

18. Pa-

18. Paretur unum teleſcopium dioptricum cum filis ſe decuſſantibus in foco objectivi, & fulcrum, cui applicari debet, ut remaneat firmum, vel duo ejuſmodi teleſcopia.

19. Paretur horologium oſcillatorium ſaltem mediocre, præſtabit habere alterum, quod appellant numeratorem.

20. Paretur thermometrum, & barometrum.

21. Seligatur locus ad obſervationem idoneus, nimirum conclave, quod poſſit reduci ad temperiem proxime conſtantem: in quo habeatur paries ſatis ſolidus pro affigendo teleſcopio directo ad Meridiem, vel ad Boream: pavimentum ſit ſatis firmum: ipſe autem locus minus expoſitus tremori curruum, nec proximus magnis montibus, nec nimis elevatus ſupra ſuperficiem maris.

§. II.

De methodo obſervationis inſtituendæ.

22. CAPIANTUR accuratiſſime plures diametri globi per inſtrumentum figuræ 1, quæ ſi proveniant parum admodum diverſæ, capiatur medium arithmeticum.

23. Capiatur pondus globi adhibendi ante circuli agglutinationem, & poſt, ut habeatur pondus hujus additamenti.

24. Capiatur pondus fili interponendi inter axem converſionis, & globum, cujus ſi appendatur longitudo major, fiat, ut tota longitudo appenſa ad longitudinem interceptam inter punctum ſuſpenſionis, & globum, ita pondus totale ad pondus ejus partis. Pro filo metallico craſſiore in primo genere ſuſpenſionis determinetur pondus totius longitudinis ipſius a puncto T figuræ 4 uſque ad finem partis etiam immiſſæ in globum.

25. Capiatur pondus totius figuræ 4, & fiat, ut LG ad FG, ita id pondus ad pondus priſmatis rectangularis FD: dempto ipſo a totali, reſiduum erit pondus binorum priſmatum triangularium LK, GO.

26. Collocato firmiter ad parietem horologio oſcillatorio, diſponatur ante ipſum machina figuræ 7 ita, ut foramen, ad quod apponi debet oculus, filum penduli apparens unicum, virga penduli

duli horologii quiescentis, & linea nigra post virgam ipsius in charta applicata fundo ejus thecæ jaceant in eodem plano, ac speculum ipsius figuræ 7 sit accurate horizontale.

27. Collocetur telescopium directum in fixam quampiam ita, ut filum alterum sit accurate perpendiculare motui diurno.

28. Præparetur ope ignis conclave in temperie, quæ conservari possit proxime eadem.

29. Capiatur positio divisionum figuræ 9, & 10, ac indicis figuræ 7 tum, cum regula ferrea in parte ima innititur speculo, in parte summa tangit punctum suspensionis sensim demissum ope cochleæ, atque id fiat paullo ante transitum fixæ per filum telescopii.

30. Collocetur instrumentum figuræ 12 (Tab. VI) ita, ut filum penduli oculo applicato ad suum foramen respondeat puncto medio limbi infimi divisi.

31. Sublatâ regulâ deprimatur punctum suspensionis, donec globus contingat speculum, notatâ per micrometrum quantitate depressionis: ea dempta a longitudine regulæ relinquet distantiam puncti suspensionis ab imo globo.

32. Subtrahatur radius globi ab ea distantia, ut habeatur distantia puncti suspensionis a centro globi.

33. Elevetur suspensio ope cochleæ figuræ 7 (Tab. V) nonnihil, & retracto globo in latus circiter per duos pollices, relinquatur ipsi libertas, ut incipiat oscillare. Notetur hora indicata ab horologio pro momento, in quo *filum penduli*, & virga horologii simul transeunt per lineam *nigram chartæ positæ in fundo* horologii ipsius post virgam: id erit initium primæ periodi.

34. Notetur momentum transitus fixæ per filum telescopii fixi, determinando quantum fieri licet, non solum minuta, & secunda, sed etiam secundorum partes.

35. Notetur finis periodi primæ, & post intervallum tempori paullo brevius poterit rediri ad notandos fines secundæ, & tertiæ periodi: tum post octonas, vel denas periodos licebit redire ad notandum finem unius periodi, immo & post multas horas possunt omitti multo plures intermediæ.

36. No-

36. Notetur identidem in fig. 13 (Tab. VI) referente diviſionem figuræ 12 numerus linearum, ad quas protenditur ſemioſcillatio a puncto ejus medio.

37. Quando oſcillationes fuerint jam exiguæ, reſtituatur identidem motus pendulo per machinulam figuræ 15.

38. Poſt quamvis reſtitutionem notetur ſtatim amplitudo priorum ſemioſcillationum in fig. 13, & notetur finis ejus periodi, ſive concurſus primus virgæ horologii, & fili penduli poſt impulſionem.

39. Obſervatione ſic inſtituta uſque ad ſequentem diem, notetur appulſus novus fixæ ad filum horarium teleſcopii.

40. Optimum erit, ſi motu reſtituto identidem, & notato fine proxime ſequente periodi, continuetur obſervatio per plures dies.

§. III.

Pro calculo diſtantiæ centri oſcillationis a ſuſpenſione.

41. RADIUS ſphæræ r invenitur ope figuræ 1 (Tab. V) per micrometrum. Si ſit $ae = bf$, erit $r = \frac{1}{2}ae$. Si ſint inæquales; addetur $\frac{\frac{1}{2}ae \times \frac{1}{2}(bf - ae)}{ab}$. Sit

Diſtantia puncti ſuſpenſionis a centro globi . . . . a

a puncto ejus infimo . . . . b

Altitudo FB (fig. 4) c

Pondus ſequentium diviſum per pondus globi

I circuli agglutinati . . . . m

II fili . . . . m'

III Priſmatis rectangularis AG . . . . m''

IV Binarum acierum triangularium . . . . m'''

Erit diſtantia quæſita, quæ dicatur . . . p

Pro ſuſpenſione fig. 4 per acies $a + \frac{2r^2}{5a} + \frac{1}{2}m''c - mr + \frac{2}{3}m'''c$.

Pro ſuſpenſione fig. 5 . . . . $a + \frac{2r^2}{5a} - mr - \frac{1}{6}m'b$.

Pro ſuſpenſione fig. 6 . . . . $a + \frac{2r^2}{5a} - \frac{1}{6}m'b$.

§. IV.

Pro numero oscillationum ab uno appulsu fixæ ad sequentem.

42. Fiant sequentes denominationes numerorum, qui habentur ex observatione. Hora horologii notata pro initio primæ periodi diei præcedentis, ad quam pertinet primus transitus fixæ; subtrahatur ab hora ipsius notata pro initio periodi diei sequentis, ad quam pertinet secundus transitus, additis huic horis 24, & residuum reducatur ad secunda: habebitur numerus secundorum horologii ab initio primæ periodi diei præcedentis ad initium postremæ diei sequentis c

43. Capiantur numeri secundorum plurium periodorum adscriptâ singulis magnitudine arcus descripti, quod fiet subtrahendo horam initii ab hora finis. Ii, qui pertinent ad periodum primam, & ultimam, dicantur . . . . m, m'

44. Determinetur numerus periodorum ab initio primæ ad initium postremæ: ubi omissa fuerit observatio initii plurium intermediarum, earum numerus invenietur, subtrahendo horam initii proxime præcedentis observati, ab hora notata pro initio proxime sequentis, & residuo redacto ad secunda, dividendo ipsum per numerum secundorum periodi habentis arcus oscillationum proximos iis, quæ respondent mediæ magnitudini arcuum initii, & finis ejus intervalli: quotus vero proximus, utut non accuratus, exhibebit numerum periodorum ejus intervalli. Sic habebitur

Numerus periodorum ab initio primæ ad initium postremæ.. i

45. Subtrahatur hora horologii notata pro initio primæ, & postremæ periodi usque ad transitum fixæ redacta ad fractiones decimales secundi, in quo fit transitus, quæ duplex fractio dicatur a, a': habebitur

Numerus secundorum horologii ab initio utriusque periodi usque ad initium ejus secundi, in quo fit transitus fixæ.. n, n'

46. Reducatur ad fractiones decimales uterque valor $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m}$ & ponatur

Va-

Valor fractionis $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m'}$ in decimalibus . . . . b, b'.

47. Jam vero duplex erit casus, alter, in quo pendulum oscillet citius, quam horologium, alter, in quo oscillet lentius: primo respondebit signum $+$, secundo $-$ formulæ sequentis. Erit

Numerus oscillationum quæsitus $c \pm e + n' - n + a' - a \pm (b' - b)$.

48. Si motus est restitutus per impulsionem extraneam; pro singulis impulsibus auferendæ erunt ab eo numero singulæ fractiones, quæ sic invenientur. Subtrahatur hora horologii respondens impulsui ab hora, quæ respondet proxime sequenti congruentiæ fili penduli cum virga horologii in media oscillatione: residuum reducatur ad secunda: capiatur numerus secundorum periodi respondentis magnitudini oscillationum proxime æqualium iis, quæ habentur statim post impulsum, qui numerus dicatur m''. Pro casu penduli lentioris dicatur r illud residuum, & pro casu penduli celerioris excessus numeri m'' supra illud residuum. Reducatur ad secunda fractio $\frac{r}{m''}$, & dicatur f.

49. Fractio detrahenda a numero invento pro quovis novo impulsu erit sua $\frac{r}{m''}$ . . . . f

§. V.

Pro reductione ejus numeri ad numerum oscillationum minimarum.

50. INVENIATUR sequenti pacto numerus q, qui respondet excessui temporis oscillationis cujusvis supra tempus minimæ, & est is ipse excessus divisus per ipsum tempus minimæ. Id fiet sequenti pacto. In fig. 13 (Tab. VI) sit GH $= r$, distantia oculi a filo $=$ p, a plano II' $= p'$. Capiatur numerus $h = \frac{0{,}0524rp'}{p}$. Dicatur h' quævis distantia HH' determinata per lineam visualem: habebitur

Numerus respondens cuivis oscillationi $\frac{0{,}000171\,h'^2}{h^2}$ . . . . q

51. Satis erit numero constanti $log.0{,}000171 + 2log.p - 2log.0{,}0524 - 2log.r - 2log.p'$ semel invento addere pro quavis oscillatione $2log.h'$ ad habendum $log.q$.

52. Dicatur n numerus oscillationum ab una magnitudine arcus determinata ad sequentem. Habebuntur plures valores q, q', q'' &c., n, n', n'' &c.

53. Numerus addendus pro reductione erit $\frac{1}{2}(n(q + q') + n'(q' + q'') + n''(q'' + q''')$ &c.).

54. Observatione repetita cum eadem longitudine, & suspensione diametraliter opposita, assumatur medium arithmeticum inter duos numeros inde provenientes, si proveniant diversi.

§. VI.

Pro numero secundorum temporis medii, quod respondet eidem tempori.

55. NUMERUS secundorum temporis medii respondens intervallo inter binos appulsus fixæ ejusdem est 86163,4

§. VII.

Pro determinanda longitudine penduli simplicis oscillantis ad singula secunda temporis medii.

56. FIAT ut quadratum numeri 86163,4 secundorum temporis §. VI ad quadratum numeri oscillationum redactarum ad minimas §. V, ita longitudo penduli simplicis determinata §. III ad longitudinem quæsitam.

57. Si, observatione repetita pluribus vicibus cum diversis longitudinibus penduli, obveniant numeri parum diversi inter se, assumatur medium arithmeticum.

58. Si adhibito filo serico in suspensione secunda, & tertia, obveniant ex diversis longitudinibus adhibitis numeri longitudinis hìc quæsitæ ita diversi, ut discrimen non videatur tribuendum

esse

esse totum difficultati observandi, adhibeatur correctio longitudinibus in observatione adhibitis sequenti pacto. Sint

Longitudines penduli non correctæ . . . . a, a'

Numeri oscillationum redactarum ad minimas, qui ipsis respondent . . . . n, n'

Correctio subtrahenda erit $x = \frac{an^2 - a'n'^2}{n^2 - n'^2}$.

59. Ablato hoc valore à longitudine utravis inventa, fiat ut quadratum numeri secundorum temporis ad quadratum numeri o-oscillationum respondentis ei longitudini, ita ea ipsa longitudo ad longitudinem quæsitam, & utralibet longitudo adhibeatur, debet obvenire idem terminus.

60. Ea correctio respondere debet casui, quo filum non sit prorsus flexile, ut centrum arcuum descriptorum non sit in ipso egressu fili e laminis figuræ 7 (Tab. V), sed paullo infra.

61. Si inde veniat differentia longitudinis quæsitæ in hoc paragrapho deducta e diversis longitudinibus observatis, debet valor x evadere positivus, & esse perquam exiguus: secus, debet id discrimen provenire potius ab aliquo errore observationis.

§. VIII.

Pro correctione effectus aeris.

62. INVENIATUR ratio ponderis globi ad pondus aquæ, quæ dicatur n: nimirum assumatur pondus globi in aere, & in aqua, ac prius pondus dividatur per differentiam eorum ponderum: quotus erit valor n.

63. Longitudo inventa in paragrapho superiore sit l. Addatur ipsi valor $\frac{l}{800n}$, qui erit proxime $= \frac{11}{20n}$.

64. Hæc erit correctio proxima veræ respondens gravitati aeris. Determinatio ejus, quæ respondet resistentiæ, est multo magis & complicata, & incerta. Utraque evitatur, si observatio fiat in machina pneumatica. Pro calculo ipsius ex observatione instituta methodo eadem calculus est idem.

OPU-

OPUSCULE IV.

NOTICE ABRÉGÉE DE L' ASTRONOMIE POUR UN MARIN.

PRÉFACE.

J'AI fait cet Opuscule à l'occasion que Son Altesse Sérénissime Monseigneur le Duc de Chartres avant son départ de Paris pour commander une division de l' armée navale m' a fait l' honneur de m' employer pour lui rappeller les premières idées de la sphère, & lui donner une notice abrégée de l' Astronomie principalement pour ce qu' elle a de rapport avec la Marine. Le temps pressoit, & il falloit faire un court extrait en donnant seulement des idées générales des objets les plus intéressants. Je n' y ai pas employé des figures, parceque comme je devois m' entretenir avec lui sur tout ce que je lui donnois en abrégé par écrit, j' y ai supplée de vive voix, en déssinant des figures en sa présence selon que l' occasion s' en présentoit: je lui en ai fait voir des plus compliquées dans des livres imprimés, & pour ce qui appartient aux instruments il y en avoit la plus grande partie à la main; ainsi il étoit aisé de lui en faire voir la nature, & l' usage. Son Altesse Sérénissime m' a étonné par son zèle, son assiduité, son application, & son talent supérieur. Il avoit la bonté de s' entretenir avec moi quatre, & encore cinq fois par semaine plusieurs heures avec toute l' attention possible, de m'interroger en demandant des explications ultérieures sur ce que j' avois touché trop légérement, & qu' il avoit relu en mon absence, comme il faisoit toujours. Il a bien voulu manier les instruments lui-même en ma présence, & il a mesuré des angles avec le rapporteur, avec le quart de cercle mobile, & parti-

culiérement avec un octant de réflexion, qui est d' un usage si précieux pour la Marine.

J' espère que ce petit Opuscule pourra servir à beaucoup de personnes, qui ne cherchent pas de devenir des Professeurs d' Astronomie, mais d' avoir des idées des objets, qui lui appartiennent, comme sur-tout aux jeunes Seigneurs, qui en se dédiant à la Marine souhaiteront d' avoir en abrégé les premières idées, de se faire expliquer de vive voix tous ces articles par une personne instruite, de voir de ses yeux les instruments, & leur usage dans un Observatoire, s'ils ne peuvent pas les avoir chez eux. Au défaut des instruments réels, ils pourront bien y suppléer en regardant leur dessein très-bien présenté aux yeux avec beaucoup de détail sur les parties qui les composent dans le grand ouvrage classique de l' Astronomie de M. de La-Lande. L' inspection de ces figures, & l' entretien sur leur construction, & leur usage avec un Astronome servira non seulement d' instruction utile; mais aussi d' un vrai amusement. Pour ceux qui ont déjà étudié même à fond les éléments de l' Astronomie servira bien cet abrégé pour se rappeller les objets principaux sans le travail ennuyeux de confronter par soi-même le texte avec les lettres des figures, & de suivre les démonstrations, & les calculs.

A' la fin de l' Opuscule on trouvera une table sommaire, qui contient en peu de mots l' argument de chaque numéro: on pouvoit l'y mettre à la marge, vis-à-vis de chacun, mais la table mise ainsi à la fin servira de même pour se remettre en abrégé tout ce qu' on a vu plus détaillé dans les textes précédents.

§. I.

Des astres & de leurs mouvements apparents.

1. Les Astres sont de trois espèces, étoiles fixes, planètes & comètes. Presque tous les astres qu' on voit dans le ciel sont des étoiles fixes: on les appelle ainsi, parcequ' elles ont toujours, au moins sensiblement la même position mutuelle entr' elles. Leur distance est immense. Nous n' avons aucune base

assez

assez grande pour pouvoir la déterminer. Leur nombre est aussi immense. Avec les lunettes on en découvre une quantité prodigieuse par-tout, particuliérement dans cette grande rivière (pour ainsi dire) blanchâtre de lumière, qu' on appelle *voie lactée*. On est sûr, qu' elles ont leur lumière propre. On ne sait rien de leur grandeur réelle. Leur grandeur apparente seroit un seul point lumineux sans une espèce d' aberration de la lumière dilatée un peu dans le fond de l' œil, qui par plusieurs raisons physiques n' y réunit pas dans un seul point les rayons partis d' un même point de l' objet & entrés par la prunelle. On conçoit les fixes comme placées sur une surface sphérique immense, concentrique à la terre. Leur grandeur n' occupe dans cette surface ni une minute, ni une seconde; c' est pour nous comme un point. Toutes leurs grandeurs apparentes proviennent de la grandeur de l' espace occupé dans le fond de l' œil par cette aberration des rayons. Dans cet espace la vivacité de la lumière est beaucoup plus forte au milieu que vers les bords, & par-là les fixes qui ont plus de lumière, nous paroissent plus grandes.

2. Par cette espèce de grandeur trompeuse on distingue les fixes en plusieurs classes, de 1.re grandeur, 2. 3. &c, jusqu' à la 6.me, & on appelle télescopiques les plus petites. Cette espèce de grandeur est la raison pour laquelle les télescopes qui grossissent tous les autres objets, même les planètes & comètes, font paroître les fixes plus petites, quoique plus brillantes, en diminuant cette aberration des rayons. Cette grandeur n' est pas ce que les Astronomes appellent *diamètre apparent*. On désigne par ce nom le nombre des minutes ou secondes, qui est occupé sur la surface de cette sphère immense par le diamètre réel d' un astre projeté sur elle par des lignes droites tirées de l' œil; & pour les fixes le diamètre apparent étant moindre qu' une seconde, n' est censé qu' un point. De cette petitesse du diamètre apparent on tire l' explication de ces tremblements, qu' on appelle scintillation, qui ne paroît pas, ou qui paroît moins dans les planètes, à moins que l' atmosphère ne soit remplie de quantité de vapeurs grossières.

3. Pour

3. Pour donner des noms, & distinguer cette multitude de fixes, on a imaginé dans cette surface immense, que l'on entend par le mot ciel, une quantité de différentes figures, qu'on appelle constellations. Les anciennes que nous avons aujourd'hui sont tirées de la Mythologie grecque. On les a plus que doublées depuis le renouvellement de l'Astronomie. Dans les belles cartes de Bayer, il y en a soixante, mais on en compte jusqu'à cent qu'on trouve réunies dans les planisphères de Robert de Vaugondy. M. de La-Lande dans son nouveau globe céleste, qui est très-exact pour la position des fixes, & qui va paroître (*), a ajouté la cent & unième, qu'il a appellée *Messier* pour éterniser le nom de l'illustre Académicien, qui a découvert tant de nouvelles comètes. Parmi ces constellations, il faut distinguer les douze signes du zodiaque, qui est une grande bande large de presque 20 degrés, qui traverse tout le ciel. Leurs noms sont compris dans ces deux vers latins:

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

On appelle les trois avant-derniers *Sagittarius*, *Capricornus*, *Aquarius*, qu'on a un peu changés pour les faire entrer dans ces vers. Les noms françois sont le Bélier, le Taureau, les Jumeaux, le Cancer, ou l'Écrevisse, le Lion, la Vierge, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, les Poissons. On trouve par-tout, même dans les almanachs, ces noms & les chiffres, qui les désignent. On peut remarquer nommément les deux ourses, qui ont donné le nom aux pôles arctique, qui est entr'elles, & antarctique, qui lui est opposé, parceque l'ours en grec est appellé *arctos*.

4. Le nom de pôle est relatif aux mouvements dont nous allons parler. Mais auparavant nous dirons un mot des planètes,

(*) Il a paru peu après. A' cette occasion j'ai fait un distique pour marquer mon estime pour ce grand Observateur, qu'on a imprimé quelque part.

Sydera non messes Messerius *iste tuetur:*
Certe erat ille suo dignus in esse polo.

& des comètes. Le nom des planètes est tiré aussi du grec, à cause du changement de leurs places apparentes dans le ciel, d'où les latins les ont appellées *errones*. On les distingue en deux classes, qu'on appelle en latin *Primarii*, & *Secundarii* : on appelle ceux-ci en françois aussi secondaires, sans avoir le mot correspondant de *Primaires*. Parmi les premières on mettoit aussi autrefois la lune. A' présent elle est satellite de la terre placée, comme elle doit l'être, parmi les planètes secondaires. Ceux du premier ordre sont au nombre de sept, dont voici les noms & les chiffres, qui les désignent

☉ ☿ ♀ ♁ ♂ ♃ ♄

Soleil, Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne (*). Les secondaires sont au nombre de 10 : la lune, quatre satellites de Jupiter, cinq de Saturne, qui a de plus un anneau plat, bien large, & très-mince, qui détaché de lui de tous côtés à une distance considérable l'environne. Le soleil & la lune ont un diamètre apparent d'environ un demi-degré, les autres toujours plus petits qu'une minute. C'est le soleil, qui donne la lumière à toutes les autres planètes, comme on le voit dans Jupiter & Saturne & dans leurs satellites par leurs éclipses & par l'ombre, qu'ils jetent sur ceux-là, & dans les autres par leurs phases, comme aussi dans Vénus, Mercure & la lune par la noirceur des leurs disques, quand on les voit sur le disque du soleil.

5. Le nombre des comètes doit être très-grand, Nous n'avons des observations astronomiques d'aucune comète parmi les monuments de nos anciens Astronomes. On en connoît *63* (**) des plus récentes observées de manière à pouvoir reconnoître la partie de leur orbite réelle dans laquelle elles nous deviennent visibles.

(*) On s'est aperçu en Angleterre au commencement de l'année *1781*, qu'il y en avoit une huitième, qui par sa petitesse apparente avoit été confondue parmi les petites étoiles fixes : c'est M. Herchel, qui a éternisé son nom par cette découverte, parcequ'on l'appelle communément *la planète d'Herchel*.

(**) Il y en a eu plusieurs autres observées depuis ce temps-là.

bles. *Une d' elle est déjà revenue plusieurs fois après le renouvellement de l'Astronomie à des intervalles de 56 à 57 ans, une autre deux fois dans l' intervalle de 129 ans* (*). Elles ont un noyau blanchâtre environné d' une nébulosité, à la manière d'une chevelure, qui presque toujours est allongée du côté opposé au soleil comme une queue. Les comètes ont aussi, comme les planètes, la lumière du soleil & un changement de position, relativement aux autres astres : c' est par-là qu' on les distingue des fixes *nébuleuses*.

6. Pour venir à présent aux mouvements apparents, il y a un mouvement diurne commun à tous *les* astres. C' est une révolution uniforme, qui se fait autour d' un axe, qui passe *par le* centre de la terre & se termine dans *la* grande *surface céleste* aux deux pôles arctique & antarctique. Ils sont également éloignés par-tout d' un grand cercle qu' on appelle équateur, qui divise la surface même en deux hémisphères, boréal & austral, ainsi nommés *des mots latins Boreas*, *Auster*, c' est-à-dire nord & sud. Pour cela *on les appelle pôles de l' équateur*. Chaque cercle ayant dans la sphère son axe & *ses deux pôles* qui sont communs à tous les *cercles parallèles entr' eux* : mais l' axe & les deux pôles de l' équateur sont appellés *par* préférence axe & pôles du monde, & encore simplement axe & pôles. Le mouvement diurne ne change pas par lui-même la position mutuelle des astres ; & il dérive d' un mouvement réel de la terre autour de son axe, qui passe par les deux pôles de la surface terrestre, & que nous concevons prolongé jusqu' à cette surface céleste, que nous imaginons, & dans laquelle nous voyons ce mouvement apparent, comme il arrive à une personne placée sur un vaisseau virant de bord. Elle croit voir un mouvement circulaire des côtés & des autres vaisseaux qui l' environnent.

 7. Ce

(*) On la croyoit alors la même : mais M. Mechain peu avant d'être admis à l'Académie des Sciences a fait voir le contraire dans un excellent Mémoire, qui a remporté le prix de la même Académie.

7. Ce mouvement diurne donne seulement occasion à un petit changement de position mutuelle & déplacement produit par deux causes, que les Astronomes appellent réfraction & parallaxe diurne. Nous rapportons les astres par nos yeux & nos instruments à ce point du ciel, qui répond à la dernière direction du rayon, qui nous le fait voir, si l' on fait abstraction d' une petite inflexion causée par la combinaison du mouvement progressif de la lumière & de la terre, qu' on appelle aberration de la lumière, ou simplement aberration, de laquelle nous dirons un mot ci-après: or le rayon de lumière, quand il entre obliquement dans l' atmosphère terrestre, éprouve dans tout son chemin une inflexion continuelle, qui le fait changer de direction de manière à déplacer le lieu apparent de son astre. La différence de sa première & dernière direction est ce qu'on appelle réfraction. La parallaxe est un effet produit par la distance de l' œil au centre de la terre. On rapporte dans l' Astronomie les astres à la sphère céleste par une ligne droite menée du centre de la terre par leur centre, & c' est ce qu' on appelle lieu géocentrique d' un astre. La ligne droite tirée de l' œil par ce centre les rapporte à un autre point, quand elle n' est pas la continuation du rayon de la terre. Cette distance de ces deux points est appellée parallaxe diurne. La réfraction & la parallaxe sont les plus grandes à l' horizon, & diminuent d' autant plus, que l' astre s' en éloigne, quoique suivant des loix différentes. Comme par le mouvement diurne chaque astre, n' étant pas dans le pôle même, change sa distance à l' horizon, on voit bien qu' il doit changer son lieu apparent dans la surface céleste, la parallaxe l' approche de l' horizon, la réfraction l' élève. Cette seconde est la même pour tous les astres à pareille hauteur apparente sur l' horizon, près du quel elle est un peu plus grande qu' un demi-degré. La première dépend aussi de la distance réelle de l' astre au centre de la terre: dans la lune près de l' horizon quelquefois elle va au de-là d' un degré: dans les planètes & comètes elle n' a que quelques secondes: dans les étoiles fixes, & même dans Saturne elle est tout-à-fait insensible: dans Saturne même, qui est la plus é-

loignée des planètes (*), elle ne dépasse jamais une seconde. L' aberration de la lumière fait faire aux étoiles fixes un mouvement dans une ellipse plus ou moins aplatie, qui n' a que 40 secondes dans le grand axe, & qui s' achève tous les ans.

8. Les étoiles fixes ont un autre mouvement apparent autour d' un autre axe, qui est très-lent, puisqu' il ne s' achève qu' à-peu-près dans 25 mille ans. Cet axe est l' axe du grand cercle qui passe au milieu du zodiaque & s' appelle écliptique. Le mouvement autour de lui commun à tous les astres se fait de l' occident en orient, tandis que le diurne se fait au contraire d' orient en occident : on l' appelle précession des équinoxes, ou simplement précession pour une raison qu' on verra ci-après : ce mouvement est commun aussi à tous les astres.

9. Il y a encore un autre très-petit mouvement apparent, qu' on appelle nutation de l' axe, par lequel les pôles actuels de l' équateur décrivent un petit cercle, ou plutôt une ellipse autour de deux points de la surface étoilée, qu' on appelle pôles moyens : les deux axes de cette ellipse ne sont qu' une de 18 secondes, l' autre de 13 à 14. Ce mouvement a un période de 18 ans. Ainsi les étoiles fixes ont quatre mouvements apparents qu' on a coutume de considérer plus particuliérement : le mouvement diurne, la précession, l' aberration, & la nutation. Le premier grand & prompt intéresse les Marins plus que les autres, qui pourtant sont intéressants pour des opérations plus délicates.

10. On peut ajouter quelques autres petits mouvements apparents communs provenants de quelque changement de position de l' équateur & de l' écliptique, comme aussi quelques mouvements particuliers à plusieurs étoiles fixes; puisque selon l' expression de l' Abbé de la Caille, *plus nous observons les étoiles fixes, moins nous les trouvons fixes*. Ces derniers sont des mouvements réels, qui nous paroissent très-petits à cause de leur distance énorme.

11. Les

(*) C' est-à-dire des anciennes : la nouvelle planète a une distance moyenne double de la moyenne de Saturne.

11. Les planètes, outre le mouvement commun aux étoiles fixes, ont des grands mouvements apparents particuliers, qui nous paroissent très-irréguliers dans les autres, & beaucoup plus réguliers dans le soleil. Le soleil a un mouvement annuel sur l'écliptique d'occident en orient, par lequel il parcourt à-peu-près un degré chaque jour, mais il va un peu plus vîte sur la fin de Décembre, quand son diamètre apparent devient plus grand, & plus lentement sur la fin de Juin, quand il est plus petit. Les autres planètes vont d'un côté & de l'autre de l'écliptique, mais sans sortir jamais du zodiaque. La lune s'avance toujours vers l'orient dans une orbite inclinée à-peu-près de 5 degrés à l'écliptique, & on appelle nœuds les points de ses intersections avec elle, qui sont diamétralement opposés. Elle achève son mouvement par rapport aux étoiles fixes dans un peu plus de 27 jours, ce qu'on appelle temps périodique, changeant continuellement dans cette période son diamètre apparent, & la vîtesse journalière de son mouvement progressif. Pour atteindre au soleil qui s'avance dans ce temps-là, il lui faut 29 jours & demi, ce qu'on appelle temps synodique. Pour cela il y a dans l'année douze lunaisons & 11 jours à-peu-près. Dans chaque lunaison elle change ses phases étant pleine quand elle est en opposition avec le soleil. On appelle syzigies les conjonctions & oppositions de ces deux astres, c'est-à-dire les nouvelles lunes & les pleines lunes.

12. Sa position par rapport au soleil est l'origine de ses phases. Le soleil éclaire toujours un peu plus que la moitié de sa surface. Mais nous ne voyons la moitié éclairée toute entière que dans les oppositions. Très-près des conjonctions nous en voyons une partie mince, qui forme le croissant & s'accroît à proportion de la distance apparente au soleil.

13. L'orbite de la lune change continuellement de place, les nœuds rétrogradant chaque année vers l'occident avec une période d'à-peu-près 18 ans. Mais dans tout cela il y a une irrégularité immense, qui rend très-compliqués les calculs de sa position précise pour un instant donné. Si dans les conjonctions elle n'est pas assez éloignée des nœuds, elle nous cache le soleil

dans la conjonction en l'éclipsant, au moins pour quelques parties de la terre, & dans l'opposition elle devient éclipsée par l'ombre de la terre, d'où l'écliptique a tiré son nom.

14. Les autres planètes ordinairement avancent vers l'orient, mais elles ont des rétrogradations vers l'occident, avec des stations intermédiaires, qui pourtant ne sont jamais de vraies stations. Vénus & Mercure, qu'on appelle planètes inférieures, parcequ'elles sont moins éloignées du soleil que la terre, ne s'éloignent qu'à une certaine distance apparente du soleil beaucoup plus petite dans Mercure que dans Vénus : ainsi on ne les voit jamais à la vue simple que le matin se levant quelque temps avant le soleil & le soir se couchant après, & Mercure en particulier est très-rarement visible, étant plongé presque toujours dans les rayons du soleil. Les trois autres planètes, qu'on appelle supérieures par la raison opposée, se trouvent aussi en opposition avec le soleil : leurs rétrogradations ont lieu vers les oppositions mêmes, & celles des planètes inférieures vers celles des deux conjonctions, dans laquelle elles passent d'occident en orient par rapport au soleil. Dans ces conjonctions-là si elles arrivent assez près de l'écliptique, on les voit traverser le disque du soleil sous la forme d'une tache noire, ce qui arrive bien rarement à Mercure, & très-rarement à Vénus. Toutes ces planètes traversent l'écliptique dans des points, qui par rapport à la terre d'où nous les voyons ont beaucoup de variations dans leurs positions. Les irrégularités de tous ces mouvements ont leur origine principalement de la combinaison de leur mouvement réel autour du soleil, avec celui de la terre même.

15. Le soleil a souvent des taches, qui par leur mouvement régulier nous font voir une révolution de son globe autour de son axe, qui se fait environ dans 26 jours. On l'aperçoit aussi dans Jupiter, dans Mars, & dans la lune. On la croit dans les autres, parcequ'il est bien douteux qu'on l'ait vue dans Vénus.

16. Les comètes ont un mouvement apparent, qui très-souvent paroît rectiligne : d'autrefois il a une courbure très-considérable : quelquefois il est très-lent au commencement, n'étant que de

quel-

quelques minutes par jour, & accéleré après, jusqu'au de-là de 40 ou 50 deg. Quelqu'autre fois tout au contraire la comète a un grand mouvement quand on la découvre, qui se rallentit prodigieusement après. Il y a des comètes qui sortent du voisinage du soleil bien lumineuses, & s'éloignant de lui disparoissent peu-à-peu. Il y en a d'autres, qu'on aperçoit loin du soleil très-foibles, & qui en s'approchant de lui deviennent plus éclairées, jusqu'à ce qu'elles se plongent dans ses rayons. On les voit dans toutes les parties du ciel, sans se borner à aucun zodiaque, comme l'avoit soupçonné quelqu'un des Astronomes les plus renommés. La direction de leurs mouvements va dans tous les sens: la queue est toujours tournée du côté opposé au soleil avec une petite inclinaison en arrière, & avec de la courbure, quand les comètes sont près du soleil. Elles deviennent rondes, sur-tout dans l'opposition de la comète au soleil, dans lequel cas la queue est cachée par la tête. L'origine des grandes irrégularités de leurs mouvements apparents est la combinaison du mouvement de la terre avec leurs mouvements autour du soleil dans une ellipse très-allongée.

17. Pour les planètes & comètes il y a un autre effet de la propagation successive de la lumière, c'est que nous ne les voyons pas où elles sont dans ce moment, mais abstraction faite des autres aberrations, nous les voyons là, où elles étoient quand la lumière en est partie. Cette erreur ne se trouve pas dans les fixes qui se trouvent là, où elles étoient: pour la lune & les objets terrestres elle corrige presqu'exactement l'autre effet de l'aberration de la lumière.

§. II.

De la sphère armillaire, & du globe céleste.

18. ON a imaginé la sphère armillaire pour se former une idée plus claire des mouvements apparents & des phénomènes, qui en sont la suite. On y conçoit deux surfaces sphériques, l'une immobile, & l'autre mobile, qui ont la terre dans leur cen

tr.

tre commun, & sont appellées l' une le firmament & l' autre le premier mobile. On y fait la terre immensement plus grande, qu' à proportion de sa distance à ces surfaces pour la rendre sensible. On y ajoute l'axe, qui passe par son centre & par ses pôles, & la soutient : on la fait sphérique, quoiqu'elle soit un peu aplatie aux pôles, parceque cet aplatissement est presque insensible. On le croit généralement d' $\frac{1}{170}$ ou $\frac{1}{200}$ du total ; mais je crois avoir *bien prouvé* par la comparaison de toutes les mesures les *plus récentes*, qu'il est moindre que d' $\frac{1}{340}$, dont il s' en suit qu'on le peut négliger par-*tout*, à l'exception de quelques déterminations délicates de la parallaxe de *la* lune.

19. On y représente dix cercles presque tous par des anneaux plats, qui peuvent s'exprimer en latin par le mot *armilla*: six de ces anneaux sont des grands cercles de la sphère, deux dans la surface immobile, & les autres dans la mobile. Ces deux premiers sont l'horizon & le méridien. Les quatre autres grands cercles sont l'équateur, l'*écliptique tracée au milieu d'une bande* qui représente le zodiaque, & *les deux colures*. Les quatre plus petits sont les deux *tropiques & les deux* cercles polaires.

20. L'horizon divise la surface de la sphère en deux hémisphères, *l'*un visible pour nous & l' autre invisible. On appelle celui-là horizon rationnel, & on appelle horizon physique un autre cercle, qui lui est parallèle, dont le plan passe par l'œil, mais la distance de ces deux cercles, qui est assez sensible, pour la lune, est très-petite par rapport à la distance des autres planètes à la terre, & tout-à-fait insensible dans la surface immense de la sphère. On peut considérer une autre espèce d'horizon déterminé par le rayon visuel, qui partant de l' œil élevé sur la surface de la mer s'incline en bas autant plus que l' œil est plus *élevé :* on l' appelle horizon visuel. Cette inclinaison doit être bien remarquée par un Marin dans l' usage de quelque instrument pour *déterminer* les hauteurs des astres au-dessus de l' horizon.

21. Les pôles de l' horizon sont deux points, l' un placé à plomb sur notre tête, qu' on appelle *zénith*, l'autre opposé qu' on appelle *nadir*. On le divise en degrés, & on y désigne les vents. Les quatre principaux appartiennent aux quatre points cardinaux de l' horizon, le nord du côté opposé au midi, le sud pour nous du côté du midi, l'est à l'orient, l' ouest à l' occident : on compose les quatre intermédiaires nord-est, sud-est &c: on y en ajoute huit autres nord-nord-est, est-nord-est &c. On les réduit dans les boussoles communes à 32 par des nouvelles subdivisions, & quelquefois aussi à 64, mais réellement il y a autant de vents que de points d' horizon, c' est-à-dire un nombre infini.

22. Le second cercle de la surface immobile est nommé méridien, parceque nous avons toujours midi, quand le soleil y arrive. Il est perpendiculaire à l' horizon, passant par ces deux points le boréal & l' austral, par le zénith & le nadir, & par les deux pôles, où il reçoit l' axe & le soutient. Ce cercle divise la sphère en deux hémisphères l' un oriental, & l' autre occidental : il a pour pôles les deux points cardinaux, qui sont à l' orient & à l' occident.

23. L'équateur dans la sphère armillaire appartient à la surface mobile, mais on peut en concevoir un autre dans l'immobile, sous lequel celui-là fait sa révolution diurne. Il a pour pôles les deux pôles du monde. Il divise la surface de la sphère en deux hémisphères, boréal & austral : on le divise en degrés.

24. L'écliptique est dessinée au milieu du zodiaque, qui a un peu moins de 18 degrés de largeur. Elle est inclinée à l'équateur actuellement de 23 degrés 28 minutes, mais cette inclinaison a une petite variation, qui dans plusieurs siècles devient bien considérable. Une des deux intersections est nommée section vernale, & l'autre automnale. On la divise aussi par degrés, & dans cette division, comme dans celle de l' équateur, on commence la numération de la section vernale, dans laquelle le soleil se trouve au printemps, d' où elle a pris son nom. Cette numération va dans tous les deux vers l' orient, mais dans l' équateur elle est continuée toujours jusqu' à 360, & dans l' écliptique on la

reprend de 30 en 30 degrés, pour marquer les 12 signes du zodiaque, en y ajoutant les chiffres de ces signes, ou les figures des signes, même peintes. Le bélier commence à cette première section, dans laquelle l'écliptique passe de l'hémisphère austral au boréal. Elle s'éloigne après de l'équateur dans les trois premiers signes jusqu'à 23 deg. & 28', s'en approche jusqu'à la fin du sixième, s'en éloigne depuis vers la partie australe également jusqu'à la fin du neuvième, & revient à la fin à l'équateur.

25. Quand le soleil est dans les deux sections, on a les nuits égales aux jours, l'équateur étant coupé également par l'horizon, ce qui a donné le nom aux équinoxes, & à l'équateur même: à la fin du troisième & neuvième signe, où le soleil revient vers l'équateur, sa distance à ce cercle est très-peu changée en plusieurs jours, d'où les solstices ont tiré leur nom. Comme dans la combinaison du mouvement annuel du soleil par l'écliptique avec le mouvement diurne de toute la surface mobile, tous les jours le soleil passe par différents points du méridien montant vers notre zénith dans les trois derniers & les trois premiers signes, & descendant dans les six autres: ainsi nous appellons ceux-là signes ascendants, & ceux-ci descendants. On voit que dans l'écliptique il y a quatre points les plus remarquables, qui sont ceux, qui appartiennent aux deux équinoxes de printemps & d'automne, & aux deux solstices d'été & d'hiver. On voit aussi que le mouvement diurne du soleil n'est pas exactement circulaire, mais spiral, ce qui rend nécessaire une petite correction à l'heure du midi déterminée par la méthode des hauteurs correspondantes du soleil, de laquelle nous parlerons après.

26. L'intersection de l'équateur avec l'écliptique ne répond pas toujours au même point de la surface étoilée, mais elle revient tous les ans un peu en arrière, ce qui fait arriver l'équinoxe de l'année suivante un peu avant que le soleil ait achevé un cercle entier par rapport aux étoiles fixes, & que toutes les fixes se trouvent tous les ans avancées vers l'orient, par rapport au point équinoxial. C'est l'origine du nom & la cause réelle de ce mouvement apparent très-lent, qu'on appelle pré-

ceſsion des équinoxes, qui avance tous les astres vers l' orient par rapport au point équinoxial, où l' on commence la numération, achevant un degré à-peu-près en 70 ans.

27. Par ce mouvement les signes du zodiaque dans deux mille ans, qui se sont écoulés depuis les anciens Astronomes jusqu' à nous, ont tellement changé leur place, que le bélier a occupé celle du taureau, le taureau celle des gémeaux &c. Pour cela il a fallu distinguer deux zodiaques, un rationnel, l'autre visible : le premier commence au point équinoxial, & les douze parties de l' écliptique lui appartenantes ont conservé l' ancien nom, le second retient la division des espaces contenants les figures des signes anciens avec leurs fixes & leurs noms : mais on dit que telle étoile du bélier est aujourd' hui dans un tel degré du taureau, appliquant la première dénomination au zodiaque visible, & la seconde au rationnel. L' écliptique a ses pôles, qui sont éloignés du pôle de l' équateur par ces 23°.28', qui sont le plus grand éloignement de l' équateur. Ils sont placés dans les intersections d' un des deux colures avec les cercles polaires. Le mouvement de la précession de tous les astres se fait autour de ces pôles dans des cercles parallèles à l' écliptique, d' où il suit que le mouvement diurne des différentes fixes est bien différent dans différents siècles. Par ce mouvement les fixes, qui se trouvent très-près des deux pôles de l' équateur, décrivent des cercles très-petits, qui sont plus grands à proportion pour les plus voisins de l' équateur. Il y a une fixe dans la queue de la petite ourse, qui à présent est éloignée de notre pôle boréal de moins de 2 degrès, ce qui lui a fait donner le nom d' étoile polaire : nous la voyons toujours vers le nord, sans qu' on s' aperçoive beaucoup à la vue simple, d' aucun changement dans sa position, tandis que dans la même nuit à différentes heures, & à la même heure en differentes parties de l' année on voit bien différente la position des autres, & tout l' aspect du ciel par rapport à notre horizon & aux objets terrestres qui nous environnent. Pour cela elle a servi toujours aux navigateurs de guide : à présent elle remplit encore mieux cet objet, parcequ' elle s' est approchée du pôle, &

elle s'en approchera encore plus pendant plusieurs siècles, mais après douze mille ans elle viendra au méridien pour Paris vers le sud.

28. Les *colures* sont deux grands cercles, qui se croisent à angles droits dans les deux pôles, où ils reçoivent l' axe qui les traverse. Leur principal usage est de lier ensemble l' équateur, les deux tropiques, & les deux polaires. Un d' eux est appellé colure des équinoxes, & l' autre des solstices, parceque celui-là passe par les points équinoxiaux de l' écliptique, celui-ci par les solsticiaux. Ce second passe aussi par les pôles de l' écliptique, comme on l' a dit ci-dessus.

29. Les tropiques sont deux cercles parallèles à l' équateur, qui *passent par les deux points solsticiaux*, & par-là sont éloignés *de l' équateur de* $23^{\circ}.28'$: on les appelle ainsi du mot grec *trepo* qui signifie tourner, parceque le soleil arrivant aux tropiques commence à retourner vers l' équateur: un qui est le boréal, est nommé tropique du cancer, parcequ' il passe par le commencement du signe de cancer: l'autre qui est l'austral, est dit du capricorne pour une raison pareille.

30. Les polaires *sont deux petits cercles*, qui passent par les *deux pôles de l' écliptique étant aussi parallèles à l' équateur*, & qui ne sont *éloignés de ces pôles* que de $23^{\circ}.28'$.

31. Il faut concevoir plusieurs autres cercles, qu' on n' *exprime pas dans la* sphère armillaire pour la *simplifier*: tels sont dans *la sphère* immobile les horaires, les verticaux, ou cercles azimutaux, les almicantarats: & dans la sphère mobile les cercles des déclinaisons & des latitudes avec les parallèles à l' équateur & à l' écliptique.

32. Les horaires passent par les pôles de l' équateur, & sont au nombre de douze pour les heures entières coupant l' équateur de 15 en 15 degrés. On a le midi & le minuit, quand le soleil arrive au méridien au-dessus ou au-dessous de l' horizon; une heure, deux, trois &c. quand il arrive au 1.er, 2, 3 de ces cercles. Le nombre d' horaires intermédiaires est infini chacun pour chaque instant. Si à chaque instant on conçoit dans la surface immobile un demi-cercle, qui passe par les deux pôles & par le

so-

soleil ; *l'angle* , que ce cercle fait avec le méridien, donne l'heure à raison de quatre minutes de temps par degré quatre secondes par minute, &c. parceque les 360 degrés répondant à 24 heures, il y en a 15 par heure, chaque degré pour quatre minutes : de-là on tire la conversion du temps en parties de l'équateur, & viceversa. Pour la première on donne à chaque heure, minute, seconde 15 degrés, minutes, secondes : pour la seconde on donne à chaque degré, minute, seconde, 4 minutes, 4 secondes, $\frac{1}{15}$ de seconde. Toujours *l'angle au pôle donne l'heure*, & comme *ayant déterminé pour un jour donné la hauteur du soleil sur l'horizon, on trouve par la Trigonométrie cet angle, on en déduit l'heure*, ce qui se pratique aussi sur mer.

33. *Pour déterminer ces angles* on attache souvent sur le méridien un petit cercle autour du pôle avec la division des heures, & on attache à l'axe prolongé à travers le méridien un index, qui tourne avec la sphère mobile. Mais il faut prendre garde d'empêcher la terre de tourner avec cet axe, & de faire que ce cercle & cet index n'empêchent *la situation du méridien avec ses pôles amenés à l'horizon*. Ces cercles servent à marquer le temps qui répond à une partie quelconque de *la révolution* de la sphère. Mais il faut bien remarquer, que *c'est le temps solaire vrai, lequel n'est pas le même pour tous les jours de l'année*, & qu'il est toujours plus long que le temps des fixes, c'est-à-dire du premier mobile. La révolution diurne, qui provient de la révolution de la terre autour de son axe, se fait toujours dans le même temps, au moins nous n'avons aucune raison d'y soupçonner quelque changement, quoique nous n'ayons aussi aucune démonstration du contraire. Mais quand aujourd'hui le point du premier mobile, dans lequel le soleil étoit hier, revient au méridien, le soleil n'y est pas encore, ayant avancé vers l'orient à-peu-près d'un degré ; ainsi il n'y arrive qu'à-peu-près 4 minutes plus tard, & la révolution diurne des fixes est à-peu-près 4 minutes plus courte que la solaire.

34. Ce prolongement de la révolution diurne solaire sur la révolution diurne des fixes n'est pas le même pour tous les jours

de l'année par trois raisons : 1°. parceque le soleil n'avance pas tous les jours dans l' écliptique d' un nombre égal de minutes & secondes : 2°. parceque l'écliptique n'est pas également contraire à la direction du mouvement diurne dans toutes ses parties l' étant tout-à-fait dans les solstices, tandis que dans les autres points sa direction a une inclinaison, qui dans les équinoxes décline le plus de l' équateur : 3°. parceque le même degré de l'écliptique, qui dans les équinoxes est égal à un degré du mouvement diurne, qui alors est celui de l' équateur, en est plus grand dans les autres parallèles, & cet excès est le plus grand dans les solstices sous les tropiques. De-là derive la distinction du temps solaire en moyen & vrai. Le temps vrai d' un jour est celui, qui s' écoule réellement d' un midi au suivant, & celui-là est inégal dans les différents jours de l' année. Une mesure égale de temps est beaucoup plus propre aux calculs astronomiques. C' est pourquoi on a imaginé un soleil fictif, qui feroit ses révolutions diurnes avec une vîtesse toujours constante de manière à compenser toutes les inégalités du temps vrai solaire, & on a appellé temps moyen celui qui lui répond. Ainsi le jour moyen est tantôt plus grand, tantôt plus petit que le jour vrai. Il est de 3'.56'' plus long qu' une révolution diurne des fixes. On conçoit les deux soleils partis une fois dans un même instant d' un méridien, & on appelle équation la différence qu' il y a à tout autre instant entre le temps vrai de l' un & le temps moyen de l' autre. Comme on est libre de choisir ce premier instant du départ commun, ainsi on peut faire des tables bien différentes de l' équation du temps pour tous les jours de l' année, & s' en servir pour réduire le temps vrai en moyen, & viceversa. On peut faire cette table de manière que cette équation pour le même de ces deux changements soit toujours additive, ou toujours soustractive, ou tantôt additive & tantôt soustractive, ce qui diminue du double son maximum. On la fait ordinairement de cette dernière manière, parceque on la tire immédiatement d' un calcul plus aisé. Cette équation, quand elle est additive pour un de ces deux changements, est soustractive pour l' autre. Dans la Connoissance des

temps on marque *tous les jours le temps moyen au midi vrai*, ce qui donne *les éléments* pour faire ce double changement. On s' en sert non seulement pour le calcul astronomique, mais encore pour mieux régler les montres & les pendules, qui aujourd' hui l' emportent sur le soleil pour l' égalité très-utile à la bonne mesure du temps.

35. Cette différence entre le temps vrai & moyen est très-nécessaire pour la Marine. Elle devient nécessaire sur-tout ensemble avec la différence du temps solaire moyen au temps, qui répond à la révolution diurne des fixes, quand on cherche l' heure par la hauteur d' une fixe. *Dans toute* l' Astronomie on se sert aussi de la distinction d' un mouvement moyen égal, & d' un vrai inégal, avec l' équation, qui en est la différence, & sert à corriger les inégalités de celui-ci. On commence par calculer le lieu moyen par le mouvement moyen, qui répond au temps moyen écoulé après une époque, pour laquelle on a déterminé une fois le lieu moyen, & on y fait la correction tirée d' une ou de plusieurs tables des différentes équations, qui répondent à toutes les sources des inégalités, qui se trouvent dans le mouvement d' un astre. C' est le grand nombre de ces équations, qui rend le calcul de la lune très-long & très-embarassant (*).

36.

(*) Pour les planètes du premier ordre le calcul est beaucoup plus simple: il n' y avoit autrefois, qu' une seule équation: on en a ajouté après plusieurs petites provenantes de l' attraction mutuelle, qui sont intéressantes principalement pour Jupiter, parceque les éclipses de ses satellites dépendent aussi des irrégularités de son mouvement. Mais après qu' on a trouvé leur lieu par rapport au soleil, qu' on appelle héliocentrique, en employant leur mouvement moyen, & les équations, il faut en déduire le lieu par rapport à la terre, qu' on appelle géocentrique. On employe pour cela un triangle plan, qui a les angles dans le soleil, la planète, & la terre: on y a par le mouvement de la terre, & de la planète autour du soleil les deux côtés, qui sont les distances de ces deux dernières au premier, & l' angle y compris: on en tire la distance de la planète à la terre, & l' angle dans celle-ci, qui détermine son lieu géocentrique. Il y a des tables particulières pour les mouvements des satellites de Jupiter avec des équations pour en corriger les inégalités, & calculer les temps des éclipses; mais tout cela n' est pas l' ouvrage pour un Marin: il trouve dans la Connoissance des temps tout ce qui lui faut trouvé par l' Astronome chargé de cette besogne.

36. Les cercles verticaux passent par le zénith & nadir, & déterminent l' azimut d' un astre. C' est le nom qu' on donne au point de l' horizon, auquel répond un astre. On le détermineroit à l'œil par un fil d' à plomb qu' on feroit passer par l' astre même & descendre jusqu' à dépasser l' horizon : le plan qui passe par l' œil & ce fil marque dans le ciel la trace d' un cercle vertical, & dans l' horizon l' azimut de l' astre. Dans ces cercles on mesure l' élévation sur l' horizon, ou sa hauteur, & la distance au zénith qui en est le complément, c' est-à-dire le reste à 90°, comme aussi on a dans le même cercle la dépression au-dessous de l' horizon : l' amplitude est la distance du point du lever au point de l' est, ou du coucher au point de l' ouest. On voit bien qu' au moment du lever & coucher vrai d' un astre son élévation est zero, & son azimut détermine son amplitude ortive, dans le demi-cercle oriental de l' horizon, & un autre une pareille amplitude sur l' occidental. La hauteur est diminuée par la parallaxe, & augmentée par la réfraction, qui se font dans le vertical pour la terre supposée sphérique. Elles troublent aussi l' amplitude ortive, quoiqu' elles n' affectent pas l' azimut qu' a l' astre à un moment donné, parcequ' elles changent le moment de son lever apparent, & de son coucher, accélerant le premier, & retardant le second de plusieurs minutes. Cette remarque est essentielle pour un Marin qui se sert des azimuts & amplitudes pour déterminer la déclinaison de l' aimant nécessaire pour la correction de la boussole. Les Marins appellent variation du compas cette déclinaison.

37. Parmi les cercles verticaux le plus remarquable est le méridien, dans lequel on mesure la hauteur d' un pôle, & la dépression de l' autre : mais comme il a déjà son nom, on appelle premier vertical celui, qui lui est perpendiculaire passant par les deux points cardinaux de l' orient & de l' occident de l' horizon. Les hauteurs prises dans les verticaux intéressent les Marins pour déterminer l' heure, & quand on les prend sur le méridien, pour déterminer la latitude du pays, dont nous parlerons ci-après. Cette hauteur sur le méridien d' un astre est la plus grande qu'

il puisse avoir, quand il arrive entre le pôle & le point horizontal du sud, ou entre le pôle & le zénith, d'où l'on a tiré le nom de culmination de l'astre, *culmen* signifiant en latin sommet. Mais dans le reste du méridien au-dessous du pôle, la hauteur est un minimum & non un maximum. La hauteur change très-peu, quand un astre est près du méridien, & le plus grand changement se fait à côté du premier vertical. Pour cela on ne peut pas se servir des hauteurs pour l'heure dans la première position, & la seconde est la plus propre, si la hauteur sur ce cercle n'est pas trop petite, parcequ'elle y seroit fautive à cause de l'incertitude & l'inconstance des réfractions dans le voisinage de l'horizon.

38. Une bonne table des réfractions est essentielle pour tout Astronome, sur-tout pour un Marin. On en a, & on est suffisamment d'accord pour les réfractions à plusieurs degrés de distance au zénith. Mais dans un plus grand éloignement il y a encore bien des doutes tant pour la réfraction moyenne, que pour les variations qui répondent aux changements du baromètre & du thermomètre. Il y auroit un instrument excellent pour déterminer tout cela, sans y employer aucune hypothèse, comme on fait d'ordinaire. Tycho en avoit un, mais beaucoup moins parfait que celui qu'on pourroit faire aujourd'hui, & qui sans la perfection actuelle des pendules n'avoit qu'une très-petite partie de l'utilité, que nous pouvons en tirer (*). C'est un grand cercle azimutal à la manière d'un horizon de la sphère armillaire avec un axe vertical, qui porteroit un quart de cercle vertical mobile autour de lui: cet instrument donneroit par une seule observation l'azimut, qui est exempt de l'effet de la réfraction, & la hauteur apparente affectée pour les étoiles fixes de la réfraction seule, d'où l'on tireroit la position du méridien. En y ajoutant une bonne pendule pour la mesure exacte du temps on trou-

(*) On a parlé assez de cet instrument, & de ses grands avantages nommément pour déterminer les réfractions dans les Opuscules X du Tome II, & VII du Tome IV de cette Collection.

trouveroit par son moyen, la hauteur du pôle, les distances vraies des étoiles fixes au pôle, la hauteur vraie à un instant donné, tout cela indépendamment d'aucune hypothèse, si l'on en ôte l' uniformité du mouvement diurne dans 24 heures, qui est très-certaine. On trouveroit par un calcul trigonométrique la hauteur vraie d'une fixe quelconque pour un moment donné : la différence entre la hauteur calculée, & observée donneroit la réfraction, & comme on pourroit faire un très-grand nombre d'observations de cette espèce dans chaque nuit, on auroit toute la sureté qu' on peut souhaiter pour cet objet. Un instrument comme celui-là seroit d'une utilité immense pour toutes les parties de l' Astronomie.

39. Les almucantarats sont des cercles *parallèles* à l'horizon, qui pour cela ont pour pôles le zénith & le nadir. Tous les astres qui sont dans le même almucantarat, ont la même hauteur. Parmi ces cercles il y en a un plus remarquable, qui appartient à la détermination des crépuscules. On le place à dix huit degrés au-dessous de l'horizon, parceque on croit que l'aurore commence, & le crépuscule du soir finit, quand le soleil arrive à cette distance de l'horizon. Mais cela varie beaucoup selon la différente constitution de l'atmosphère. La durée du crépuscule est différente dans les différents temps de l' année encore en retenant les dix huit degrés : on le calcule, pour cette hypothèse, & on détermine aussi son minimum pour chaque élévation du pôle.

40. Dans la sphère mobile on a les cercles de latitude & déclinaison, & les *parallèles* à l'écliptique & à l'équateur, qui sont bien essentiels, ayant relation à deux différentes manières de déterminer la position des astres ; la première par la longitude & latitude, la seconde par l'ascension droite & la déclinaison, dont il est très-nécessaire de bien comprendre & retenir la nature. Les cercles de latitude passent par les pôles de l' écliptique, & par-là lui sont perpendiculaires. Les cercles de déclinaison passent par les pôles de l' équateur lui étant perpendiculaires. La longitude est l'arc de l'écliptique compté depuis le point équinoxial du bélier vers l' orient jusqu'au demi-cercle de latitude,

qui passe par l' astre, c'est-à-dire jusqu'à ce point de l'écliptique qui lui répond vis-à-vis. La latitude est l' arc de ce demi-cercle compris entre l'astre & l'écliptique même, c' est-à-dire sa distance perpendiculaire à l'écliptique. L' ascension droite est l' arc de l' équateur compté de même depuis le premier point du bélier vers l' orient jusqu'au demi-cercle de déclinaison qui passe par l'astre, & la déclinaison sa distance perpendiculaire à l' équateur comptée sur le même arc. Quand on a la longitude & la latitude avec l' inclinaison de l' écliptique, on trouve par la Trigonométrie sphérique l' ascension droite & la déclinaison, & viceversa. Ces deux dernières sont les plus essentielles pour un Marin, sur-tout la seconde, qui sert pour trouver la latitude géographique d' un pays, dont nous parlerons ci-après, par la hauteur d' un astre au méridien. L' ascension droite sert pour trouver tous les jours de l' année le moment, dans lequel l'astre arrive au méridien. On voit que la longitude & la latitude vont jusqu'à 360 degrés, tandis que la latitude & la déclinaison ne peuvent aller qu'à 90 vers le pôle boréal ou austral, d'où l'on distingue deux espèces de latitude & de déclinaison, l'une boréale, l' autre australe.

41. Tous les cercles de déclinaison passent successivement dans 24 heures sous chacun des cercles horaires, & par-là amènent au méridien un point quelconque de l' écliptique: on y voit la déclinaison du soleil pour le moment, dans lequel il y arrive. Le mouvement de la précession des équinoxes, qui est aussi grand, mais très-lent, se fait dans des cercles parallèles à l' écliptique. C' est pourquoi les fixes n' ont qu' un très-petit changement de latitude provenant des autres petits mouvements apparents, si ce n' est quelque mouvement réel, qu' on a découvert dans quelques fixes de la première grandeur bien lent à la vérité, mais qui est devenu bien considérable après plusieurs siècles. Les parallèles à l' équateur sont des cercles, qui répondent au mouvement diurne & au-dessus de chacun d' eux, on peut en concevoir un sur la surface immobile, qui dans les 24 heures est tracé sur cette surface par chaque point de la mobile. Dans ces cercles parallèles à l'

équa-

équateur, on compte les arcs diurnes & nocturnes qui sont leurs deux parties au-dessus, ou au-dessous de l'horizon, quand ils en sont coupés.

42. Les tropiques & les polaires sont des cercles de cette dernière espèce. Ils déterminent les zones, une torride, de laquelle le soleil ne sort jamais, deux temperées d'un côté & de l'autre enfermées entre les tropiques & les polaires, & deux glaciales, qui sont plutôt une espèce de calottes terminées par les cercles polaires. Elles sont d'un plus grand usage dans la surface de la terre pour la Géographie, ayant tiré leur nom des effets de l'inégalité de la chaleur qu'elles y produisent.

43. Il y a deux autres cercles de la même espèce qui renferment les deux espaces, dans un desquels sont compris les astres, qui sont toujours élevés sur l'horizon, & dans l'autre ceux qui ne se levent jamais. Ceux-ci appartiennent à la position oblique de la sphère : mais avant de parler des différentes positions de la sphère, nous dirons deux mots des cercles, qu'on conçoit sur la surface de la terre.

44. On y conçoit, comme nous l'avons dit, l'équateur avec ses pôles & ses parallèles, parmi lesquels les deux tropiques & les deux polaires, avec la dénomination de la zone torride enfermée entre les tropiques, les deux temperées entre les tropiques & les polaires, & les deux glaciales terminées par les polaires. On y conçoit aussi des demi-cercles tirés d'un pôle à l'autre qui coupent l'équateur à angles droits, & on les appelle les méridiens, parceque tous les pays, qui sont dans un même méridien terrestre, ont le midi dans le même moment. On en choisit un à volonté, qu'on appelle premier méridien, du quel on compte la longitude des lieux vers l'orient sur l'équateur jusqu'au méridien terrestre, qui passe par le lieu même, & on appelle latitude l'arc de ce méridien compris entre le lieu & l'équateur, c'est-à-dire la distance perpendiculaire du même lieu à l'équateur : ainsi la longitude & la latitude du même lieu sur l'équateur terrestre ne répond pas à la longitude & à la latitude céleste,

leste, mais à l'ascension droite & à la déclinaison. Le premier méridien dans les cartes françoises est placé à 20 degrés à l'occident de Paris : il est très-près de celui qui passe par l'Île de Fer, qui devoit être le premier selon l'ordre de Louis XIII. On voit que la longitude comptée de cette manière va jusqu'à 360 degrés, & est toujours orientale, tandis que la latitude ne va que jusqu'à 90 étant septentrionale ou méridionale, c'est-à-dire boréale, ou australe. On la compte encore par heures donnant 15 degrés par heure, & on voit que pour les pays qui ont la longitude plus petite ou plus grande de 15, 30, 45 degrés, le midi arrive une, deux, trois heures plus tard, ou plutôt, de manière que quand on sait la différence des heures, qu'on compte au même instant dans deux pays, on en sait la différence en longitude. Les Anglois comptent leurs longitudes depuis le méridien de Londres, & les distinguent en orientales & occidentales. Les Astronomes François aussi les comptent du méridien de l'Observatoire de Paris. On appelle antipodes les pays diamétralement opposés. Ce sont ceux qui ont la différence de longitude de 180 degrés, & la latitude égale, mais opposée, l'une boréale, l'autre australe.

45. Pour revenir aux *positions de la sphère, il y en a trois, droite, parallèle, oblique*. Dans la première, qui *a lieu pour les habitans de* l'équateur terrestre, les pôles sont à l'horizon, qui coupe par le milieu à angles droits l'équateur, & tous ses parallèles, tous les arcs diurnes & nocturnes étant de 180 degrés : ainsi on a toujours la moitié de la surface céleste au-dessus, la moitié au-dessous de l'horizon : tous les astres se levent & se couchent tous les jours, & cela perpendiculairement à l'horizon : on y a une espèce d'équinoxe perpetuelle, sauf un petit prolongement du jour causé par la réfraction, & l'abaissement de l'horizon visuel. On a deux fois par an le soleil à midi sur son zénith dans les deux équinoxes, & ce sera le centre même du soleil, si l'équinoxe arrive au moment du midi.

46. La sphère parallèle répond aux deux *pôles* terrestres. Un des deux pôles célestes y est au zénith, l'autre au nadir, l'équateur

teur sur l' *horizon* : tous les parallèles du mouvement diurne sont parallèles au même horizon. On y voit toujours la même moitié de la surface céleste, l' autre étant toujours cachée au-dessus de l' horizon. Les étoiles fixes ne se levent & ne se couchent jamais. Les planètes se levent pour notre pôle boréal, quand elles passent par l' équateur, changeant leur déclinaison méridionale en septentrionale, & ne se couchent qu' en repassant par l' équateur. Ainsi le soleil se leve a l' équinoxe du printemps faisant six mois de jour & six mois de nuit, qui est temperée par deux *crépuscules* d' à-peu-près 50 jours, & par la lune, qui dans chaque *révolution périodique* reste environ 14 jours sur l' horizon. Ce *spectacle* n' est pour personne, *les deux pôles* n' étant point habitables.

47. La sphère inclinée a lieu pour tous les autres points de la surface terrestre, étant plus ou moins inclinée, selon que le lieu est plus ou moins éloigné de l' équateur. Un des deux pôles est au-dessus de l' horizon entre lui & le zénith, l' autre au-dessous entre l' horizon & le nadir. Le notre visible est le boréal qui est au nord de notre *zénith*, tandis que l' *équateur* reste au sud. La distance du *zénith* à l' *équateur* est la même en degrés, que la latitude terrestre du lieu, & toujours égale à la hauteur du *pôle*, *l' une & l' autre* étant le complément de la distance du *zénith* au pôle, comme la hauteur de l' équateur est le complément de la distance du zénith à l' équateur, & par-là égale à la distance du zénith au pôle, & le complément de la hauteur du pôle & de la latitude. On voit par-là que si on sait la déclinaison d' un astre, & qu' on observe sa hauteur sur l' horizon dans le méridien avec l' instrument, par son complément, qui est la distance au zénith, on trouvera aisément la distance du zénith à l' équateur, qui donne la latitude du lieu.

48. Dans la sphère oblique, quelle que soit l' obliquité, l' équateur est toujours coupé par l' horizon en parties égales, mais les autres *parallèles* d' autant plus inégalement, qu' ils s' éloignent plus de l' équateur, jusqu' à ce qu' on arrive à celui qui touche l' horizon. Celui-ci renferme tous les astres, qui paroissent toujours,

jours, ou qui ne paroissent jamais. Les autres sont coupés par l' *horizon* de manière, qu'il y a une inégalité entre les arcs diurnes & nocturnes. Ainsi dans les équinoxes il y a une égalité entre le jour & la nuit pour toutes les parties de la terre.

49. Plus on est éloigné des équinoxes, plus est grande l' inégalité du jour & de la nuit. Le jour le plus long pour nous, qui habitons l' hémisphère boréal de la terre, est dans le solstice du cancer, & le plus court dans l' opposé du capricorne. Sur les cercles polaires la nuit entre deux *jours consécutifs s' évanouit*, & plus on s' en éloigne *vers les pôles*, *plus est grand le nombre des jours*, ou des *mois de la journée continuelle dans le premier solstice*, & *c' est la même chose pour la nuit dans l' autre*, comme aussi pour ceux de l' hémisphère austral pour le solstice opposé. La durée du plus grand jour détermine les climats. Les parallèles, dans lesquels on a le jour le plus long de douze heures & demi, terminent le premier climat, celui de 13 heures termine le second, ainsi des autres de demi-heure en demi-heure jusqu' au cercle polaire, qui termine le vingt-quatrième. On en compte six autres *jusqu' aux pôles par la différence d'* un mois pour *la journée la plus longue*, *Ainsi il* y en a 30 par hémisphère.

50. *Les climats contribuent beaucoup à la constitution du pays* par rapport *à la* chaleur & au froid. Généralement *les pays les* plus éloignés de l' équateur ont plus de froid, parceque les rayons du soleil moins élevés sur l' *horizon* font plus de chemin dans l' atmosphère, qui en intercepte plus, & la même étendue de la surface de la terre par sa position plus oblique en reçoit moins. Ces deux raisons avec *la* plus longue durée du soleil sur l' horizon font aussi la différence entre la chaleur de l' hiver, & de l' été, & heureusement pour notre hémisphère, le soleil est plus éloigné de la terre dans le temps de notre été & plus près pendant l' hyver, tandis qu' on a tout le contraire *dans l' hémisphère* austral. Mais le local dérange beaucoup cette règle générale. Les montagnes, le nitre mêlé dans l' air, les vents changent beaucoup tout cela. Les montagnes de la Cordelière du Pé-

rou au milieu de la zone torride sont couvertes d' une neige perpetuelle. Quito au milieu d' elle jouit toujours du printemps. Dans l' Amérique septentrionale sous le même climat on a des froids incomparablement plus forts qu' ici.

51. Sur le globe céleste on met tous les cercles de la surface mobile, l' équateur, l' écliptique, les tropiques, les polaires, les deux colures, auxquels on ajoute d' autres cercles de déclinaison & des cercles de latitude, avec des parallèles à l' écliptique, & à l' équateur, ou seulement à l' un des deux. Il y a un méridien, qui entre dans un horizon bien solide, & qui soutient le globe par ses pôles. On employe un pareil méridien, & équateur pour le globe terrestre, sur lequel on décrit l' équateur, les tropiques, les polaires avec des parallèles à l' équateur, & des méridiens, qui passent par les pôles à des intervalles de dix ou de cinq degrés. Dans le globe céleste on met les figures des constellations avec les fixes à leur place, mais pour le temps éloigné de l' époque, pour laquelle le globe est fait, il faut concevoir les lieux de toutes les fixes reculés, si ce temps la précède, & avancés s' il la suit, à raison d' un degré pour 72 ans parallélement à l' écliptique; comme aussi la position de l' équateur vis-à-vis de l' écliptique après un long intervalle de temps devient fautive d' une petite quantité. C' est pourquoi, comme aussi à cause de la petitesse de la machine, on n' obtient qu' à-peu-près la solution des problêmes, pour lesquels on s' en sert, & l' exactitude de ces solutions exige absolument la Trigonométrie sphérique & les éléments corrigés.

52. Il y a une quantité de problêmes qu' on est accoutumé de résoudre en gros par l' usage de la sphère armillaire & du globe. Si on amène sur le méridien un point de l' écliptique quelconque dans l' un des deux, ou un astre quelconque dans le second, on y voit sa déclinaison, qui est sa distance à l' équateur, & son ascension droite marquée sur l' équateur par le méridien même. C' est de même qu' on trouve sur le globe terrestre la latitude & longitude de chaque lieu. En élevant le pôle visible à la hauteur qui répond au lieu dans lequel on se trouve, & fai-

sant tourner le globe, on voit quelles sont les fixes, qui ne se couchent jamais pour ce pays-là, & celles qui ne se lèvent jamais. Pour le soleil & pour une fixe quelconque qui se lève & se couche, on voit l' amplitude ortive & l' occidentale en amenant son lieu à l' horizon. Si l' on remarque le point de l' équateur qui se trouve alors sous le méridien, & le point qui s' y trouve, quand on y amène le lieu même de l' astre; la distance de ces deux lieux sur l' équateur donne la mesure de l' arc demi-diurne avec la mesure du demi-nocturne, qui est son reste à 180 degrés. Si l' on réduit l' arc demi-diurne en temps à raison de 15 degrés par heures, on trouve le lever & le coucher du soleil prenant pour le coucher le nombre même, qu' on a trouvé, & pour le lever son reste à 12 heures. Si l' on remarque le point de l' équateur qui arrive au méridien dans un jour donné avec le soleil, & qu' on tourne le globe vers l' occident jusqu' à ce que le lieu d' un astre arrive au demi-cercle oriental de l' horizon ou au méridien, ou au demi-cercle occidental, en remarquant aussi le point de l' équateur qui s' y trouve alors; on aura le nombre de degrés qui ont passé sous le méridien dans ce temps-là, & en faisant la conversion en temps, on aura l' heure astronomique du lever de cet astre, de son arrivée au méridien, de son coucher: mais à cause de la différence du temps solaire au temps des fixes, il faut retrancher une minute pour toutes les 6 heures. Cette heure peut aller au de-là de 12, parceque les Astronomes vont d' un midi à l' autre toutes les 24 heures. Ainsi quand le nombre passe les douze heures, le surplus marque l' heure civile du matin du jour après. Pour avoir le lieu du soleil chaque jour, on marque sur le zodiaque de la sphère armillaire à côté de l' écliptique ou sur l' horizon de la sphère même & sur celui du globe céleste les mois de l' année divisés en jours, faisant que le premier point du bélier réponde au 20 Mars, & le commencement des autres au jour, dans lequel le soleil y entre dans les années moyennes, puisque l' année bissextile, qui revient tous les quatre ans, porte quelque différence dans le temps de l' entrée dans les signes. Ce qui appartient aux heures se trouve plus aisément

par

par le petit cercle diviſé en heures, qu' on place ſouvent au pôle en mettant ſon index ſur les 12 heures, quand le lieu du ſoleil eſt ſous le méridien.

53. Cette irrégularité de l' année biſſextile provient de ce que le ſoleil ne revient pas au premier point du bélier après un nombre de jours exact, mais après 365 jours & preſque 6 heures. C' eſt pourquoi, pour retenir l' équinoxe toujours à-peu-près au même jour du même mois on ajoute un jour à toutes les quatrièmes années. Cette meſure étoit trop longue d' environ onze minutes par an, ce qui donnoit une anticipation des équinoxes d' environ trois jours tous les quatre ſiècles. Gregoire XIII dans ſa réforme du calendrier réduiſit toutes les années ſéculaires, qui auroient été biſſextiles, aux années communes, à l' exception de toutes les quatrièmes qu' il laiſſa biſſextiles, & pour faire revenir l' équinoxe du printemps, où elle étoit du temps du Concile de Nicée, il retrancha dix jours au mois d' Octobre de l' année 1582 allant du 4 au 15. Cela fait la différence du vieux ſtyle au nouveau, qui reſte aujourd' hui ſeulement en Ruſſie. Elle a acquis le onzième jour au commencement de ce ſiècle.

§. III.

Des mouvements vrais des aſtres & de leurs cauſes phyſiques.

54. Le détail de ces deux articles eſt immenſe: il occupe une grande partie du premier, & les deux gros Volumes ſuivants de l' Aſtronomie de M. de La-Lande. Cela n' eſt point néceſſaire à un Marin, qui peut profiter des recherches & des calculs faits par les grands Géomètres & Aſtronomes: pourtant il ſera bien qu' il en ait quelque idée. Nous la donnerons ici très-legère.

55. On a imaginé d' abord, que les étoiles fixes étoient comme enclouées dans une voûte ſphérique qui tournoit autour de la terre immobile ſur ſon axe d' orient en occident, entraînant avec elle des couches ſphériques épaiſſes portantes chacune ſa planète: que ces couches avoient un mouvement particulier vers l' orient ſur des axes un peu inclinés les uns aux autres dans des

temps périodiques d'autant plus longs, que leur distance à la terre étoit plus grande. Pour sauver le changement des diamètres apparents du soleil & de la lune, on y a imaginé des cercles excentriques, c'est-à-dire, qui avoient le centre à quelque distance de la terre, & on a appellé excentricité cette distance, distance moyenne le rayon de ce cercle, ligne des apsides le diamètre qui passoit par la terre, périgée l'extrémité de ce diamètre, qui restoit du côté de la terre, apogée l'autre opposée: attribuant à cette position excentrique toutes les inégalités, qui par-là se terminoient à la fin d'une révolution. On a pris l'apogée pour origine & terme des irrégularités qui sont exprimées par le mot grec anomalie, & on a appellé anomalie vraie la distance angulaire comptée depuis la direction de l'apogée vers l'orient jusqu'à la direction, dans laquelle se trouve l'astre à un instant donné, & anomalie moyenne la distance qu'il y auroit, si le mouvement angulaire autour de la terre étoit égal.

56. On s'est bien aperçu, que le seul excentrique ne suffisoit pas pour expliquer les stations & rétrogradations des autres planètes. On y a ajouté des épicycles, c'est-à-dire des cercles, qui avoient leurs centres sur la circonférence des excentriques, & c'étoit l'ancien systême, qu'on appelle de Ptolomée. Mais comme ayant trouvé à l'aide de la Géometrie & Trigonométrie le moyen de déterminer par un certain nombre d'observations la grandeur & la position de tous ces cercles pour chaque planète, & en tirer des tables des mouvements, pour en trouver le lieu apparent géocentrique pour un autre instant donné quelconque, on s'est aperçu qu'il y avoit beaucoup de différence entre le résultat des théories & les observations; on a multiplié prodigieusement les cercles & les principes des inégalités, chargeant la machine du monde de tant de ressorts compliqués, qu'Alphonse Roi de Castille tachant de rétablir l'Astronomie en Europe après tant de siècles barbares, a dit, que *s'il s'étoit trouvé à la création du monde, il auroit donné des conseils beaucoup meilleurs, pour arranger toute la machine avec beaucoup plus d'ordre & de simplicité*. Ce n'étoit pas défaut de respect pour l'Au-

Auteur de la Nature, qu'il parloit ainsi, mais pour se moquer des idées capricieuses des anciens Astronomes, qu'il estimoit des rêveries.

57. Il y avoit pourtant des Philosophes anciens, qui s'étoient aperçus du vrai systême, attribuant le mouvement diurne à une révolution de la terre sur son axe, l'annuel du soleil à l'annuel de la terre autour de lui dans une orbite excentrique avec l'orbite de la lune excentrique à la terre, en donnant à la lune le mouvement *périodique* de 27 jours dans cette orbite, composé avec *l'annuel de l'orbite même* : ils ont donné un mouvement semblable aux autres planètes autour du soleil. C'est le systême que Copernic a rétabli après tant de siècles. Il a mis le soleil & les étoiles fixes immobiles; six planètes autour du soleil, Mercure le plus près de lui, après Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne le plus éloigné & le plus lent. Tycho un peu après a cherché à rétablir l'immobilité de la terre. Il a conservé la petite orbite de la lune autour d'elle & la grande du soleil. Il a conservé aussi les orbites des autres cinq planètes autour du soleil, mais il les a transportées avec lui parallélement.

58. Si l'on fait abstraction de la propagation successive de la lumière, le systême de Tycho, quoique beaucoup plus compliqué, *rend raison de tous les phénomènes tout-à-fait aussi bien que celui de Copernic*, & toutes les raisons que Galilée a tirées des phénomènes astronomiques, n'ont pas la moindre force pour prouver le systême de Copernic contre celui de Tycho. Ce sont les arguments qu'on peut tirer de la propagation successive de la lumière, & des causes physiques des mouvements, qu'on a aujourd'hui, & qu'on trouve tous les jours plus conformes aux phénomènes qui prouvent la nécessité du mouvement de la terre diurne & annuel, si l'on n'adopte une hypothèse, que j'ai donnée il y a trente ans, qui donne la possibilité évidente du contraire, mais qui est infiniment improbable.

59. Descartes a taché de donner la cause physique du mouvement des planètes par ses tourbillons, qui sont tombés non seulement, parceque c'étoit une hypothèse tout-à-fait arbitraire, &

qu'

qu'elle donnoit une explication très-vague des phénomènes pris en gros, mais encore parcequ'on a découvert après le vrai mouvement des comètes, qui traversent sans la moindre résistance de ces tourbillons imaginaires les espaces, qu'on étoit obligé de leur assigner. La gravité générale de Newton leur a succédé, & elle est aujourd'hui la clef du ciel, qui nous amène au détail de toutes les inégalités tout-à-fait conforme aux phénomènes incomparablement mieux, que la combinaison même des observations les plus exactes. Mais ce sont les découvertes heureuses de Kepler sur le système planétaire, qui ont ouvert le chemin à Newton même pour découvrir la vérité.

60. On s'étoit déjà aperçu, que même dans l'orbite de la terre autour du soleil, on ne pouvoit pas admettre un mouvement uniforme sur la circonférence d'un cercle excentrique, mais qu'outre l'inégalité optique provenante de l'inégalité des distances, il falloit admettre une inégalité réelle dans ce mouvement, & par-là on avoit diminué l'excentricité de la moitié en imaginant l'égalité du mouvement angulaire, c'est-à-dire le mouvement moyen autour non pas du centre même, mais d'un autre point placé autant au de-là de ce centre, que le soleil est en deça. On avoit pratiqué la même chose pour les autres planètes. Kepler ayant un très-grand nombre de bonnes observations de Tycho s'est bien aperçu, que les calculs fondés sur cette hypothèse ne s'accordoient pas avec les observations, la différence allant beaucoup au de-là de ce qu'on pouvoit soupçonner d'erreur dans les observations. Par des raisonnements très-ingénieux, & des combinaisons très-fines, faites sur le mouvement de Mars, qui ayant l'excentricité très-grande, & étant visible presque toujours, étoit plus à propos que toutes les autres planètes pour cette recherche, il trouva que son orbite étoit comprimée vers le milieu, & comme l'ellipse une des trois sections coniques, qui sont les courbes les plus simples après le cercle, est justement comprimée par le milieu, & a deux points très-remarquables d'un côté & de l'autre du centre, qu'on appelle foyers, il a pris l'ellipse pour les orbites de toutes les planètes, plaçant le soleil

dans

dans le foyer commun de toutes ces ellipses, & c'est la première des trois loix très-célèbres qu'on appelle les loix de Kepler.

61. La seconde appartient à la distribution de la vîtesse réelle, & apparente dans les différentes parties de l'orbite. On l'exprime en disant que *les aires décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles au temps*, & comme par-là elles sont égales *en temps égaux*, on l'appelle aussi *l'égalité des aires*. Le rayon vecteur est la ligne droite, qui va du soleil à la planète. Il l'a appellé ainsi, parceque par une physique très-mauvaise, mais bien heureuse il croyoit, que les rayons du soleil tournant autour de son axe entraînoient avec lui la planète, tandis que par une espèce d'affection magnétique elle étoit obligée tantôt de s'approcher, tantôt de s'éloigner du soleil. Que l'on conçoive deux arcs dans deux parties différentes de la même ellipse avec les lignes droites menées de leurs extrémités au soleil, qui renfermeront deux secteurs elliptiques, c'est-à-dire deux triangles mixtilignes formés par deux lignes droites, & un arc de la courbe : les parties de la surface elliptique contenues dans ces triangles sont ces aires, qui par la seconde loi de Kepler doivent être entr'elles dans le même rapport que le temps employé à parcourir ces arcs, c'est-à-dire égales dans des temps égaux.

62. La troisième loi contient le rapport des temps employés par les différentes planètes à parcourir leurs orbites, & les distances moyennes, c'est-à-dire les grands demi-axes de ces mêmes orbites : on l'exprime ainsi : *les quarrés des temps sont comme les cubes des distances*. Il est heureusement tombé sur ce rapport après un travail incroyable fait très-long temps avec un tâtonnement inutile sur un très-grand nombre de combinaisons différentes, & de rapports trouvés faux.

63. Newton en considérant ces loix a trouvé, que toutes les trois étoient la suite nécessaire d'une loi seule de gravité décroissante en raison réciproque du quarré de la distance au soleil répandue dans tout le systême planétaire, à laquelle ayant assujetti les comètes aussi, il a déterminé leurs mouvements dans des ellipses très-allongées, qui par-là s'approchent de la forme de la parabo-

le,

le, & une quantité d'observations postérieures nous ont assurés de la vérité de cette loi. Il a fait plus, il a trouvé que cette gravité est générale, de manière que toutes les parties, au moins de tous les corps qui composent notre systême, ont une tendance à s'approcher les unes des autres selon la même loi du quarré des distances, que pour cela on a appellé attraction générale. Par-là non seulement il a expliqué le mouvement des satellites de Jupiter & Saturne conforme à la troisième loi de Kepler, par rapport à leurs planètes principaux, & le temps périodique de la lune qui répond à la gravité de nos corps terrestres, mais il a déterminé en détail plusieurs parmi les inégalités du mouvement de la lune produites par l'action perturbatrice du soleil, comme aussi un changement dans l'axe de la révolution diurne de la terre causé par la force du soleil & de la lune sur la matière, qui s'élève vers l'équateur de la terre, à cause de sa compression aux pôles, qui produit la précession des équinoxes & la nutation de l'axe.

64. Les découvertes de Newton ont donné aux Géomètres, comme je l'ai dit, la clef du ciel, à l'aide de laquelle on est entré dans le détail d'une quantité d'inégalités & perturbations, qu'on n'auroit jamais pu déterminer par les seules observations, dans le mouvement des planètes tant du premier que du second ordre, & des comètes. C'est à ces principes que nous devons ce degré d'exactitude, à laquelle on est parvenu dans la théorie de la lune. Par-là elle est devenue aujourd'hui très-essentielle à la Marine, puisque les erreurs des tables que Mayer a données, en réunissant ses observations à la théorie Newtonienne bien employée par Euler, arrivent très-rarement à une minute, qui ne porte pas par elle même plus de dix lieues marines d'incertitude sur le lieu du vaisseau. On a ajouté de la perfection à ces tables par de nouveaux calculs & des observations, mais on n'auroit jamais rien fait pour cet objet d'assez précis & exact sans cette clef générale, que nous avons nommée.

65. Dans le vrai systême du monde reconnu aujourd'hui généralement, il n'y a rien d'immobile, si ce n'est un point imagi-

nai-

naire, qu' on appelle le centre commun de gravité de toutes les planètes & comètes, autour duquel tous ces corps-là ont leurs mouvements, le soleil aussi. Mais le mouvement de celui-ci est beaucoup plus petit par son voisinage à ce centre. Pourtant pour la facilité du calcul, on conçoit d' abord celui-ci comme immobile placé, selon la première loi de Kepler, dans le foyer commun des ellipses des six planètes du premier ordre, & des ellipses, ou paraboles des comètes, & on employe après des corrections relatives à son mouvement avec la correction de toutes les petites *inégalités produites par l'action mutuelle de toutes les autres parties du systême*. *Le soleil* a aussi un mouvement de révolution autour d'un axe, qui a son *équateur à lui* : chaque planète a le mouvement dans son ellipse avec les aires proportionnelles au temps selon la seconde loi de Kepler. Les plans de ces ellipses sont inclinés au plan de l'équateur solaire & entr' eux, avec de petites inclinaisons coupant le plan de l' orbite terrestre, appellée l'*écliptique*, en des lignes droites différentes, qui pourtant passent toutes par le soleil, & s' appellent lignes des nœuds, & faisant avec le plan de l'*écliptique* différents angles de peu de degrés, ce qui produit la petite largeur du zodiaque. Dans chaque ellipse on *appelle excentricité* la distance du soleil à son centre, *ligne des apsides le* grand axe, qui passe *par les deux foyers* & *par le centre*, dont la moitié est la distance moyenne : *dans les deux* extrémités de cet axe on a d'un côté la distance la plus grande, qu'on appelle l'aphélie, & de l'autre la plus petite, qu'on appelle périhélie. On compte les anomalies vraies, & moyennes depuis l'aphélie, & quand on a la distance moyenne & l'excentricité, on peut trouver une anomalie par l' autre, calculant leur différence, qu'on appelle équation, & qu' on rédige en tables, pour s'en servir à trouver le vrai lieu héliocentrique de la planète pour un temps donné. Les lignes des apsides, & des nœuds ont des directions très-différentes, qui déterminent la position de *l'aphélie*, & des deux nœuds, dont on appelle nœud ascendant celui, par lequel la planète passe de l'hémisphère austral au boréal, & l' autre descendant. Il y a dans la position

des aphélies, & des nœuds un très-petit changement réel avec l'apparent occasionné par la précession des équinoxes. Dans les différentes ellipses comparées entr'elles, les quarrés des temps sont comme les cubes des distances moyennes, selon la troisième loi de Kepler. Les comètes font leurs mouvements analogues dans des orbites elliptiques très-allongées. Les satellites accompagnent Jupiter & Saturne avec leurs orbites particulières, & la lune avec son ellipse accompagne aussi la terre.

66. C'est pourtant le centre commun de gravité de la terre, & de la lune très-peu éloigné du centre de la première, qui décrit l'ellipse, tandis que l'une, & l'autre vont autour de lui. Mais pour la facilité du calcul on transporte dans la lune même ce petit mouvement de la terre, en considérant le mouvement de la lune comme fait dans une ellipse, qui a le foyer dans la terre même; par les grandes perturbations de l'inégalité de l'action solaire sur ces deux corps, tout est variable dans cette ellipse, l'aphélie, qui fait sa révolution vers l'orient à-peu-près dans neuf ans, les nœuds, qui tantôt avançant vers l'orient, tantôt reculant vers l'occident, & beaucoup plus, achèvent leur révolution rétrograde à-peu-près dans 18 ans. La grandeur de l'axe, l'excentricité, l'inclinaison à l'écliptique, la vîtesse de la description des aires, tout est varié, & cela avec une complication d'inégalités presque inextricable.

67. Pour chaque planète il y a sept éléments: la distance moyenne, l'excentricité, la position de l'aphélie, le lieu du nœud, l'inclinaison de l'orbite, le temps périodique qui donne le mouvement moyen, & l'époque du lieu à quelque temps donné. On donne au long dans l'Astronomie les méthodes pour déterminer ces éléments pour chaque planète par des observations faites sur la terre, en se servant principalement des observations faites dans les oppositions & conjonctions avec le soleil, qui tiennent place des observations qu'on feroit, si l'on étoit dans le soleil même: delà on tire les tables astronomiques, par lesquelles on trouve pour un temps donné quelconque la longitude & la latitude héliocentrique d'une planète, la longitude héliocentrique de la terre, les

di-

distances de toutes les deux au soleil : de-là par la Trigonométrie plane on en trouve la longitude & la latitude géocentrique & la distance à la terre. Pour le soleil on trouve immédiatement par les tables sa longitude géocentrique & sa distance à la terre avec son diamètre apparent. On trouve aussi la longitude & latitude géocentriques de la lune, sa distance à la terre avec la parallaxe horizontale, qui dans son élévation sur l' horizon ont un changement selon des loix connues, qu' on rédige en tables. Il y a aussi des tables pour le mouvement des satellites, & surtout pour les éclipses de ceux de Jupiter, comme aussi pour les mouvements des fixes, la précession, aberration, nutation. Mais tout le détail de ces grands calculs n'est pas pour un Marin, qui trouve déjà préparés tous les matériaux de ces positions dans des Ephémérides, sur-tout dans la Connoissance des temps de France & le *nautical almanach* d' Angleterre. C' est assez pour lui d'avoir des idées générales de tout cela, comme celles que nous avons données ici.

68. Nous dirons seulement en gros, que les rapports des distances des planètes au soleil, & leurs temps périodiques sont beaucoup plus certains que la distance absolue & leur grandeur par rapport à la terre, qui dépend de cette distance. Les distances au soleil sont à-peu-près pour Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne comme 4, 7, 10, 15, 52, 95 (*); les temps périodiques de trois mois, sept & demi, un an, deux ans, douze, & trente. La distance absolue du soleil à la terre est d'environ 34 millions de lieues, ainsi chaque unité des nombres des distances respectives ci-dessus valent presque trois millions & demi de lieues : la distance de Vénus à la terre dans son périgée depuis la conjonction inférieure avec le soleil, quand elle se trouve entre le soleil & nous, est à la distance apogée, quand elle se trouve derrière le soleil, à-peu-près comme 3 à 17, & la distance de

(*) On trouve pour la nouvelle planète cette distance de 190, double de celle de Saturne, comme on a indiqué dans la note au num. 7, & on en déduit le temps périodique de 83 ans.

Mars périgée, quand il est en opposition avec le soleil, est à sa distance apogée derrière lui à-peu-près comme 5 à 25, c' est-à-dire dans le second cas pour Mars cinq fois plus grande, pour Vénus presque 6 fois plus grande que dans le premier. La distance moyenne de la lune à la terre n' est que de 60 demi-diamètres de la terre, dont chacun est à-peu-près de 1400 lieues, ou presque de 20 millions de pieds de Paris. Le diamètre de la lune est un peu plus d' un quart de celui de la terre, c' est-à-dire presque exactement $\frac{3}{11}$, celui du *soleil* presque *de* 113 *diamètres de* la terre, celui de Mercure $\frac{2}{5}$ d' un diamètre, celui de Vénus presque égal à un diamètre, celui de Mars $\frac{2}{3}$, celui de Jupiter est de 11 $\frac{1}{3}$; de Saturne 10, de l' anneau 23 $\frac{1}{2}$.

§. IV.

Du rapport de l' Astronomie avec la Marine.

69. LA Marine a rapport à l' Astronomie pour trois objets: 1°. pour diriger la route du vaisseau, 2°. pour trouver sa latitude géographique, 3°. pour trouver sa longitude.

70. Avant la découverte de la direction de l' aimant vers le nord, on se servoit pour la direction de la route de la position du soleil & des étoiles fixes, sur-tout des circonpolaires, d'où l' on tiroit en gros la position du nord & du sud, & l' on ne s' éloignoit guères des côtés pour se diriger par des objets terrestres reconnus. La boussole a rendu le navigateur beaucoup plus hardi. Elle donneroit sans aucun secours de l' Astronomie, la direction du nord & des autres vents, s' il n' y avoit la variation de la direction de l' aiguille aimantée, & son usage seroit beaucoup plus facile, si sa déclinaison par rapport au nord n' étoit pas différente dans le même temps pour les différents lieux & dans le même lieu pour les différents temps. C' est cette variation de la direction de l' aiguille, qui rend nécessaire l' Astronomie pour l' usage de la boussole. Il faut déterminer tous les jours, ou au moins le plus souvent qu'on peut la déclinaison de l' aiguille aimantée.

71. Il y a deux espèces de boussoles, une fournie d'une alidade avec des dioptres, qu'on dirige à un astre : la distance de l'alidade à l'aiguille aimantée mesurée sur un cercle horizontal de l'instrument divisé en degrés donne l'azimut actuel de cet astre compté du nord, mais fautif à cause de la déclinaison de l'aiguille. On appelle au secours l'Astronomie pour trouver le vrai azimut à l'aide des tables & d'une observation astronomique, d'où l'on tire la différence de la fautive à la vraie, & par son moyen la déclinaison cherchée. On l'appelle *variation du compas*, appellant l'instrument même *compas de variation*. Comme *la déclinaison change très-peu dans un jour & dans plusieurs jours aussi, & que le changement pour les lieux peu éloignés les uns des autres est petit ; la variation une fois trouvée, peut servir pour plusieurs jours*. La seconde espèce sans alidade est la boussole commune, qui sert pour gouverner le vaisseau, & on l'appelle compas de route.

72. Pour trouver l'azimut vrai, il faut avoir la déclinaison de l'astre, qui appartient immédiatement à l'Astronomie, & la latitude du lieu, qu'on trouve *à l'aide de l'Astronomie* ; par-là on trouve l'*azimut au moment du lever & du coucher* par un *seul triangle sphérique*, qui a *les angles dans le pôle*, dans le *point du nord*, & dans l'astre. Cet azimut est le *complément de l'amplitude*. On peut en avoir des tables calculées pour toujours relatives à différentes hauteurs du pôle, & différentes déclinaisons des astres : mais si l'on se sert du lever apparent, il faut employer une correction relative à l'effet de la réfraction, qui pourtant n'arrive à un degré que dans un très-grand éloignement de l'équateur : dans la latitude de Paris cette correction n'arrive pas à un demi-degré. Si l'on se sert d'un astre élevé *sur l'horizon*, il faut en observer la hauteur & la corriger par la soustraction de la réfraction & de la dépression de l'horizon visible, qui appartient plutôt à la Géographie, & dont on a déjà des tables calculées. Alors on a l'azimut par le triangle sphérique, qui a les trois angles dans le zénith, le pôle, & l'astre. Dans le premier triangle ci-dessus, l'azimut est donné par le cô-

té

té horizontal, dans *celui-ci* par l'angle au *zénith* : nous en avons parlé dans le paragraphe II.

73. Ainsi ce premier objet emprunte de l'Astronomie, pour *la théorie* la déclinaison de plusieurs fixes, ou du soleil, & *les réfractions*. On a les tables de tout cela dans la Connoissance des temps & la manière de s'en servir. Pour la pratique il en prend la méthode d'observer les hauteurs, par le moyen desquelles on trouve aussi la latitude du lieu nécessaire pour le même objet. Mais si l'on observe la hauteur du *soleil*, *ou il faut* en observer aussi le diamètre *apparent*, ou plutôt *l'emprunter* de *la théorie*. On en *trouve pareillement la table dans la* Connoissance *des temps*. Le *diamètre* du *soleil est nécessaire*, parceque *les* instruments *ne donnent* immédiatement, que la hauteur du limbe supérieur, ou inférieur: ainsi dans le premier cas il faut ôter, dans le second ajouter le demi-diamètre apparent pour avoir la hauteur du centre.

74. Le second objet étoit la latitude géographique du vaisseau. Il y a plusieurs méthodes plus compliquées, moins aisées, & moins sûres pour la trouver à l'aide de l'Astronomie. Mais la plus simple, la plus *facile*, *la* plus *exacte* est *celle*, qui *employe* une seule observation *de la hauteur* d'un astre, *dont on sait* la déclinaison à son arrivée au méridien. On sait à-peu-près *la position* du *méridien*, au moins à l'aide de la boussole: on se tourne vers le sud, ou vers le nord, & employant un instrument propre à observer la hauteur, comme un octant de *réflexion*, on suit un astre connu placé de ce côté-là, jusqu'à ce que la hauteur même après s'être augmentée commence à diminuer, ou viceversa. Ce maximum ou minimum donne la hauteur cherchée: il faut la corriger *par la réfraction* & par la dépression de l'horizon: sa combinaison avec la déclinaison donnera la latitude cherchée. Si *l'*on a observé vers le sud; la différence ou la *somme* de la *déclinaison*, & de la hauteur donne la hauteur de *l'équateur*, qui *ôtée* de 90 degrés laisse la latitude. On prend la somme, si la déclinaison est australe, la différence, si elle est boréale. Si l'on observe vers le nord; on prend le complément de la dé-

déclinaison, qui est la distance au pôle, & on l'ôte de la hauteur tirée d'un maximum, ou l'on y ajoute la hauteur tirée d'un minimum pour avoir immédiatement la hauteur du pôle, qui est égale à la latitude. Pour cet objet, si l'on veut toute l'exactitude, on doit corriger la déclinaison des étoiles fixes par les petits effets de l'aberration, & nutation, pour lesquels, outre les tables générales, il y en a de particulières appartenantes à un grand nombre de fixes plus remarquables dans la Connoissance des temps de *différentes années*: ainsi le second objet ne demande rien *de plus de l'*Astronomie que le premier.

75. Le 3.me objet, qui est *la longitude*, à *aujourd'hui le* plus grand *besoin* de *l'* Astronomie. *Autrefois il n' y* avoit d'autre moyen pour la déterminer, que l'estime, qui *employe la* direction, & la vîtesse du voyage, & pour cela on n'avoit besoin de l'Astronomie que pour trouver la variation du compas: mais cette méthode après de longs voyages donne des erreurs trop grossières tant pour la difficulté, qu'il y a de déterminer ces deux éléments, la direction, & la vîtesse indépendamment des courants, que pour *les courants mêmes très-souvent* inconnus, qui entraînent *les* vaisseaux *par un mouvement* insensible aux Marins. L'*estime donne tant la* longitude que *la* latitude. La *latitude observée sert* pour corriger en partie *l'* erreur de *l'* estime, *mais la* correction de la longitude reste toujours incertaine.

76. On a espéré quelque temps de trouver la longitude sur *la* mer par *le* moyen de la variation du compas, faisant usage des variations observées dans une grande quantité de lieux, dont la position sur notre globe étoit donnée. On a tracé sur une carte géographique des lignes, dans lesquelles *la* déclinaison de l'aimant seroit d'un certain nombre donné de degrés, comme de 5 en 5. Si la position de ces lignes étoit assez exacte & permanente, on trouveroit le lieu précis du vaisseau par la rencontre d'une de ces lignes correspondante à la variation du compas observée avec le parallèle déterminé par la latitude; par-là on auroit sur la carte même la longitude de ces lieux. Mais la déclinaison de l'aimant étant variable, & ayant cherché inutilement la loi de son chan-

changement par des *hypothèses*, qui se sont trouvées fausses; on n'a pas tiré de cette méthode le profit qu'on avoit espéré d'abord.

77. Il a donc fallu se tourner du côté de la différence des heures, que l'on compte dans le même instant dans des lieux de longitude différente, puisque cette différence donne la différence de longitude à raison de 15 degrés par heure, comme nous l'avons dit. Pour employer cette méthode il faut avoir dans le même instant l'heure du vaisseau & l'heure d'un pays connu, comme de Paris, ou d'un port connu. La première exige l'Astronomie: pour la seconde il y a deux méthodes, celle d'une montre marine, ou d'une horloge, qui par la régularité de sa marche puisse conserver l'heure d'un pays connu du départ, & celle d'un phénomène qui doit arriver dans le ciel à une heure connue, par exemple de Paris, & qu'on puisse observer sur la mer. Pour cela l'Astronomie est nécessaire.

78. Pour l'heure du vaisseau, il faut prendre des hauteurs. Si l'on prend les hauteurs correspondantes du soleil à une distance suffisante avant & après midi, remarquant les heures sur une bonne montre, on y a le midi, qui pris dans deux jours différents donne la marche de la montre même, de laquelle on tire l'heure vraie à chaque instant, & il y a assez de montres capables d'éviter une erreur considérable dans une ou deux fois 24 heures. Cependant pour employer cette méthode, il faut faire usage d'une correction, qui répond au mouvement du soleil en déclinaison, & qu'on trouve dans la Connoissance des temps, comme aussi d'une autre correction, qui répond au voyage du vaisseau quand il est à la voile, & qu'on trouve aisément. On peut se servir pour le même objet des hauteurs correspondantes d'une fixe connue par lesquelles sans la première correction on a le moment de son arrivée au méridien, d'où l'on tire l'heure solaire par le moyen de la différence de son ascension droite à celle du soleil. On peut trouver l'heure du vaisseau par l'observation d'une seule hauteur du soleil, ou d'une fixe connue prise à une distance suffisante du méridien & bien corrigée, dans

le

le triangle dont nous avons parlé ci-dessus, qui a les trois angles dans le zénith, le pôle & l' astre, & par son angle au pôle donne l' heure. Pour avoir les côtés de ce triangle, l' Astronomie doit avoir fourni la déclinaison de l' astre, la latitude du lieu, & la réfraction, avec le demi-diamètre du soleil, pour corriger la hauteur : quand on s' est servi du soleil, l' angle au pôle donne immédiatement l' heure, & quand on a observé une fixe, il faut encore faire usage de son ascension droite pour tirer de la différence de celle-ci à celle du soleil la distance angulaire du cercle horaire, qui passe par le soleil au méridien, d' où l' on tire *l' heure solaire*.

79. *Pour la première méthode de connoître l' heure d' un pays connu par l' usage de la montre marine, ou de l' horloge, il faut* faire les mêmes opérations avant le départ en plusieurs jours consécutifs, trouvant le midi sur cette montre, ce qui donne sa marche, de laquelle & des effets des différents degrés de chaleur sur la montre même, on trouve après un temps donné quelconque l' heure de ce même lieu du départ. M. le Chevalier Florieu dans le second des deux Volumes qu' il a donnés à l' occasion des preuves qu' il a faites par ordre du feu Roi des montres de M. Berthoud avec le plus grand succès, a donné tout au long tout ce qui est nécessaire pour employer cette méthode avec toutes les précautions, qu' il faut prendre, & quantité d' exemples. C' est un excellent traité mis à portée de tous les Marins qui ont la pratique de la Trigonométrie.

80. Pour la seconde méthode on peut employer seulement quelques éclipses, & la position de la lune. Parmi les éclipses on ne peut employer à la mer que celles du premier satellite de Jupiter, dans lesquelles le calcul ne s' éloigne de l' effet réel aujourd' hui presque jamais d' une minute, & le mouvement assez prompt rend le phénomène moins incertain pour l' observation. Les éclipses de la lune, outre l' erreur du calcul ont l' embarras de la pénombre très-incertaine, & sans cela c' est un phénomène si rare, qu' on ne peut en tirer aucun profit pour la navigation. On ne peut pas observer les éclipses des satellites de Saturne. On les

voit très-difficilement avec de grands instruments à terre, & on ne connoît pas assez leurs mouvements. Les tables des autres satellites de Jupiter n' ont pas encore acquis assez de perfection pour éviter une erreur considérable dans le calcul de leurs éclipses (*), & leurs mouvements trop lents font que les différents yeux, la différente constitution de l' atmosphère, & la différente force des lunettes portent trop de différence dans le moment estimé de leurs immersions, ou émersions, qui réellement ne se font pas dans un instant, mais peu-à-peu. Très-souvent les erreurs réunies iroient à plusieurs minutes, & 2 minutes d' erreur dans le temps en produisent une d' un demi-degré dans la longitude. On pourroit espérer quelque chose du second satellite, mais on ne peut se fier qu' au premier. Cependant le premier même ne peut pas servir beaucoup pour cet objet. Quoiqu'il y ait une de ces éclipses tous les deux jours, comme on ne peut pas les observer, ni quand Jupiter est au-dessous de l' horizon, ni pendant le jour, ou le grand crépuscule, celles qu' on peut observer sont très-rares, & pendant deux mois que Jupiter se trouvant derrière le soleil & plongé dans le grand crépuscule, on ne peut pas en observer aucune. Il faut ajouter la difficulté extrême qu'on a de faire cette observation à la mer. Toutes ces raisons réunies ont ôté tout le succès de la chaise marine, qu'on avoit proposé & essayé en Angleterre.

81. La lenteur de tous les autres mouvements dans le ciel ôte l' espérance de pouvoir jamais employer aucun autre astre pour cette recherche, à l' exception de la lune qui s' avance à chaque minute, à-peu-près d' une demi-minute, de manière qu' une minute d' erreur dans sa position ne porte que deux minutes d' erreur dans le temps, c' est-à-dire un demi-degré dans la longitude; & comme presque jamais aujourd' hui l' erreur des tables n' arrive à une minute, sa position est propre à une détermination de

(*) Celles du second satellite ont été beaucoup perfectionnées dans ces dernières années; mais il y reste la difficulté provenante de la lenteur de son mouvement, outre le petit nombre de ces éclipses visibles.

de la longitude suffisante pour la navigation. Le changement de cette position donne deux espèces d'éclipses, qu'on peut observer avec toute la précision, celles du soleil & les autres des fixes cachées par la lune. Ces phénomènes observés sur terre ont servi beaucoup pour perfectionner la Géographie, mais ils sont moins propres pour la navigation actuelle par leur rareté, & par la difficulté de les bien observer dans un vaisseau, outre la difficulté, qui provient de l'embarras d'un calcul trop long, & trop compliqué pour un Marin pour en tirer la longitude. Pour cela on *s'est borné aux distances de la lune au soleil, ou à quelques fixes, qu'on peut observer tous les jours & toutes les nuits, quand la lune paroît sur l'horizon*.

82. Il y avoit deux grandes difficultés pour cette méthode, la première du côté de la théorie de bien déterminer la distance même pour un temps donné, la seconde du côté de la pratique, de la bien observer sur mer. On a ôté en très-grande partie cette seconde difficulté par l'usage de l'octant de réflexion, & la première par les travaux immenses qu'ont fait derniérement pour cet objet les Anglois, en *calculant* de trois heures en trois heures cette distance pour *l'heure* de Londres, & publiant un grand ouvrage pour *faciliter la* correction de l'effet de la réfraction, & *de la parallaxe sur* la distance observée. On peut voir sur cela *la* Connoissance des temps pour cette année 1775, dans laquelle on en parle, & on donne des exemples avec tout le détail du calcul numérique qui est bien à portée de tous les Marins.

83. Pour faire le calcul de la distance de la lune au soleil ou à une fixe, il faut avoir leurs longitude & latitude: alors dans un triangle sphérique, qui a les angles dans le pôle de l'écliptique & les deux astres, on a l'angle à ce pôle, qui est la différence des leurs longitudes, & les deux côtés adjacents, qui sont de 90 degrés plus ou moins les latitudes, d'où l'on tire le côté opposé, qui est la distance cherchée. On trouve aisément la longitude & la latitude du soleil & d'une fixe; mais la lune demande ce qu'il y a de plus haut & de plus embarrassant dans l'Astronomie. Les tables, que nous en avons enfin assez exactes

pour pouvoir les employer à cet objet, ont couté des peines immenses aux Astronomes, & les recherches le plus sublimes & les plus délicates aux plus grands Géomètres. Il y a de plus le calcul numérique très-long & très-pénible pour tirer des tables mêmes le lieu de la lune, ce qui exige un Astronome bien exercé dans cette pratique. L' Astronomie doit fournir encore les diamètres apparents du soleil & de la lune, pour réduire la distance des limbes donnée immédiatement par l' oçtant à la distance apparente des centres, comme aussi la réfraction & la parallaxe, pour réduire la distance apparente à la vraie, qu' on verroit du centre de la terre.

84. Le diamètre apparent de la lune & la parallaxe, comme aussi la parallaxe du soleil & la réfraction de tous les deux astres, dépend de leur hauteur. Pour la parallaxe du soleil, qui est de très-peu de secondes, il suffit d' avoir la hauteur en gros, mais pour le reste il faut avoir les hauteurs avec un peu plus de précision. On pourroit tirer ces hauteurs par la Trigonométrie sphérique de l' ascension droite & de la déclinaison prises dans la Connoissance des temps pour l' heure de l' observation réduite à l' heure de Paris par la différence de longitude connue à-peu-près par l' estime, & l' erreur que porteroit dans les hauteurs, celle de l' estime ne seroit pas excessive; mais pour se débarrasser de cette erreur, & éviter les longs calculs nécessaires pour trouver les hauteurs, il vaut beaucoup mieux les tirer d' une observation immédiate faite, ou par deux autres observateurs dans le même temps, dans lequel on prend la distance apparente, ou par le même observateur un peu avant & après pour déduire celle du moment de la distance observée par la méthode usitée de la proportion entre les différences. Après qu' on a trouvé la parallaxe & la réfraction, on peut corriger la distance observée par la résolution de deux triangles sphériques, qui ont les trois angles dans le zénith & dans les deux astres. Dans le premier on connoît les trois côtés: deux sont les deux distances apparentes au zénith compléments des deux hauteurs observées, & le troisième la distance même observée aussi. On en tire l' angle au zénith opposé à

ſé à ce dernier côté : alors dans le ſecond triangle on peut employer cet angle avec les deux diſtances au zénith corrigées, qui ſeront les deux côtés adjacents : on y trouvera le troiſième côté qui ſera la diſtance corrigée. Pour éviter la réſolution de ces triangles on donne des formules équivalentes, par leſquelles on fait cette correction, & de-là on tire des règles d'un calcul numérique, appuyé pourtant ſur les tables trigonométriques. De cette eſpèce eſt la mèthode que M. le Ch.er Borda a donnée à M. de La-Lande, qui l'a inſerée dans la Connoiſſance des temps de *cette année à la page 309. Mais le grand ouvrage anglois de 1200 pages débarraſſe les Marins de tous les éléments trigonométriques ſubſtituant des tables, dans leſquelles on remplit l'objet par un calcul numérique beaucoup plus ſimple;* voyez la même Connoiſſance des temps pag. 290.

85. Si la diſtance corrigée ſe trouve la même qu'une des diſtances marquées dans la Connoiſſance des temps, l'heure qu'on y trouve vis-à-vis ſera l'heure de Paris. Ordinairement la diſtance trouvée ſera entre deux de celles qu'on trouve dans la Connoiſſance des temps. *Alors on ſe ſervira* de la proportion ſuivante : *comme leur différence eſt à la différence* entre la précédente & *la trouvée, ainſi trois heures ſont à un nombre*, qu'il *faudra ajouter à l'heure précédente pour avoir l'heure de* Paris: *la différence* de cette heure à l'heure du vaiſſeau donnera la longitude, à raiſon de 15 degrés par heure.

§. V.

Des inſtruments.

86. LES inſtruments employés dans l'Aſtronomie ſont de trois eſpèces. Dans la première ſont ceux qu'on employe pour aider la vue : ceux qui ſervent à la meſure du temps appartiennent à la ſeconde eſpèce : la troiſième comprend ceux qui ſervent pour les angles.

87. Pour aider la vue on employe les téleſcopes & les lunettes, parmi leſquelles celles qu'on appelle acromatiques ſont bien

uti-

utiles par le grand effet qu' elles font quoique très-peu longues. Il y a des objets bien essentiels correlatifs à leur nature, qu' un Astronome ne doit pas ignorer pour n' être point trompé dans leur usage. Mais le détail de tout cela, comme beaucoup d' autres objets appartenants à la vérification & rectification des instruments, n' est pas pour cet abrégé.

88. Pour le temps on employe les montres, les horloges, les pendules. Les pendules sont très-essentielles dans un Observatoire établi sur terre, & pour avoir des observations bien assurées, il en faut une à correction, qui ne change point par la différence de la chaleur. On en a aujourd' hui d' assez parfaites, qui dans plusieurs jours ne portent pas une seconde d' erreur. Une bonne montre à secondes conserve l' égalité plusieurs heures, & tandis, que les pendules ne peuvent être d' usage sur la mer à cause de l' agitation du vaisseau, on doit y employer une de ces montres pour l' usage ordinaire. Pour conserver l' heure du départ, & s' en servir pour trouver la longitude dépendamment de cette heure, il est absolument nécessaire d' avoir une de ces horloges, ou montres, qu' on appelle de longitude, qu' on commence à avoir d' une justesse suffisante; mais cette espèce d' instrument ne peut pas encore être d' un usage commun à cause du prix & de la rareté.

89. On peut compter parmi les instruments appartenants à la mesure du temps celui qu' on appelle instrument des passages, parcequ' il sert pour déterminer le moment du passage d' un astre par le méridien. C' est une lunette attachée perpendiculairement à un axe horizontal & perpendiculaire à la ligne méridienne. Elle a dans le foyer de son objectif deux fils qui se croisent à angles droits, l' un horizontal, & l' autre perpendiculaire à celui-là. Dans la conversion que fait la lunette avec cet axe, qui est placé de manière à pouvoir tourner sur lui-même, ce second fil reste toujours dans un plan vertical, qui est celui du méridien: tous les astres y arrivent parallélement au fil horizontal dans le moment qu' ils arrivent au méridien. Pour son exactitude il doit avoir l' axe de la lunette bien perpendiculaire à l' axe de conver-

sion,

ſion, celui-ci bien horizontal, & bien perpendiculaire à la ligne méridienne. On peut vérifier ſa poſition dans une direction quelconque par les hauteurs correſpondantes d'une étoile fixe, qui donnent le moment de ſon arrivée vraie au méridien : la différence de celui-ci au moment de l' arrivée au ſecond de l' inſtrument donne l' erreur dans cette direction. J' ai une méthode communiquée à l' Académie (*) pour déterminer les trois erreurs dans la poſition de ces deux axes par trois de ces différences obſervées, à l' effet de les corriger, ou d' en tirer des tables, pour avoir la différence dans une autre direction quelconque. Cet inſtrument bien vérifié vaut beaucoup mieux qu' une ligne méridienne pour avoir le midi.

90. On ajoute d' un côté un demi-cercle concentrique à l' axe dans un plan vertical avec un index attaché à l' axe même, qui y marque la hauteur de la direction de l' axe de la lunette, ou ſa diſtance au zénith. Ce cercle appartient déjà à la meſure des angles, & s' il étoit aſſez grand, il tiendroit la place d' un double quart de cercle mural, auſtral & boréal.

91. Le quart de cercle mural eſt le quart d' un grand cercle fixé ſolidement ſur un mur de manière que ſon limbe ſoit exactement placé dans le plan du méridien. On y ajoute une lunette attachée à un cylindre, dont l'axe ſoit horizontal & paſſe par le centre du même cercle. Cette lunette eſt mobile ſur cet axe, & a les deux fils, comme celle de l' inſtrument des paſſages. Il y a des méthodes pour vérifier ſa poſition qui doit être dans le plan du méridien & ſon point vertical & l' horizontal, comme auſſi le parallèliſme de l' axe de la lunette à ſon plan. Alors il donne le moment du paſſage par le méridien & la hauteur ou diſtance au zénith. Dans pluſieurs grands Obſervatoires on en employe deux, un du côté du ſud, & l' autre vers le nord. Il y en a d' excellents, qui ne donnent pas une ou deux ſecondes d' erreur;

(*) On a ce qui appartient à ce ſujet dans l' Opuſcule XI du Tome IV de cette Collection: comme auſſi il y a dans les Opuſcules du même Volume une grande quantité de méthodes pour la vérification & rectification des principaux inſtruments aſtronomiques.

reur ; mais il seroit incomparablement plus utile d' en avoir un seul solidement attaché à un axe vertical avec une alidade , qui dans un grand cercle horizontal donneroit tout à-la-fois les azimuts avec les hauteurs , comme nous l' avons déjà dit ci-dessus.

92. Il suppléeroit aussi un quart de cercle mobile , qu' on employe pour prendre les hauteurs . Celui-ci ordinairement a une lunette attachée à un de ses côtés avec un fil à plomb qui part de son centre . Il est arrangé sûr son pied de manière à pouvoir être tourné verticalement de tous côtés , & tourné lui-même sur un axe horizontal . L' intersection des fils dans le foyer de l' objectif donne la direction de l' objet , tandis que le fil d' à plomb marque le zénith ; ainsi le fil même laisse dans le limbe la distance au zénith vers la lunette & la hauteur sur l' horizon du côté opposé . Quelquefois on se passe du fil d' à plomb , & on fixe le quart de cercle en y ajoutant une alidade , qui porte la lunette . On se sert aussi d' un sextant , à la place d' un quart de cercle , & par le moyen d' une lunette fixée sur un côté & d' une seconde perpendiculaire à la première , le fil d' à plomb , qui part du centre peut donner toutes les hauteurs aussi bien que dans le quart de cercle entier . Pour les observations délicates des étoiles peu éloignées du zénith , on employe des secteurs d' un long rayon , qui dans le limbe ont un petit nombre de degrés , & il y a beaucoup de constructions différentes de ces secteurs , qui ont été employés avec succès dans la mesure des degrés du méridien pour la figure de la terre .

93. Il y a un autre instrument très-utile , & qui est beaucoup en usage . C' est une lunette qui tourne sur un axe fixé perpendiculairement sur un autre , qu' on place parallélement à l' axe du monde . Ce second axe a un index , qui tournant avec lui marque les heures dans un cercle immobile , qui lui est perpendiculaire : le premier axe porte avec la lunette un index qui dans un cercle attaché au second axe marque les déclinaisons . Quand on a mis cet index à la déclinaison d' un astre , la lunette tournant autour du second axe décrit dans le ciel un cercle parallèle du mouvement diurne , ce qui a donné le nom à l' instrument de machi-

ne parallatique : par cette machine on trouve aisément les astres en plein jour, & on peut comparer la position inconnue d'un astre avec la connue d'un autre.

94. Il y a une quantité d'instruments imaginés pour mesurer les petites distances, que l'on appelle micromètres. Les uns sont formés de fils ou de petites lames fixées dans le foyer de l'objectif d'une lunette; les autres ont un fil qui marche parallélement à l'aide d'une vis, qui faisant tourner ensemble un petit index marque sur un cercle divisé les parties de chaque révolution : ces parties avec le nombre des révolutions entières donnent la quantité du mouvement, & par-là les mesures cherchées. Il y a aussi une espèce de micromètre qu'on appelle micromètre objectif. Pour le former, on coupe par le milieu un objectif de long foyer. On arrange les deux demi-cercles de manière qu'en les adaptant au bout d'un télescope ou d'une lunette vers l'objet perpendiculairement à son axe on puisse faire glisser les deux parties tellement que l'une déborde, & va au-de-là de l'autre. Quand les deux demi-cercles sont réunis, on voit une seule image de l'objet; quand il y a le débordement, chaque partie donne son image; la quantité du débordement donnée par l'instrument donne la distance des deux images, & par-là la mesure des petites quantités qu'on cherche.

95. Tous ces instruments de la troisième espèce ne peuvent pas être employés dans un vaisseau un peu agité par les flots, si ce n'est le micromètre objectif, dont on pourroit se servir, quand l'agitation n'est pas trop grande, mais qui est beaucoup plus utile pour perfectionner la théorie de l'Astronomie, que pour la pratique d'un Marin. Il pourroit bien par un micromètre objectif adapté à une bonne lunette aisément maniable observer avec beaucoup de précision une distance très-petite de la lune à une fixe pour en tirer sa longitude. Mais ce phénomène est de la même espèce que les étoiles éclipsées par la lune bien rare & trop difficile à calculer pour un Marin. Cependant il doit avoir la connoissance, & la pratique de plusieurs instruments terrestres, pour s'en servir, quand il descend à terre à l'effet d'y déter-

miner mieux la longitude & la latitude d'un atterrage. *Pour cet objet il seroit bon* d'avoir un bon quart de cercle de deux ou trois pieds de rayon, une bonne pendule, une lunette capable de faire voir les éclipses des satellites de Jupiter, & un instrument des passages portatif. Par son quart de cercle il prendra bien exactement les hauteurs pour en tirer la latitude & la marche de sa pendule: alors une éclipse du premier satellite de Jupiter observée avec toute la facilité & toute la précision possibles lui donnera sur le champ sa longitude, sans craindre l'erreur de 5 lieues marines; mais encore les éclipses des autres lui serviront pour avoir la longitude de son atterrage, quand à son retour il aura des observations *correspondantes faites dans les* lieux connus. Par l'instrument des passages bien placé à terre, il aura la longitude par une observation bien facile & bien exacte, en observant le passage de la lune au méridien, il en tirera très-exactement son ascension droite ou immédiatement par l'heure même solaire en la comparant avec celle du soleil, ou par la différence du temps de son passage & du passage de quelque fixe. De l'ascension droite de la lune *il pourra tirer la longitude*, la comparant avec les ascensions *droites* qu'on peut *calculer sur ce* qu'il y a dans la Connoissance des temps. Mais il l'aura à son retour avec beaucoup plus de facilité & d'exactitude, en *comparant* son observation avec le passage de la lune par le méridien observé le même jour dans quelque Observatoire connu. De cette manière il rendra un très-grand service à la Géographie & à la Navigation, en corrigeant les cartes marines, qui aujourd'hui sont encore remplies d'erreurs grossières bien dangereuses, & très-souvent pernicieuses.

96. Pour observer dans un vaisseau, il y avoit autrefois des instruments qui donnoient les hauteurs bien grossiérement. Mais tous ont disparu quand on a commencé à connoître l'octant à réflexion publié par M. Hadley, qui porte son nom, quoique on en doive l'invention au grand Newton, sous la direction duquel on en avoit fait déjà 50 ans avant, comme *l'a* fait voir M. de Magellan dans sa nouvelle *Description des octans & sextans*

an-

anglois. Dans cet ouvrage on trouvera les différentes espèces de ces instruments avec ce qu' il a imaginé lui même dans ce genre, & toutes les précautions qu' il faut prendre pour les bien vérifier, & éviter les erreurs qui se glissent aisément dans leurs usages. Nous donnerons ici une légère idée de celui, qui est le plus communément en usage & le plus simple. Il a un limbe de la huitième partie de la circonférence du cercle, d' où il tire son nom d' octant, mais ce limbe est divisé en demi-degrés, qui pourtant dans son usage ont la valeur des degrés entiers, & avant le zero, & après les 90 de ces degrés on en ajoute ordinairement une dixaine de plus: il y a une subdivision de chaque degré en trois parties, qui donnent les 20 minutes, & le nombre des minutes, qu'il faut ajouter, est donné par un nonius placé sur une alidade mobile autour du centre de l' instrument. Cette alidade sur le centre même porte un petit miroir perpendiculaire au plan même de l' instrument. Il y a un autre verre étamé à demi, fixé sur un des deux côtés de l' octant, de manière qu' il soit parallèle à l' autre de l' alidade, quand elle marque zero dans le limbe. Sur le côté opposé de l' octant il y a une pinnule avec le petit trou, par lequel on regarde dans le second miroir directement un objet éloigné à travers sa partie non étamée, & on y voit le même objet par double réflexion des deux miroirs dans l' état de parallélisme, ou sur la partie même de la surface du verre, quand l' objet a beaucoup de lumière, ou tout à côté sur la partie étamée. En faisant tourner l' alidade avec son miroir, la ligne visuelle, qui répond à la double réflexion, quitte la directe & s' en éloigne par un angle double du mouvement de l' alidade, parceque la ligne perpendiculaire au miroir se détourne autant que l' alidade, & le rayon incident mobile faisant avec le rayon réflechi constant un angle divisé en deux parties égales par cette perpendiculaire doit se détourner du double. Il y a un autre miroir étamé à demi placé sur le même côté de l' octant qui porte le premier tourné de manière que par le trou d' une seconde pinnule fixée devant lui, on voit directement un objet éloigné diamétralement opposé à celui qu' on voit par double ré-

réflexion du miroir mobile, de l'alidade, & de ce second fixe.

97. Cet instrument sert à prendre l'angle que font dans l'œil les deux lignes visuelles dirigées vers deux objets. On tient avec une main l'instrument de manière, que son plan passe par l'œil & par les deux objets. On en regarde un par une pinnule à travers la partie non étamée de son miroir, & on tourne l'alidade jusqu'a ce que l'on parvienne à voir l'autre par la double réflexion. Quand l'angle doit être moindre du nombre des degrés marqués sur le limbe, c'est-à-dire aigu, ou peu obtus, on se sert de la première pinnule, & l'on se tourne de manière à avoir tous les deux objets devant soi, ce qui s'appelle observer par devant. Pour les angles, qu'on voit devoir être plus grands, on se tourne vers l'objet, qu'on veut regarder directement, de manière que l'autre reste derrière, ce qui s'appelle observer par derrière, & l'on fait la même opération de regarder directement le premier & d'y amener par le mouvement de l'alidade le second. Le nonius de l'alidade donne dans le premier cas l'angle même cherché, & dans le second son supplément, qui est le reste à 180°. On choisit toujours pour regarder directement l'objet moins lumineux ou moins remarquable à cause des rayons perdus dans la double réflexion.

98. Le grand usage de cet instrument dans un vaisseau est pour prendre la hauteur du soleil ou d'un astre quelconque, & la distance de la lune au soleil ou à une fixe: pour ce second objet on dirige la pinnule & son miroir à la fixe, & on y amène le limbe de la lune en donnant un petit mouvement à l'instrument, de manière que l'étoile allant le long du limbe le touche; ou si l'on se sert du soleil, on se dirige vers la lune, & on y fait venir le soleil même. Mais pour ne pas être ébloui par ses rayons, on employe un verre noirci ajusté sur le côté de l'instrument de manière à pouvoir le mettre quand on veut entre les deux miroirs.

99. Pour mesurer la hauteur, on se dirige vers l'horizon visible tenant l'instrument dans une position verticale, & on y amène l'astre par l'alidade faisant par son petit mouvement latéral,

ral, que le même astre allant en avant & en arrière le touche: on a alors dans le limbe de l'instrument la hauteur, quand on a observé en avant; & si on veut observer en arrière, on a la distance de l'astre à la partie opposée de l'horizon, qui donne le supplément de la hauteur. Quelquefois on est forcé d'observer en arrière, c'est-à-dire quand une côte, ou la brume cache l'horizon visible par devant; en pleine mer on peut presque toujours observer par devant. Mais il est très-avantageux d'avoir toutes les deux observations en avant & en arrière de la même hauteur, pour avoir avec plus de sureté la correction de l'abaissement de l'horizon visible. Il y a, comme nous l'avons dit, des tables de cet abaissement par rapport à l'élévation de l'œil sur la surface de la mer. Mais la valeur de ces tables est beaucoup troublée par une réfraction qui est très-variable selon les différentes constitutions de l'atmosphère. Comme la ligne visuelle sur la surface de la mer ne s'éloigne pas beaucoup dans les différentes positions autour du vaisseau; ordinairement cette réfraction est égale de tous côtés. Ainsi l'abaissement de l'horizon dans les deux observations opposées est le même. Par-là on y aura 180 degrés plus le double abaissement: la moitié de ce surplus retranchée de la hauteur trouvée en avant donnera la vraie hauteur indépendante de la variation de cette réfraction incertaine & trompeuse.

100. Quand on a l'horizon visible caché de tous les deux côtés, si l'agitation du vaisseau n'est pas sensible, on y peut suppléer par la surface de l'eau tranquille, ou d'un miroir forcé de se tenir horizontal. On regarde directement l'image de l'objet sur cette surface par réflexion, & on y amène par l'alidade le même objet. La jonction donne le double de la hauteur, l'objet étant déprimé au dessous de l'horizon dans ce miroir autant qu'il est élevé au dessus. Cette observation est indépendante de la dépression de l'horizon visible.

101. Avant d'employer cet instrument il faut bien s'assurer de la bonté de sa construction, qui consiste dans la position des miroirs, dans la concentricité de l'arc du limbe avec l'axe de la

con-

conversion de l'alidade, dans la valeur du total de 90°, & dans l'exactitude des ses divisions, & du nonius. Dans les traités sur cet instrument il y a des règles particulières pour tout cet examen. Il faut aussi qu'un Marin s'exerce beaucoup à les bien manier, sur-tout pour placer l'instrument dans le plan de l'œil, & des objets sans grande perte de temps, comme aussi pour toute espèce d'observations.

102. Il ne nous reste à présent qu'à dire deux mots sur les compas de variation & de route. C'est assez de les voir pour les connoître. Les compas de route est une simple boussole, qui donne tous les vents, quand on a la correction, qui répond à la declinaison de l'aimant. Elle n'a par elle-même aucun rapport avec l'Astronomie. Le premier a un cercle horizontal divisé en degrés, une aiguille aimantée dans son centre, une alidade horizontale mobile autour du centre même avec les pinnules ou dioptres, qu'on élève verticalement. On tourne l'instrument de manière, que l'aiguille aille à zero de la division. On tourne l'alidade vers l'objet, à l'aide de ces pinnules. L'alidade même marque dans le cercle l'azimut fautif qui comparé à l'azimut vrai déduit d'une observation astronomique, donne la variation pour laquelle on corrige l'indication de la boussole.

TABLE SOMMAIRE.

§. I.

Des astres & de leurs mouvements apparents.

1. Trois espèces d'astres, fixes, planètes, comètes: nombre immense des fixes: position mutuelle constante: distance immense: lumière propre: grandeur réelle inconnue: diamètre apparent nul: grandeur apparente provenante de l'aberration des rayons dans l'œil.

2. Différences de ces grandeurs, première, seconde &c. . . . sixième: télescopiques: cause de leur scintillation.

3. Sur-

3. Surface céleste immense imaginée : constellations idéales : planisphères de Vaugondi : nouveau globe céleste excellent de M. de La-Lande : nouvelle constellation *le Messier* : signes du zodiaque : noms des pôles arctique & antarctique.

4. Planètes : origine de ce nom : sept du premier ordre y comptant la terre (*), dix secondaires : la lune satellite de la terre ; quatre satellites de Jupiter, cinq de Saturne avec l' anneau : la lumière du soleil propre : des autres solaire : raison qui le prouve.

5. Comètes : *leur nombre très-grand* : orbites de *63* reconnoissables (**) : *temps périodiques* au *moins* de deux connus : noyau *blanchâtre : queue : lumière solaire : changement* de position qui *les distingue des fixes nébuleuses*.

6. Mouvement commun diurne : pôles : équateur : hémisphères boréal & austral : ce mouvement ne change pas par lui-même la position mutuelle : il vient d' un mouvement de la terre sur son axe passant par ses pôles.

7. Réfraction ; parallaxe diurne : leur origine, leur changement : leurs effets contraires : la première égale pour tous les astres : la seconde moindre *dans les plus éloignés* : dans la lune jusqu' à un peu au-de-là d' *un degré*, *dans les autres planètes* très-petite : dans les fixes *sensiblement* nulle : aberration de la lumière : petit mouvement apparent, qui en résulte.

8. Grand mouvement, mais très-lent commun à tous les astres autour de l' axe de l' écliptique appellé précession des équinoxes.

9. Petit mouvement commun appellé nutation de l' axe : les mouvements des fixes plus remarquables au nombre de quatre, diurne, précession, aberration, nutation.

10. Deux autres petits mouvements apparents, & quelque mouvement particulier réel, qui paroît petit par la distance énorme.

11. Mouvements apparents particuliers aux planètes : annuel régulier dans le soleil sur l' écliptique : évagation des autres planètes par le zodiaque : orbite de la lune inclinée : les nœuds : temps périodique : temps synodique : phases : syzigies.

12.

(*) Huitième découverte l'an 1781.

(**) Avec plusieurs autres découvertes après l'an 1775.

12. Origine des phases : la moitié de sa surface toujours éclairée.

13. Changement de son orbite : irrégularité de ses mouvements : causes des éclipses du soleil & de la lune.

14. Mouvement des autres planètes : le plus ordinaire vers l' orient : rétrogradation, & station : Vénus & Mercure planètes inférieures : leurs éloignements apparents du soleil limités : opposition des trois autres : temps de rétrogradation : Mercure & Vénus sous le disque du soleil : irrégularités du mouvement apparent des planètes par la combinaison de leur mouvement vrai avec le vrai de la terre.

15. Taches du soleil : son mouvement sur son axe : le même observé ou supposé dans les autres planètes.

16. Grande diversité dans les apparences & mouvements des comètes : liberté par tout le ciel : direction en tout sens : la queue opposée au soleil : quelquefois cachée par la tête : irrégularité apparente par la combinaison du mouvement réel de la terre.

17. Effet de la propagation successive de la lumière pour les planètes : il corrige dans la lune & les objets terrestres l' effet de l' aberration.

§. II.

De la Sphère armillaire & du globe céleste.

18. Deux surfaces, immobile & mobile. La terre au centre sensiblement sphérique : quantité de sa petite compression.

19. Origine du nom armillaire : dix cercles, six grands, quatre plus petits : leurs noms.

20. Horizon rationnel, physique, visuel, déprimé à cause de l' élévation de l' œil.

21. Zénith & Nadir : division en degrés : les vents, leur nombre & leurs noms.

22. Méridien : origine du nom : sa position : ses pôles.

23. L' équateur : deux, un mobile, un autre imaginé sur la surface immobile : ses pôles.

24. L' écliptique : son inclinaison à l' équateur un peu variable :

ble : deux sections avec l' équateur : commencement de la numération dans elle & dans l' équateur à la section du printemps vers l' orient : son éloignement de l' équateur des deux côtés.

25. Temps des équinoxes : leurs origines & celle des solstices : signes ascendants, & signes descendants : quatre points plus remarquables, 2 équinoxiaux & 2 solsticiaux : mouvement diurne du soleil spiral : de-là une correction à ses hauteurs correspondantes.

26. Rétrogradation du point équinoxial : origine de la précession des équinoxes.

27. *Distinction du zodiaque en rationnel & visible : le second avancé d' un signe sur le premier :* pôles de l' écliptique : leur position : effet du mouvement de la précession : *étoile polaire*, qui ne *le* sera plus après plusieurs siècles.

28. Colures : un des équinoxes ; l' autre des solstices qui passe par les pôles de l' écliptique.

29. Tropiques : leur position : origine du nom : l' un du cancer, l' autre du capricorne.

30. Polaires : origine du nom & position.

31. Autres cercles qu' on *imagine* : dans la surface immobile, les horaires, *les verticaux*, *les almucantarats* : dans *la* mobile, les cercles de *déclinaison*, *de latitude*, *les parallèles à l'* équateur, *les parallèles à l' écliptique*.

32. Position des horaires : de quinze en quinze degrés pour *les* heures entières : angle horaire dans les pôles : conversion du temps en parties de l' équateur, & viceversa : l' heure déterminée par l' angle horaire tiré de la hauteur du soleil.

33. Petit cercle au pôle avec l' index pour marquer les heures qui répondent aux parties de la révolution diurne : temps du soleil plus long que celui des fixes : pourquoi : & de combien.

34. Inégalité des jours solaires causée par l' inégalité de leur excès sur la révolution des fixes : trois raisons de cette inégalité : distinction du temps solaire en moyen & vrai : soleil fictif, qui par un mouvement égal fait le temps moyen : équation du temps tantôt additive, tantôt soustractive : son usage dans toute l' Astronomie.

 35. La

35. La différence entre le temps vrai & le temps moyen nécessaire sur la mer, quand on cherche l' heure par la hauteur d' une fixe : usage général dans l' Astronomie de la distinction du mouvement vrai & moyen : manière de s' en servir : embarras dans le calcul de la lune par le trop grand nombre d' équations.

36. Verticaux qui déterminent les azimuts : ce que sont les azimuts : hauteur & distance au zénith dans eux : ce que c' est que l'amplitude : la hauteur diminuée par la parallaxe, augmentée par la réfraction : petit dérangement de l' amplitude causé par la réfraction, remarquable pour la méthode de déterminer la déclinaison de l'aimant appellée par les Marins, variation du compas.

37. Hauteur du pôle dans le méridien : premier vertical, qui lui est perpendiculaire : hauteur dans les verticaux employée pour trouver l' heure : dans le méridien pour la latitude du pays : maximum & minimum de la hauteur dans le méridien : culmination : la hauteur inutile près du méridien pour avoir l' heure : la plus utile vers le premier vertical.

38. Une bonne table des réfractions nécessaire à un Marin : doutes qu' on a encore sur sa quantité moyenne, & son changement correlatif au baromètre & thermomètre : instrument azimutal & vertical qui les donneroit avec toute la facilité & sureté : son utilité très-grande dans toute l' Astronomie.

39. Les almucantarats : ce qu' ils sont : un d' eux cercle de crépuscules à dix huit degrés au-dessous de l' horizon : la différence de la durée des crépuscules.

40. Cercles de la sphère mobile : leur usage pour déterminer la position des astres : la longitude & la latitude par rapport à l' écliptique : l' ascension droite & la déclinaison par rapport à l' équateur. Nature & relation mutuelle de ces quatre positions : les deux dernières les plus essentielles pour un Marin.

41. Usage du méridien de la sphère armillaire pour avoir la déclinaison du soleil : mouvement diurne fait dans les parallèles à l' équateur : celui de la précession des équinoxes dans les parallèles à l' écliptique : les arcs nocturnes & diurnes dans les premiers.

42. Les tropiques & les polaires parallèles à l' équateur.

Zones

zones déterminées par eux appartenantes plus au globe terrestre, une *torride*, deux *tempérées*, & deux *glaciales*.

43. Deux cercles parallèles à l'équateur, qui déterminent les astres toujours visibles, & ceux qui sont toujours invisibles.

44. Cercles du globe terrestre, équateur avec ses pôles & ses parallèles, les tropiques, les parallèles, les zones, le méridien : premier méridien : longitude & latitude terrestres par rapport à l'équateur : antipodes.

45. Positions de la *sphère droite*, parallèle & oblique : phénomènes *de la sphère droite : on y voit tous les jours tout le ciel : on y a toujours une espèce d'équinoxe*.

46. Sphère parallèle : ses phénomènes : on y voit toujours la même moitié du ciel : jour & nuit de *six mois* : *deux crépuscu*les de 50 jours chacun.

47. Sphère inclinée : ses phénomènes : élévation d'un pôle, dépression de l'autre : latitude par-tout égale à la hauteur du pôle, & à *la* distance du zénith à l'équateur : manière de la trouver par la hauteur méridienne d'un astre.

48. L'égalité générale des *jours* & des nuits dans les équinoxes : inégalité des arcs diurnes & nocturnes hors de l'équateur.

49. *Inégalité des jours & nuits* d'autant plus grande qu'on s'éloigne de l'équateur : *les jours les plus longs & les plus courts dans les solstices* : jour continuel de plusieurs jours au de-là du *cercle polaire* : la même chose pour la nuit : climats déterminés par *la durée du jour* le plus *long* : trente par hémisphère.

50. Cause générale de la différence de la chaleur par rapport au climat, & à la différence des saisons : notre avantage sur l'hémisphère austral : excéptions tirées des constitutions locales.

51. Cercles du globe céleste : équateur, écliptique, tropiques, polaires, colures, cercles de déclinaison, & de latitude, parallèles à l'écliptique, & à l'équateur : méridien, & horizon : figures des *constellations* avec leurs fixes : petite correction pour la précession des équinoxes, & pour le changement de l'équateur : solution des problêmes par son usage faite en gros.

52. Plusieurs de ces problêmes : méthode pour trouver l'ascen-

sion droite, & la déclinaison dans le globe céleste, & sur le terrestre la longitude, & la latitude des lieux : pour voir quelles sont les fixes toujours, ou jamais visibles : l' amplitude des autres, l' arc demi-diurne, demi-nocturne, le temps du lever, & du coucher du soleil, du lever, de l' arrivée au méridien, du coucher des fixes : jours des mois, qui répondent au degré de l' écliptique pour le soleil : usage du petit cercle au pôle pour les heures.

53. Origine de l' année bissextile : réforme du calendrier par Grégoire XIII : différence du vieux au nouveau style.

§. III.

Des mouvements vrais des astres, & de leurs causes physiques.

54. GRANDE étendue de cet objet : il n' est pas nécessaire pour un Marin : il est bon d' en avoir une idée.

55. Première idée du mouvement véritable diurne des astres ; couches des planètes emportées par le premier mobile : leur mouvement propre contraire : cercle excentrique : ligne des apsides, périgée, apogée : anomalies vraie & moyenne.

56. Épycicle ajouté : systême de Ptolomée : phénomènes contraires aux hypothèses : multiplication des cercles : bon mot du Roi Alphonse sur la complication des hypothèses.

57. Vrai systême reconnu par plusieurs des Anciens : du mouvement diurne & annuel de la terre accompagnée de la lune : orbites des planètes autour du soleil : systême de Copernic : terre immobile : la lune & le soleil autour d' elle, les orbites des cinq autres planètes autour du soleil transportées avec lui.

58. Les deux systêmes équivalents pour expliquer les phénomènes, la propagation successive de la lumière à part : celui de Tycho, insoutenable si l' on n' adopte une hypothèse possible, mais infiniment improbable.

59. Tourbillons des Descartes arbitraires & contraires aux causes physiques démontrés faux par la liberté du mouvement des co-

comètes : gravité de Newton conforme à tous les phénomènes : sa *théorie* occasionnée par la découverte de Kepler.

60. Découvertes précédentes sur le mouvement moyen autour d'un point placé au de-là du centre de l'excentrique : découverte de Kepler de l'orbite de Mars elliptique avec le soleil dans un foyer, transportée aux autres planètes.

61. Seconde loi de Kepler, les aires décrites par le rayon vecteur proportionnelles au temps : ses idées sur les causes physiques très-mauvaises.

62. *Troisième loi de Kepler, le quarré des temps comme les cubes de distances.*

63. Découverte de Newton, que *toutes ses loix sont* une suite nécessaire d'une seule loi de *gravité* : *les comètes assujetties à* cette loi, qui est réciproque du quarré des distances : *la* même loi trouvée générale & mutuelle pour toutes les parties de la matière : grande quantité de phénomènes déterminés en détail par son moyen.

64. Progrès que les grands Géomètres ont faits à l'aide de cette clef du ciel pour *calculer mille petites inégalités* : irrégularités de la *lune réduites en des bonnes tables à l'aide* de la gravité générale.

65. Vrai système du *monde : rien d'immobile, si* ce n'est le centre commun de gravité, point imaginaire : l'immobilité du *soleil* imaginée pour la facilité du calcul : son mouvement autour de son *axe*, mouvement des *planètes* autour de lui : inclinaison des orbites : *ligne des nœuds*, ligne des apsides, aphélie, périhélie, anomalies *vraie* & *moyenne*, *équation* : petit changement dans les nœuds & aphélies : mouvement des comètes & des satellites analogue.

66. Orbite autour du soleil décrite par le centre commun de gravité de *la* terre & de la *lune* : changements dans l'orbite de la *lune* : *complication* de ses *inégalités*.

67. Sept *éléments* pour chaque planète : indication d'une méthode pour les *déterminer*, pour en tirer les lieux héliocentriques, & passer de-là aux géocentriques, pour calculer les mouve-

vements & les éclipses des satellites & des fixes : calcul déjà fait pour les Marins dans la Connoissance des temps & le *nautical almanach* .

68. Distance & grandeur respective & absolue des planètes en gros .

§. IV.

Du rapport de l' Astronomie avec la Marine .

69. TROIS objets du rapport , direction de la route , latitude , & longitude géographique du vaisseau .

70. Ancienne méthode grossière pour diriger la route : avantage de la boussole : nécessité de sa correction par le moyen de l' Astronomie à cause de la déclinaison de l' aimant inconstante .

71. Compas de route , & compas de variation ; usage de tous les deux , du second pour trouver la déclinaison de l' aimant , du premier pour diriger le vaisseau .

72. Méthode pour avoir la déclinaison cherchée à l' aide de l' amplitude calculée par un triangle sphérique : correction de l' effet de la réfraction : sa petitesse : autre méthode pour l' azimut tiré d' une hauteur observée à l' aide d' un autre triangle sphérique : corrections de la hauteur .

73. Ce qu' emprunte ce premier objet de l' Astronomie pour la théorie , & pour la pratique : les éléments des opérations dans la Connoissance des temps : diamètre du soleil nécessaire & pourquoi .

74. Second objet , la latitude : méthode la plus simple pour la trouver par l' observation de la hauteur méridienne d' un astre connu : manière de s' en servir dans différents cas , soit vers le sud , soit vers le nord : petites corrections de la déclinaison des fixes nécessaires pour l' exactitude .

75. Troisième objet , la longitude : ancienne méthode par l' estime : son insuffisance , & pourquoi .

76. Effort inutile pour trouver la longitude par la variation du

du compas : son inconstance irrégulière cause de l' inutilité de la méthode.

77. Méthode, qui seule peut servir, de la différence de l' heure du vaisseau à l' heure d' un lieu connu : deux méthodes pour la seconde, la montre marine, ou un phénomène céleste.

78. Méthode pour trouver l' heure du vaisseau par les hauteurs correspondantes, ou par une seule hauteur d' un astre connu : précautions pour *la* première méthode, triangle sphérique pour la seconde.

79. De la première *méthode* pour l' heure d' un pays connu par *le* moyen d' une montre : *précautions* nécessaires : traité excellent *sur tout* cela du Chev.r Florieu.

80. De la seconde méthode : phénomènes à observer, quelques éclipses, & la position de la lune : exclusion des autres éclipses, à l' exception de celle du premier satellite de Jupiter ; leur rareté, & difficulté qui ont rendu la chaise marine inutile.

81. Les mouvements des astres inutiles par leur lenteur à l' exception de celui de la lune, qui employe deux seules minutes de temps pour chaque minute de degré. Les éclipses du soleil & des fixes faites par *elle*, trop rares & trop difficiles à calculer : ses distances *au soleil & aux fixes* seul moyen qui reste.

82. Deux grandes *difficultés du côté de la pratique & de la* théorie : la première ôtée par l' octant à réflexion, la seconde par les distances calculées de trois en trois heures & imprimée dans *la* Connoissance des temps.

83. Difficultés qu' il falloit surmonter pour faire le calcul des lieux de la lune : ce qu' on emprunte de l' Astronomie pour cet objet, & pour réduire la distance apparente, en *la* corrigeant par la réfraction & la parallaxe.

84. Ces deux éléments dépendants des hauteurs : méthode de *les* trouver *par la théorie pour le* moment de l' observation très-difficile : *meilleur parti de l'* observer immédiatement : méthode de faire *la* correction 1°. par deux triangles sphériques ; 2°. par des formules trigonométriques ; 3°. par le grand Volume des tables imprimé exprès à Londres.

85. Ma-

85. *Manière de trouver l' heure de Paris d' après la distance, corrigée par la méthode des différences proportionnelles.*

§. V.

Des instruments.

86. Trois espèces d' instruments astronomiques, pour aider la vue, mesurer le temps, mesurer les angles.

87. Pour le premier objet les télescopes & les lunettes, surtout les acromatiques : nécessité d' en bien connoître la nature : détail de vérification des instruments impraticable dans un abrégé aussi court, à voir dans l' Astronomie de M. de La-Lande.

88. Pour le temps, une montre, une horloge ou une pendule : sur la terre les pendules à correction de la chaleur, sur la mer les montres marines.

89. Instrument des passages : position de ses axes : méthode indiquée pour la vérifier : sa grande utilité.

90. Son demi-cercle pour les distances au zénith appartenant à la troisème espèce.

91. Quart de cercle mural : sa position : sa destination pour le passage au méridien, & les hauteurs méridiennes : utilité beaucoup plus grande de l' instrument tout à-la-fois azimutal & vertical.

92. Quart de cercle mobile : deux manières de l' employer ayant la lunette attachée à son côté, ou mobile sur une alidade : sextant : secteurs de différentes espèces.

93. Machine parallatique avec deux index pour la déclinaison & l' ascension droite : son usage pour trouver les astres, les suivre, & les comparer.

94. Différentes espèces de micromètres avec des lames, ou des fils fixes ou mobiles : micromètre objectif : sa construction, & son usage.

95. Impossibilité de se servir des autres dans le vaisseau : difficulté d' y employer ce dernier : quart de cercle, pendules, télescopes utiles aux Marins pour déterminer la longitude & latitude en

en débarquant : instrument des passages portatif très-utile pour les longitudes du lieu du débarquement.

96. Octant à réflexion utile & nécessaire pour observer sur mer : sa description.

97. Son usage pour les distances angulaires, & pour les hauteurs : deux manières de s' en servir par devant & par derrière.

98. Méthode de s' en servir pour les distances : verres noircis pour le soleil.

99. Méthode pour les hauteurs : ce qu' on fait quand l'horizon est caché par devant : avantage d' observer la hauteur par devant & par derrière *à-la-fois*.

100. Supplément de l' horizon caché des deux côtés : horizon artificiel, de la surface de l' eau, ou d' un miroir bien suspendu.

101. Nécessité de la vérification de l' instrument par des méthodes publiées, & de l' exercice pour le manier.

102. Compas de variation & de route : ce qu' ils sont & leurs usages.

OPUSCULUM V.

METHODUS DETERMINANDI ACCURATISSIME ALTITUDINEM POLI OPE GNOMONIS SUPPLENDO INSTRUMENTA AD ID OPPORTUNA, UBI DESINT.

1. HANC methodum ego adhibui anno 1773 Venetiis in exigua specula domus Jesuiticæ, ubi tum diversabar ut hospes, paullo ante Societatis suppressionem. Carebat ea specula instrumentis idoneis: habebat nonnulla telescopia dioptrica non acromatica, quadrantem mobilem metallicum pedum circiter trium male divisum, horologium oscillatorium mediocre, & lineam meridianam tantummodo filarem, quæ per altitudines correspondentes captas etiam ope quadrantis male divisi, & horologii mediocris duci potest satis accurata, & si ducta sit, ut erat ibi, ad trutinam revocari, quod ea occasione diligenter est præstitum. Transmittebatur solis radius per foramen excavatum in lamina metallica de more satis firmiter collocata: filum cum ponduscuIo demitti poterat in pedem gnomonis parum admodum distantem a pariete obverso ad meridiem; sed ea lamina loco positionis horizontalis posita fuerat cum inclinatione graduum 45, quæ ibi est proxime altitudo poli: id nonnulli perperam efficiunt, ut radius progressus e centro disci solaris sit perpendicularis plano laminæ, quod ipsum non obtinetur, nisi pro æquinoctiis, & nullius est usus pro determinando commodius appulsu imaginis solaris ad lineam meridianam, reddit autem multo magis complicatam determinationem tangentium, per quas debent determinari distantiæ a zenith puncti summi, & imi disci solaris, ob diversam distantiam punctorum extremorum foraminis a plano horizontali, in quo eæ tangentes debent determinari in directione lineæ meridianæ transeuntis per pedem gnomonis. Id ibi fuerat præstitum, & habenda fuit ratio ejus inclinationis, uti est habita, quod patebit inferius.

2. Sit in fig. 1 (Tab. VIII) L'L lamina inclinata ad angulum semirectum cum foramine, cujus punctum infimum A, summum A'. Radius digressus e puncto supremo disci solaris deveniat per rectam SA ad lineam meridianam BM in F, & radius digressus ex ipsius puncto infimo per rectam S'A' ad eandem lineam in F': sint autem rectæ AB, A'B' perpendiculares eidem lineæ meridianæ. Patet, angulum BAF, cujus tangens est $= \frac{BF}{AB}$, fore æqualem distantiæ apparenti puncti supremi ejus disci a zenith, & angulum B'A'F', cujus tangens est $= \frac{B'F'}{A'B'}$, distantiæ puncti infimi, quorum angulorum semisumma exhibebit distantiam apparentem centri ab ipso zenith. Hæc correcta a refractione, quæ ipsum elevat, & a parallaxi, quæ ipsum deprimit, exhibebit distantiam veram: adjectâ huic declinatione, si ea fuerit borealis, vel detractâ, si fuerit australis, obtinetur distantia ejusdem zenith ab æquatore, quæ est æqualis quæsitæ altitudini poli: meæ observationes institutæ sunt mense Aprili, quo tempore declinatio est borealis, quæ idcirco addenda fuit distantiæ centri a zenith. Ostendendum est, quo pacto definitæ fuerint determinatione admodum accuratâ distantiæ verticales AB, A'B', & rectæ horizontales BF, B'F', ad habendos satis exactos angulos BAF, B'A'F', quibus habitis obtinetur mensura quæsita, cum refractio, parallaxis, declinatio, aliunde innotescant, quæ singula hic producam.

3. Prima difficultas occurrebat in determinatione lineæ meridianæ BM. Ea ibi non aderat, ut monui, nisi filaris, capitibus affixis ad oppositos parietes, & pavimento nec æquali, nec satis firmo ad eam habendam perpetuam: filaris potest exhibere admodum accurate momentum meridiei, sed ejus unius ope haberi non possunt tangentes distantiarum a zenith. Supplevi tigillo, cujus faciem superiorem curavi complanandam, quantum per communes fabros lignarios plana superficies poterat obtineri: altitudo laminæ habentis foramen erat elevata supra pavimentum paullo minus pedibus Parisiensibus duodecim, distantia autem radii in plano horizon-

rizontali a pede gnomonis, sole jam multo minus remoto a zenith quam per gradus 45 ob declinationem Aprili mense borealem, nec exiguam, debebat evadere brevior ea altitudine: hinc satis fuisset ad habendam eam distantiam horizontalem tigillum brevius: sed curavi longius, ut posset ejus ope determinari ipsa altitudo laminæ comparanda cum distantia radii horizontali ad habendas tangentes quæsitas. Quo pacto id tigillum fuerit præparatum, & collocatum, apparebit utcumque in fig. 2, quæ tamen non exhibet nisi partem totius longitudinis cum dimensionibus multo majoribus quam in fig. 1, ut omnia melius exprimi, & explicari possint.

4. CDD'C' est ejus superficies superior horizontalis, rectæ EE', E'F pertinent ad superficiem inferiorem impositam pavimento: ea autem est brevior, secto per sectionem obliquam FH ejus capite, quod debebat collocari versus meridiem sub ipsa lamina LL' habente foramen, cujus pars infima limbi est A: habebatur in eodem capite apertura verticalis, cujus partem exsectam e superficie superiore exhibet IKK'I', per quam transire posset filum AB sustinens ponduscululum P, quod ibidem notatur punctulis, cum lateat infra superficiem C'I'K' post ipsam: sed id ipsum apparet melius in fig. 3, ubi habetur etiam vasculum Q, in quod plenum aqua, & insistens pavimento debuit immitti id ponduscululum ad operationes, quæ jam proponentur, ut nimirum remaneret quietum, impeditis ab ipsius aquæ resistentia exiguis oscillationibus, quas aliter minima etiam aeris agitatio induceret. Omissa est delineatio vasculi in fig. 2, cum ibi id etiam latere debeat post partem solidam tigilli K'I'C'H.

5. Tigillum ipsum collocatum est in directione lineæ meridianæ filaris, cujus positio explorata est per altitudines correspondentes, & redacta ad directionem accuratam: filum cum ponduscululo demissum e centro foraminis (*) erat parum distans a pariete

(*) Figura exprimit aliud, quod postea demissum est e puncto infimo A foraminis ipsius ad alium usum, ut patebit inferius. Ad hunc usum, cum non liceret accedere ad partem superiorem laminæ positæ sub tecto prope ipsius per-

riete meridionali, cui erat affixus axiculus ferreus proxime horizontalis, & perpendicularis lineæ meridianæ proxime cognitæ, & huic advolutum filum meridianæ filaris ita, ut moveri posset non nihil in latus, & adduci ad contactum illius alterius fili pendentis e centro foraminis, dum alterum ejus caput eodem pacto erat advolutum alteri axiculo affixo parieti opposito in directione lineæ meridianæ ipsius. Ope eorum binorum motuum fili horizontalis in latus facile erat præbere ipsi directionem accuratam lineæ meridianæ radentis filum verticale. Nam ope altitudinum correspondentium facile erat invenire in ipsa superficie tigilli punctum, per quod debebat transire linea meridiana accurata. Satis enim erat applicare ipsi superficiei chartam cum pluribus lineis inter se parallelis, & collocatis in directione proxime parallela lineæ meridianæ utcumque cognitæ, tum notare momenta appulsuum limbi utriusque imaginis solaris ad singulas ejusmodi lineas indicata ab horologio: e momentis intermediis inter binos appulsus eorundem limborum innotescit momentum appulsus centri imaginis ipsius ad ipsas lineas, adeoque cum ex altitudinibus correspondentibus innotescat momentum meridiei, innotescit, inter quas binas lineas ex iis parallelis consequenter positas cadebat centrum imaginis solaris, & ex intervallis momentorum temporis jam notatorum innotescit facile distantia ejusdem centri ab utravis ex iis lineis, ut a præcedente. Ea est quarta proportionalis post intervallum temporis elapsi inter appulsus centri ipsius ad illas binas rectas, intervallum inter momenta meridiei, & appulsus ad eam lineam, ac intervallum earundem linearum assumptum in scala quacumque particularum exiguarum.

6. Ea methodo uti soleo, ubi ducenda sit meridiana linea intra conclave, intra quod radius admitti debet transmissus per exi-

guum

aperturam parum admodum distantem ab ejus margine, adhibitus circellus e charta crassa (*carton*) proxime æqualis ipsi foramini, & agglutinatus superne ampliori frusto ejusdem chartæ crassæ: per illius centrum, & hoc frustum, traductum est filum tenue terminatum nodo, quo id retineretur: frustum ipsum applicatum est laminæ ita, ut circellus prominens aptaretur foramini, ac affixum eidem laminæ ope ceræ: ita ipsum filum prodibat inferne e centro foraminis, & sustinebat pondusculum.

guum foramen de more. Adhiberi possunt appulsus ad binas quasvis e lineis parallelis ductis in charta, nam exiguo tempore, quo imago solis transit per omnes illas lineas, motus imaginis solaris est ad sensum æquabilis, & perpendicularis directioni lineæ meridianæ: consensus plurium punctorum ita determinatorum confirmat determinationem ipsam: soleo autem ducere illas rectas in charta ad distantias inter se æquales, ut, inventâ distantiâ extremarum, facilius innotescant distantiæ inter binas quascumque: ad notandum autem punctum distantiæ centri a linea quavis exhibitæ ab illa quarta proportionali inventa, satis est nosse proxime, utut non accurate, punctum, per quod transit centrum imaginis per eam lineam, quod facile fit, notando punctum, in quo ipsam eadem imago contingit, quod est ad sensum idem pro utroque appulsu: id quidem nonnisi minus accurata æstimatione determinatur per immediatam observationem in contactu, in quo arcus aliquis apparet congruens cum ea ipsa linea: facile esset obtinere determinationem accuratiorem, notatis binis punctis cujusvis chordæ ellipseos exhibentis imaginem solarem sectam in ejus progressu ab illa recta linea; sed nullus error sensibilis committi potest in directione lineæ meridianæ ductæ per punctum determinatum in distantia perpendiculari ipsi lineæ assumpta a puncto contactus imaginis notato per illam utut minus accuratam æstimationem. Positio lineæ meridianæ eo pacto determinatæ facile deinde exploratur per altitudines correspondentes sequentium dierum. Quotiescumque ea methodo sum usus ad determinandam lineam meridianam, inveni semper diebus sequentibus summum consensum inter momentum appulsus centri imaginis ad ipsam deductum ex appulsibus binorum limborum, & momentum meridiei rite deductum ex altitudinibus correspondentibus.

7. Non erat necessaria in casu præsenti tanta accuratio pro determinanda positione lineæ meridianæ in superficie plana *tigilli*: ea adhibenda ibi erat tantummodo ad habendas illas distantias BF, B'F' figuræ 1, quæ exiguo intervallo temporis ante, & post meridiem non mutantur mutatione, quæ sub sensum cadat: adhuc tamen inter schedas tum conscriptas invenio, tribus diversis

die-

diebus captas esse altitudines correspondentes, & meridianam filarem eo pacto determinatam inventam esse accuratam sine dissensu ne unius quidem secundi. Videndum, quid præstitum fuerit ad habendas per accuratissimam determinationem illas ipsas rectas BF, B'F' figuræ ejusdem.

8. In primis demissum est e margine infimo foraminis filum ABP figuræ 2, cum pondusculo P immisso in vasculum Q figuræ 3. Ad id obtinendum, frusto fasciolæ exsectæ e charta crassiore habentis latitudinem minorem diametro foraminis advolutum, & alligatum est illud filum, ac id frustum transmissum per ipsum foramen, & ope acus ipsum adducentis ad positionem transversam, & impellentis versus partem laminæ inferiorem adductum est punctum ejus lateris, ex quo filum pendebat, ad marginem imum foraminis ipsius, ubi cum is margo habeat directionem tangentis perpendicularis plano meridiani, nihil obest, si filum exeat e puncto marginis, quod sit non accurate, sed tantum proxime infimum.

9. E crassiore charta excidi formam, quam exhibet figura 3 in CDEFOG, cujus angulus CDE est rectus, recta GO parallela rectæ CD, rectæ CG, ED perpendiculares utrique, angulus GOF obtusus, & in productione lateris GO prope angulum O impressi aciculâ tenui punctum I. Hanc chartam imposui superficiei tigilli figuræ 2 CDD'C' ita, ut positio lateris ED ipsius chartæ esset parallela ductui lineæ meridianæ notatæ in eadem superficie, quam positionem notabat latus ED figuræ 3 congruens cum exiguo tractu rectæ parallelæ eidem meridianæ ducto in eadem tigilli superficie: tum, quiescente filo AP figuræ 2, adduxi sensim latus GO figuræ 3 motu parallelo indicato ab illo eodem tractu usque ad contactum cum filo AB figuræ 2 in B factum prope ipsum angulum O. Effeceram angulum GOF figuræ 3 obtusum, ne, dum admoveretur latus GO ad filum, exigua inclinatione chartæ latus OF in ipsum incurreret. Distantia fili a muro exigua reddebat incommodam determinationem contactus lateris GO: ad reddendum ipsum evidentiorem adhibui tenuem candelam RS, cujus flammula S projiciebat umbram BH satis sensibilem in superficiem char-

chartæ subobscuram ob viciniam anguli efformati a pavimento, & muro. Ante contactum lateris chartæ cum filo apparebat evidentissime distantia ipsius fili a sua umbra in B, qua evanescente in ipso contactu facto per accessum lentissimum sine motu impresso ipsi filo, determinabatur cum summa evidentia positio, quam in ipso contactu habebat charta: operatione repetita pluribus vicibus, & notata ea positione, ipsa inventa est semper accuratissime eadem. In ea positione affixa est charta ipsa superficiei tigilli ope ceræ.

10. Paratus fuerat circinus ejus speciei, cui dant in Italia nomen circini fidelis, adnexis firmiter regulæ ligneæ binis acubus ipsi perpendicularibus ita, ut earum cuspides distarent a se invicem accuratissime per trecentas particulas, quas habent in meo proportionis circino binæ lineæ partium æqualium: immissa cuspide alterius e binis acubus circini fidelis in tenue illud foramen I chartæ crassioris figuræ 3 applicatæ ad superficiem tigilli figuræ 2, & ipsi adnexæ, impressi cuspide alterius punctum notatum numero 1 in eadem superficie tigilli ad distantiam a linea meridiana ducta in ea ipsa superficie æqualem ad sensum exiguæ distantiæ punctorum I, B figuræ 3, *cujus punctum B tum erat idem ac id punctum figuræ 2: tum translata cuspide acus primæ in punctum 1, impressi eodem pacto per cuspidem acus secundæ punctum 2 in distantia* parili a linea meridiana eadem, & consequenter transtuli idem intervallum a puncto 2 ad 3, ab hoc ad 4, & ita porro usque ad numerum 20, quorum *intervallorum figura 2* non exprimit nisi *6*, ne latitudo tabulæ figurarum nimis excrescat. Porro acubus satis firmiter adnexis regulæ, illa intervalla obveniunt ita accurate æqualia, ut nulla possit occurrere inæqualitas, quæ non sensum omnem prorsus effugiat. Prima acus applicata ad illud tenue foramen excavatum a secunda ita cadit in id ipsum, ut secunda succedat accuratissime in locum primæ. Deflexi tantillum regulâ in prima positione ita, ut prima cuspide immissa in punctum I, impresso per secundam novo puncto 1 ad latus prioris ipsi proximo, quæ exigua obliquitas non minuit ad sensum intervallum consideratum secundum directionem lineæ

me-

meridianæ, & notatis eodem pacto punctis novis 3, 4, 5, &c. ad latus priorum, oritur nova punctorum series accuratissime respondens priori, quantum per sensus licet deprehendere, ut nullum, ne postremum quidem, procurrat quidquam ultra suum socium seriei prioris, nullum remaneat retro.

11. Ope hujus divisionis habitæ sunt primum accuratione summa elevationes AB, A'B' figuræ 1 sequenti methodo. Paratæ sunt binæ regulæ ligneæ satis crassæ, quas exhibet figura 4 in MN, & OP, longitudinis aliquanto majoris dimidia altitudine AB figuræ 1, quæ altitudo est eadem, ac expressa itidem per AB in fig. 2, sed multo brevior, quam quæ responderet crassitudini, & longitudini tigilli: harum regularum altera est applicata ad alteram eo modo, quem exprimit ipsa figura 4. Basis regulæ inferioris extrema P, quæ debebat imponi superficiei tigilli, complanata erat accurate ita, ut esset perpendicularis longitudini ipsius, adeoque insistens superficiei tigilli congrueret cum ea penitus tota. Regula superior habebat sibi adnexam cuspidem Q exsectam e lamina ferrea. Paratum est etiam exiguum parallelepipedum ligneum, quod exprimitur per AB in fig. 5, quæ itidem exhibet partem paullo longiorem ipsius tigilli: binæ facies ejus parallelepipedi complanatæ sunt cum accuratione summa, altera, quæ debebat imponi superficiei tigilli ejusdem, & cum ea accurate congruere, pro usu, quem mox proponemus, altera, quæ in ea ejus positione debebat habere latus ipsarum commune AB transiens per punctum 1, & perpendiculare lineæ meridianæ, ac respicere numeros sequentes: idcirco etiam in eadem tigilli superficie ducta erat per punctum 1 tenuis recta perpendicularis lineæ meridianæ.

12. Summoto filo figuræ 2, & charta illa crassiore figuræ 3, quæ fuerat adnexa ope ceræ superficiei tigilli, binæ regulæ figuræ 4, faciebus conjunctis ita, ut ambæ simul efficerent altitudinem paullo minorem altitudine puncti A figuræ 2, adductæ sunt ad caput CKK'C' tigilli ita, ut basis ima inferioris inniteretur ejus superficiei hinc, & inde ab apertura IKK'I', in ipso loco, per quem transierat filum, tum superior propulsa sensim sursum

ita, ut ipsarum superficies conjunctæ retinerent contactum accuratum, donec cuspis Q attingeret in A marginem imum foraminis. In ea positione respectiva regularum retento eodem contactu superficierum internarum per validam appressionem alterius regulæ ad alteram, eæ removebantur, & facies externa ejus, quæ fuerat inferior in fig. 4 latens ibi post O, applicabatur ad superficiem tigilli secundum directionem lineæ meridianæ cavendo, ne altera regula per eam excurreret, & curtaretur distantia PQ basis P a cuspide Q: impositum fuerat superficiei tigilli ipsius parallelepipedum AB, ut exhibet figura 5, ejus latere AB transeunte per punctum 1, & congruente cum linea illa recta perpendiculari lineæ meridianæ ducta, ut diximus, per id punctum, & retinebatur firmiter appressum ad ipsam tigilli superficiem, dum regulæ firmiter conjunctæ sensim promovebantur, donec cuspis Q figuræ 4 attingeret faciem verticalem parallelepipedi figuræ 5 erectam supra latus AB. Retentis in ea positione binis regulis conjunctis, parallelepipedum AB transferebatur ad partem oppositam regularum earundem, & adducebatur ad eam basim P regulæ inferioris, quæ in earum positione verticali fuerat horizontalis, & innixa superficiei tigilli, occupante latere basis ipsius parallelepipedi, quod fuerat in AB, positionem contrariam B'A', sed adhuc perpendicularem lineæ meridianæ, & in ipsa tigilli superficie ducebatur tenuis recta linea secundum ipsum latus B'A'.

13. Non exhibet figura 5 nisi solam basim ejus parallelepipedi collocati in secunda positione, ne ipsius elevatio tegat id ipsum latus: posita autem est ibi basis eadem post punctum numeri 8 ob figuram tigilli curtatam, expressâ tantummodo ejus parte, sed inventa est ejus positio post punctum numeri 19, a quo ad punctum numeri 1 habentur particulæ 300×18 = 5400. Hisce particulis addenda erat distantia puncti 19 a lineola B'A', quæ assumpta circino habente cuspides tenues, & translata in lineam partium æqualium ejusdem circini proportionis, ex quo assumptæ fuerant partes 300 pro intervallis punctorum, inventa est partium accurate 190 sine ullo sensibili residuo. Hinc tota distantia puncti 1 a lineola B'A' figuræ 5 evasit partium 5590. Hæc ope-

operatio, *quæ* omnium maxime periculosa esse potest, ne nimirum in *translatione* regularum a positione illa verticali ad horizontalem aliquis exiguus oriatur motus ipsarum respectivus, ac ut *contactus* cuspidis cum imo margine A figuræ 2, & cum parallelepipedo figuræ 5 fiat accuratus sine impulsu, qui positionem respectivam earundem quidquam immutet, indigebat adjutore: habui egregium horum omnium & testem, & adjutorem Andream Comparettum, *cujus* etiam in Tomo I mentionem feci, & qui nunc, dum *hoc* Opusculum e veteribus schedis tum italico idiomate *conscriptis* in ordinem digero, & latinum reddo, in Patavina *Universitate* jam a pluribus annis est Publicus Medicinæ Professor. Pluribus vicibus hæc *potissimum* operatio repetita fuit cum diligentia summa, & semper cum eodem successu sine ullo sensibili discrimine inter distantias inventas, quamvis omnia suo loco dimoverentur, ipsa etiam respectiva positio regularum, adductâ novo *excursu* regulæ superioris per residuam altitudinem inferioris *cuspide illius* ad contactum cum margine foraminis A figuræ 2.

14. Ea est mensura rectæ AB figuræ 1, quæ esset eadem pro A'B', si lamina LL' fuisset collocata in positione horizontali, quæ est omnium maxime idonea, ut supra innui: cum ea habuerit inclinationem ad *horizontem*, oportet concipere in eadem fig. 1 rectam BD æque inclinatam occurrentem rectæ A'B' in D, & determinare particulam B'D addendam rectæ A'D = AB. Ea inclinatio erat, ut initio monui, graduum 45, quam satis est nosse per mensuram non ita multum abludentem a vera: manente enim diametro *foraminis* AA' = BD, mutatio exigua inclinationis mutat exiguas *lineolas* B'D, BB' mutatione exigua respectu ipsarum, adeoque prorsus insensibili: pro utraque præter inclinationem oportet nosse ipsam diametrum AA', cum ad habendas *eas lineolas* ducenda sit BD ipsi æqualis in sinum, & cosinum ejus *inclinationis*: opus est autem utrâque, priore quidem ad complendam mensuram altitudinis A'B', ut diximus, posteriore vero ad habendam rectam B'F' per detractionem lineolæ BB' a linea BF' invenienda inferius, ad quem usum etiam in casu laminæ LL' horizontalis invenienda est eadem diameter AA', cui tum est æ-

qualis *lineola* BB' detrahenda. Ad habendam mensuram accuratam ejus diametri in situ angusto prope parietem insistendo scalæ, nec manus cum circino commode admoveri poterat foramini, nec oculus: applicavi inferne frustum chartæ tenuis ad laminam sub ipsum foramen, ac leviter appressi pulpa digiti: impressus apparuit margo circularis ipsius foraminis, cujus mensuram semper eandem, operatione itidem pluribus vicibus repetita, habui particulas ejusdem circini accuratissime sex itidem sine residuo sensibili, cujus, si quid superfuisset, rationem habuissem, ut etiam superius in mensura distantiæ puncti 1 figuræ 5 a recta B'A', captis per æstimationem partibus decimis unius particulæ: sed utrobique nullum apparuit *sensibile residuum*. Cum *triangulum* (fig. 1) BB'D sit rectangulum isosceles, & $BD^2 = 36$, erit $B'D = BB' = \sqrt{18} = 4,2$, adeoque mensura quæsita $A'B' = 5594,2$.

15. Remanebat habenda mensura accurata rectarum BF, B'F' ad habendas tangentes $\frac{BF}{AB}$, & $\frac{B'F'}{A'B'}$ distantiarum a zenith BAF, B'A'F'. Puncta F, F' exhibita fuissent immediate a binis limbis imaginis solaris in ejus appulsu ad *lineam* meridianam, si superficies tigilli fuisset accuratissime plana, & ejus positio itidem accuratissime *horizontalis*: *applicatio* regulæ mediocris longitudinis ostendebat tractus mediocres ejusdem superficiei esse ad sensum planos, sed erat admodum probabile, haberi aliquam inæqualitatem in longo tractu tot pedum. Collocatum quidem fuerat tigillum ope communium instrumentorum in plano ad *sensum horizontali*, sed inclinatio exigua, insensibilis in tractu exiguo, debebat exigere correctionem aliquam earum linearum in eodem longo tractu. Si pro linea horizontali BM habita fuisset BN inclinata, ad quam advenerint radii AF, A'F' in G, G'; imago solis pro punctis F, F' exhibuisset ea puncta. Hinc si concipiantur rectæ verticales GI, G'I' usque ad horizontalem BM, habenda est ratio lineolarum FI, F'I', quæ erunt auferendæ a rectis BG, B'G', vel ipsis addendæ, prout puncta G, G' fuerint depressa infra rectam horizontalem BM, ut figura exhibet, vel elevata supra ipsam: possunt enim BG, BI, & BG', BI' assumi pro æqualibus inter se.

16.

16. Adhibui ad hanc investigationem eam methodum, quam adhibueram primo loco Mediolani pro examine plani quadrantis muralis, ut exposui in Opusculo II Tomi IV, quæ successu caruerat pro eo usu, ob compagem machinamenti quadrantis ipsius non satis firmam, variatione, mutatis fulcrorum locis, inductâ a nimio pondere, & cochlearum multitudine: verum eandem ibidem adhibueram cum optimo successu pro perquisitione hujus ipsius generis. In fig. 6 habetur canalis cum aqua, & cymbula L cum filo ferreo LVG ascendente per LV, incurvato in V, & descendente usque ad G prope superficiem tigilli figuræ 7, quod est idem ac in fig. 5. Hìc pro cymbula adhibui tantummodo frustum ligni satis crassum, & excavatum, quod oneravi globulis plumbeis, quibus apte dispositis, & hac illac translatis, facile id reducebatur ad servandum æquilibrium cum longiore illo filo ferreo in latus detorto. Ad continendum autem id cymbulæ genus in directione constanti, & impediendum accessum ad margines canalis oppositos, prope quos superficies aquæ incurvatur, & horizontalem positionem amittit, pro quatuor malis, & regulis horizontalibus suspensis per regulas verticales, quod machinamenti complicatioris genus videre est in tabula I illius ipsius Tomi IV, hìc usus sum methodo multo simpliciore, dispositis nimirum filis ferreis MN, M'N', OP, O'P' horizontalibus, & perpendicularibus longitudini canalis, quorum filorum cuspides proxime accederent ad ejus spondas oppositas.

17. In ipsa fig. 7 habetur is, quam in illo Opusculo appellavi cuneum micrometricum, cujus basis *abcd* est altior quam *efg*, in quo altero extremo is habet crassitudinem perquam exiguam: binæ facies *bcfe* superior, & *adg* inferior, bene complanatæ inclinationem habent mutuam, vi cujus, promotâ inferiore per superficiem tigilli, pervenitur ad contactum cum superficie superiore in G: ibi habetur distantia cuspidis, quæ in toto excursu cymbulæ remanet semper in eodem plano horizontali, a superficie tigilli in diversis ejus punctis, indicata a crassitudine, quam habet ipse cuneus in loco contactus, notata in margine *cf*.

18. Non habebam mecum cuneum illum meum micrometricum me-

metallicum, *cujus descriptionem* exhibui in illo *Opusculo* II Tomi IV: paravi *ligneum*, qui non desinebat in aciem acutam in *ef*, ut nec *ille*, quod in ejusmodi instrumento ligneo est magis necessarium, ne sit nimis fragile: adhuc tamen crassitudo finalis *fg* erat perquam exigua: ne fiderem lateribus prorsus accurate planis, quod non semper facile obtinetur, determinavi crassitudines sequenti pacto. Clauso meo circino proportionis, vidi facies internas latitudinales binorum crurum se accurate contingere, ut debebant, sine ullo intervallo, quod si adfuisset, non poterat latere transpicientem: assumpsi circino habente cuspides admodum acutas intervallum transversale inter duo extrema puncta linearum habentium *divisionem in partes æquales* notata ibi numeris 300, quod translatum in lineas ipsas inveni continere partes easdem accuratissime 18. Assumpsi eodem exiguo circino partes easdem 28, & ita dimovi a se invicem bina crura ejusdem circini proportionis, ut eadem illa puncta notata numeris 300 distarent a se invicem per hoc novum intervallum: *hinc ibi* facies illæ internæ latitudinales in ea apertura ejusdem circini habebant distantiam accuratam partium 10. *Distantiæ* earundem facierum lateralium in *locis respondentibus numeris omnibus* minoribus notatis *secus eas divisiones earundem linearum debebant* evadere accurate *proportionales iisdem numeris* ob *illam accuratam* congruentiam, quam eædem facies latitudinales habuerant clauso eo circino. Eo pacto *habebatur* scala per eas circini ejusdem aperturas indicatas ab iis numeris, quæ *singulas* e partibus *longitudinalibus* earundem linearum subdividebat in *particulas* 30, cum divideret denas in particulas 300. *Sex pollices* pedis Parisiensis, nimirum lineæ 72, continent *tantillo plus* quam 236 eas partes ejus mei circini, nimirum 7080 particulas *ejus* subdivisionis, adeoque singulæ *lineæ* pedis Parisiensis erant eo pacto subdivisæ in particulas fere 100.

19. Eæ *particulæ* reddebantur admodum *sensibiles ope cunei*. Is immissus *in illam* aperturam *ejusdem* circini *proportionis* retentam, adstrictis in ea positione *ejus* cruribus *ita*, ut eam mutare non possent, quod fit admodum facile, inter numeros indicatos

in

in lateribus eorundem crurum retinebatur, ubi ejus crassitudo deveniebat ad numerum illum ipsum particularum, qui notabatur in latere *cf* ejusdem cunei. Ita habitæ sunt in eo crassitudines particularum 50, 60, 70 &c., quarum divisionum figura exigua non exprimit nisi notatas numeris 100, 200, 300. Si facies cunei essent accurate planæ, intervalla divisionum respondentia differentiis numerorum æqualibus deberent esse prorsus æqualia: inveni æqualitatem multo magis accuratam, quam potuissem expectare, in ipsis intervallis majoribus partium 50: intervalla denorum adhuc satis ampla, nam singula continebant fere dimidium pollicem ob exiguam facierum inclinationem mutuam, subdivisa sunt in partes quinas per bissectionem: harum partes singulæ facile habebantur per æstimationem: eo pacto crassitudines cunei, nimirum distantiæ puncti G a superficie tigilli, agnoscebantur admodum evidenter usque ad partes centesimas unius lineæ pedis Parisiensis, quod efficit, ut jure optimo potuerim ei cuneo micrometrici nomen imponere.

20. Locus non permittebat admovere canalem & cymbulam usque ad locum puncti B figuræ 2, qui itidem erat vacuus ob illum hiatum: sed potui admovere usque ad dimidium intervallum puncti 1 a loco hiatus, per quem transierat filum demissum a puncto A, ubi inveni crassitudinem cunei in contactu cuspidis particularum 80, & eandem ad sensum ad punctum 1, & 2, ac in locis intermediis: repetitâ pluribus vicibus operatione, semper rediit crassitudo eadem particularum 80 cum differentiis perquam exiguis, & penitus contemnendis, & cum applicatio regulæ ostenderet illam partem tigilli accurate planam, ea eadem tuto haberi potest pro distantia cuspidis ab eodem plano in puncto B. Imago solis excepta est in meridie dierum 19, 20, & 21 Aprilis, ac incidit in superficiem tigilli prope numerum 12. Hinc adduxi cymbulam & cuspidem ad numeros 11, 12, 13, & ubique inveni particulas quamproxime 200. Quare ibi superficies erat itidem ad sensum horizontalis, sed inferior puncto B per particulas 120: is numerus dividendus est (num. 18) per 30, ut eæ particulæ reducantur ad partes lineæ longitudinalis, quod exhibet partes ejusmodi

modi accurate 4 . Id est discrimen horizontalitatis utique exiguum, pro distantia pedum circiter 14 , cujus tamen habenda est ratio , id enim exhibet lineolas GI, G'I' figuræ 1 , per quas inveniri debent lineolæ FI , F'I' demendæ a lineis BG , B'G', ad habendas BF , B'F'. Est nimirum in ipsa fig. 1 AB : BF : : GI : $FI = \frac{BF \times GI}{AB}$, ubi nullus error sensibilis committitur , si ad habendam quantitatem ita exiguam ponatur BG , quæ observatur immediate in superficie tigilli , pro BF , cujus differentia a BG cum sit tam exigua , error commissus in valore lineolæ exiguæ FI remanet perquam exiguus respectu ipsius , adeoque penitus contemnendus. Hinc poterit assumi $FI = \frac{BG \times GI}{AB}$, & eodem pacto $F'I' = \frac{B'G' \times G'I'}{A'B'}$, ubi etiam licebit pro A'B', & B'G' ponere AB , & BG' tam parum ab iis discrepantes , ac assumere $F'I' = \frac{BG' \times G'I'}{AB}$.

21. Pro determinandis rectis BG , B'G' figuræ 1 , primâ ex illis tribus diebus usus sum sequenti methodo. Statim ac prope meridiem tota imago solis elliptica ascendit supra superficiem tigilli figuræ 2 , adduxi ad singulos vertices ejus ellipseos singula latera singularum e binis schedis chartaceis , in quarum utraque habebatur recta linea perpendicularis suo lateri excurrens per totam ejus amplitudinem : schedâ ita positâ , ut ea recta efficeret continuationem lineæ meridianæ ejusdem tigilli , latus ipsum evadebat perpendiculare eidem : admota sunt ea schedarum latera ad illos vertices ita , ut limbum tangerent in situ æqualis vis luminis , quod in ejusmodi imagine sensim decrescit in ejus marginibus cum gradatione quadam efformante quoddam genus penumbræ, per quam a loco luminis excipiente radios transmissos per totam aream foraminis transitur ad locum , ad quem nullus radius advenit , advenientibus inter ea loca radiis transeuntibus per partem tantummodo areæ ejusdem eo minorem , quo is locus recedit magis a loco luminis pleni : tenuitas luminis in ipso ultimo margine,

ne, & lumen reflexum in conclavi nunquam satis obscuro impedit, ne perspici possit ipse margo extremus. Inter ea latera binarum schedarum incessit imago elliptica cum vi luminis ad sensum æquali in earum marginibus: in æstimanda æquali ea vi in iis marginibus, qui ambo simul oculis subsunt, error non committitur, nisi admodum exiguus. Sic eo die habita sunt puncta G, G' in concursu eorum laterum cum linea meridiana, quorum punctorum alterum tantummodo exprimit recta linea, quæ in fig. 2 habetur in G. Id quidem non sufficeret, si ea methodo quæreretur diameter solis apparens, cum locus ejus vis luminis ad sensum æqualis non sit is, ad quem devenit radius digressus e limbo, & transiens per marginem foraminis A, vel A'; verum inde satis accurate obtinentur tangentes pertinentes ad bina puncta disci æque distantia a centro, adeoque distantia apparens a zenith centri, quæ est media arithmetica inter binas eorum distantias.

22. Reliquis binis diebus ad eandem determinationem adhibui aliam methodum, quæ mihi visa est aptior: notavi plura puncta tenui cuspide in ipsa superficie tigilli in iis partibus binorum verticum imaginis ellipticæ, in quibus visa est mihi eadem quædam vis luminis, assumendo alternatim alterum in uno vertice, & alterum in altero: per ea puncta, quæ inventa sunt posita in directum, duxi binas rectas, a quibus vix ullum aberrabat hinc, & inde per crassitudinem suam perquam exiguam, quo pacto ea determinatio æquivalebat multis parili æstimatione repetitis. Ea puncta accuratissime determinata debebant pertinere ad binos ramos binarum hyperbolarum, sed harum arcus tam breves nihil ad sensum differre poterant a rectis lineis: eæ rectæ per suam intersectionem cum linea meridiana exhibebant singula ex iis punctis G, G' figuræ 1. Hic in fig. 2 exhibetur ea linea cum suo puncto G inter puncta notata numeris 5, & 6, cum non habeatur nisi pars tigilli: sed obvenerunt ambæ inter numeros 12, & 13. Quare distantiæ puncti B a puncto notato 12, quæ est = 3600, addenda erat distantia ejus puncti ab ea linea pro quavis determinatione. Assumptæ sunt eæ distantiæ, & translatæ in scalam lateralem circini proportionis per circinum haben-

tem tenues cuspides, ubi etiam decimæ earundem partium partiæ culæ per æstimationem assumptæ sunt sine periculo erroris unius ex his iisdem : dum enim punctum æque distans a binis extremis partis ejusdem exhibet $\frac{5}{10}$ addendas numero partium præcedenti, punctum, quod exhiberet particulas hinc 4, & inde 6, haberet ea duo intervalla ita diversæ magnitudinis, ut pro æqualibus haberi omnino non possent. Adjectis iis distantiis inventi sunt valores, qui habentur in sequenti tabella, ubi prima columna habet dies observationum, secunda, & tertia valores BG, BG' ita ex observatione deductos.

Apr.	BG	BG'
19	3751,4	3828,2
20	3703,0	3778,8
21	3655,3	3731,0

23. Cum habiti fuerint valores AB $=$ 5590 (num. 13), A'B' $=$ 5594,2 (num. 14), & (num. 20) FI $= \frac{BG \times GI}{AB}$, & F'I' $=$ $\frac{BG' \times G'I'}{AB}$, existentibus ibidem GI, & G'I' $=$ 4; substitutis hisce numeris, obveniunt pro die 19 FI $=$ 2,7, F'I' $=$ 2,7, pro die 20 FI $=$ 2,6, F'I' $=$ 2,7, pro die 21 FI $=$ 2,6, F'I' $=$ 2,7.

24. Valores FI subtracti a valoribus BG exhibent valores BF, & pro habendis valoribus B'F' oportet subtrahere a valoribus BG' hosce valores F'I', & præterea valorem BB' $=$ 4,2 (num. 14): tum habentur tangentes distantiarum a zenith binorum punctorum disci æque distantium a centro, pro quarum tangentium valoribus assumi debent juxta numerum 15 $\frac{BF}{AB}$, & $\frac{B'F'}{A'B'}$. Inventis angulis, qui respondent hisce tangentibus, addenda esset singulis refractio, & demenda parallaxis ad habendas eas distantias correctas, ac earum distantiarum differentia deberet exhibere diametrum apparentem solis, si puncta G, & G' essent determinata a radiis transeuntibus per centrum foraminis, quod cum nequaquam fiat, sed accipiantur ea puncta per æstimationem in locis pe-

num-

numbræ habentibus vim luminis æqualem, diameter apparens, ut supra innui, ea methodo obtineri non potest satis accurata: sed eâ in hac perquisitione non indigemus. Accipienda esset earum distantiarum semisumma ad habendam distantiam centri solis a zenith: verum refractio, & multo magis parallaxis, pro distantiis apparentibus, quæ occurrunt per eos dies, est ad sensum eadem: hinc utraque adhiberi potest constanter eadem, quæ convenit mediæ inter eas, quæ occurrent non correctas, applicando ipsam distantiæ centri assumptæ pro singulis diebus per semisummam non correctarum. Media inter omnes, quæ occurrunt per eos dies, est proxime $= 33^{\circ}.45'$, ut mox patebit, pro qua ex iis, quæ inventa sunt in Opusculo VIII Tomi II, eruitur refractio $38''$ (*). Pro parallaxi autem, adhibitâ horizontali $8''\frac{1}{2}$, ut est deducta e postremo Veneris transitu sub sole, obtinetur per rationem sinus distantiæ apparentis a zenith $4'', 7$, adeoque satis erit ejusmodi semisummæ addere constanter $33''$. Accedit declinatio addenda pro diebus singulis ei distantiæ a zenith ita correctæ ad habendam distantiam æquatoris ab ipso zenith æqualem altitudini poli quæsitæ. Eam assumpsi ex Ephemeridibus Parisiensibus (*Connoissance des temps*) ejus anni, ubi aliquando occurrunt errores vel typorum, vel calculi præpropere subducti, sed est quod me

Y y 2 cer-

(*) Ibi in tabula apposita post numerum 17 habentur numeri, e quibus erui possunt novem determinationes refractionis pro data quavis distantia a zenith. Formula pro refractione x debita distantiæ a zenith $= a$ est ibi $\frac{(p' - p)d}{q - q'}$ eruta e regula Bradleyanâ, sed neglectâ subtractione triplæ refractionis a distantia a zenith, quam posse negligi pro iis distantiis, quæ ibi occurrunt, ibidem ostensum est: hinc si nova quædam distantia adhuc multo minor, ut hæc, quæ hic occurrit, dicatur c; refractio ipsi debita erit $= \frac{(p' - p)d\,tan.c}{(q - q')tan.a}$.

Habentur in prima linea columnæ secundæ singularum e tribus divisionibus partis I ejus tabulæ valores a singuli adhibendi pro ternis determinationibus eruendis e tribus columnis singularum e tribus divisionibus partis II, ac in prima linea columnæ tertiæ partis I valores d adhibendi cum iis valoribus a, tum in secunda, ac tertia linea singularum e tribus columnis singularum e tribus divisionibus partis II valores $p' - p$, & $q - q'$, quorum tres, qui sunt in eadem divisione quavis conjuncti cum eodem valore a & d, & cum va-

certiorem reddat, nullum ejusmodi errorem in iis ejus anni declinationibus inveniri. Rationem habui differentiæ meridiani Veneti a Parisiensi, quæ habetur ibidem in tempore = 39' notata asterisco, quod indicat, eandem determinatam fuisse ab aliquo Parisiensi Academico: aliunde differentia declinationis pro 24 horis semper est minor 24 minutis, adeoque minor singulis minutis in singulas horas, singulis secundis in singula minuta. Ex iis datis applicatis ad eas formulas obtinentur sequentes determinationes altitudinis poli quæsitæ.

Pro die Aprilis 19

$BF = BG - IF = \ldots\ldots\ldots 3751{,}4 - 2{,}7 = 3748{,}7$

$B'F' = BG' - BB' - I'F' = 3828{,}2 - 4{,}2 - 2{,}7 = 3821{,}3$

$\frac{BF}{AB} = \frac{3748{,}7}{5590} = \ldots\ldots\ldots\ldots \; tan. 33°.\ 50'.\ 46''$

$\frac{B'F'}{A'B'} = \frac{3821{,}3}{5594{,}2} = \ldots\ldots\ldots\ldots \; tan. 34°.\ 20'.\ 11''$

Summa distantiarum limborum a zenith	68 . 10 . 57
Distantia apparens centri	34 . 5 . 28
Refractio imminuta per parallaxim	33
Declinatio	11 . 21 . 43
Altitudo poli	45 . 27 . 44

Pro

valore c, qui hìc est 33°. 45', communi omnibus exhibent eas novem determinationes refractionis quæsitæ.

Instituto calculo numerico cum numeris inde erutis, & eo valore c, inveni sequentes numeros secundorum pro refractione quæsita: 35,28; 38,85; 38,01; 33,99; 36,71; 35,99; 37,10; 39,20; 38,52. Horum summa divisa per 9 exhibet valorem medium 37'',1. Demptis primo, quarto, & sexto, qui differunt aliquanto plus ab aliis, habetur medium 38'', 1, quod non nisi per unicum secundum differt ab illo priore, & minus quam per unum integrum a quatuor e sex reliquis, minus quam per duo a binis residuis. Consentit autem intra unicam partem decimam unius secundi cum valore, qui eruitur pro hac distantia per regulam Bradleyanam adhibentem tangentes distantiarum imminutarum per triplum singularum refractionum, adhibita refractione horizontali 33'; demendo enim $3 \times 33' = 1°. 39'$ à 90°, & $3 \times 38'' = 1'. 54''$, sive 2' a 33°. 45', habentur 88°. 21', & 33°. 43', ac numerus 1080'' = 33' ductus in $\frac{tan. 88°. 21'}{tan. 33°. 43'}$ exhibet itidem 38'', 1, consensu tanto, utique fortuito, sed qui hujusmodi determinationem confirmat mirum in modum.

Pro die 20

BF = BG − IF = ... 3703,0 − 2,6 = 3700,4

B′F′ = BG′ − BB′ − I′F′ = . . 3778,8 − 4,2 − 2,7 = 3771,9

$\frac{BF}{AB} = \frac{3700,4}{5590} =$ . . . . *tan.*33°. 30′ 12″

$\frac{B'F'}{A'B'} = \frac{3771,9}{5594,2} =$ . . . . *tan.*33°. 59′ 24″

Summa distantiarum limborum a zenith . . . . . 67 . 29 . 36

Distantia apparens centri . . . . 33 . 44 . 48

Refractio imminuta per parallaxim 33

Declinatio . . . . 11 . 42 . 15

Altitudo poli . . . . 45 . 27 . 36

Pro die 21

BF = BG − IF = ... 3655,3 − 2,6 = 3652,7

B′F′ = BG′ − BB′ − I′F′ = . . 3731,0 − 4,2 − 2,7 = 3724,1

$\frac{BF}{AB} = \frac{3652,7}{5590} =$ . . . . *tan.*33°. 9′. 43″

$\frac{B'F'}{A'B'} = \frac{3724,2}{5594,2} =$ . . . . *tan.*33°. 39′. 7″

Summa distantiarum limborum a zenith . . . . . 66 . 48 . 50

Distantia apparens centri . . . . 33 . 24 . 25

Refractio imminuta per *parallaxim* 33

Declinatio . . . . 12 . 2 . 36

Altitudo poli . . . . 45 . 27 . 34

25. Si assumatur medium inter hasce determinationes habebitur 45°.27′.38″. Medium inter duas postremas, quæ tanto minus differunt inter se, esset 45°.27′.35″, atque id videtur præferendum etiam idcirco, quod determinatio limborum imaginis facta iis binis diebus per multa puncta alternatim notata in locis marginum, in quibus vis luminis videbatur æqualis, est determinatio multiplex, consentientibus omnibus, cum inventa sint ea puncta jacentia in directum, & recta ducta inter ipsa exhibuerit medium quoddam inter eas omnes determinationes, corrigendo pene prorsus insensibilem aberrationem nonnullorum hinc, & inde a directione accurata, dum positio binorum chartæ laterum transeuntium

tium per loca vis æqualis luminis in penumbra minus accurate exhibere potest determinationem eandem, in qua si quid mutatum esset in motu imaginis per superficiem tigilli, debuisset delere determinationem præcedentem, nec nisi unicam novam oculis objicere, ut ea idcirco unicæ determinationi æquivaleat. Verum determinatio intra tam pauca secunda non potest esse tuta.

26. Adhuc tamen crediderim, tutam esse saltem intra decem secunda. Errores, quorum ratio habenda videatur, provenire possunt ab errore commisso in altitudine AB, in binis distantiis BG, B'G', in declinatione solis, in refractione; nam nullus error committi potuit in assumenda diametro foraminis, & inclinatione laminæ, qui secum trahere potuerit errorem sensibilem in mensura lineolarum BB', B'D figuræ 1, nec ullum sensibilem errorem timere possum in determinandis depressionibus punctorum G, G' infra lineam horizontalem transeuntem per B, quæ traductâ repetitis observationibus cymbulâ, & applicato semper cuneo exhibente cum summa evidentia differentias minimas, obvenerunt semper ad sensum eædem. Errores non nisi perquam exigui timeri possunt in altitudine AB assumpta pluribus vicibus methodo, quam exposui, ut & in determinatione punctorum G, G', potissimum in ea, quæ postremis binis diebus est facta, consentientibus observationibus pluribus, dum in singulis haud ego quidem timere possum errorem quintæ partis unius ex iis, quas adhibui, quarum altitudo AB continebat 5590, numerum satis ingentem. Facile obtinetur mensura erroris, qui inde proveniret in angulis, quos habuimus per eorum tangentes. Satis est pro primo angulo primæ diei augere prius numeratorem tangentis per unitatem unam, tum denominatorem, & invenire angulum. Habebitur $\frac{3749,7}{5590} = tan. 33°. 51'. 12''$, ac $\frac{3748,7}{5591} = tan. 33°. 50'. 29''$. Primus error esset secundorum 26, secundus tantummodo 17. Pars quinta prioris est $= 5''$: posterioris $= 3''$, utriusque simul $= 8''$. Nec vero timeri potest error secundorum 5 in declinatione solis, nec trium in refractione in ea tam mediocri distantia a zenith de-

ducta

ducta ea *methodo*, quæ *habetur* in adnotatione ad num. 24, licet nulla *habita sit* ratio barometri, ac thermometri. Nihil autem timeri *potest* in *parallaxi* assumpta, adeoque nec simul *16''*, ubi *omnia* conspirent, quæ tamen semper se mutuo destruunt magna ex parte. Nihil mirum, si eæ tres determinationes, & potissimum postremæ duæ usque adeo inter se consenserint. Fortasse ne quatuor quidem, vel quinque secundorum error timeri potest.

27. Illud Observatorium est situm in parte septentrionali urbis accurate ad boream celebris turris campanariæ Sancti Marci, existente distantia in melioribus iconographicis chartis urbis ipsius pedum Venetorum 2950, qui æquivalent Parisiensibus 3155, nam illorum singuli continent lineas Parisienses 154 accurate; adeoque differentia latitudinum est = 33'', quibus demptis ab inventa 45°. 27'. 35'', habetur altitudo poli pro ea turri, quæ potest adhiberi pro latitudine urbis, cujus id est punctum maxime notabile, licet sit prope ejus marginem australem, 45°. 27'. 2'', vel etiam 45°. 27'. 0''. Passim adhibent pro latitudine geographica urbis Venetæ 45°. 25'. 0'', quod habetur in ipso diario Parisiensi (*Connoissance des temps*): sed dum ibi longitudo exhibetur notata per asteriscum, ut supra innui, quod signum indicat, eam determinatam fuisse ab Academico aliquo Parisiensi, latitudo notatur per crucem, quæ indicat tantummodo determinationem factam per instrumenta astronomica. Habita erit ab aliquo per minorem quadrantem mobilem, in qua determinatione error duorum minutorum facile committitur.

28. Hìc ea est habita sine instrumentis idoneis, sed defectu suppleto ita, ut eadem haberi potuerit exactitudo, quæ habetur per majora instrumenta astronomica methodis adhiberi solitis, quæ itidem cognitam supponunt refractionem, & parallaxim, ac declinationem solis. Suppleri autem possunt ubique facile ea omnia, & ipse quadrans mobilis, quo hìc assumptæ sunt altitudines correspondentes, ac defectus laminæ habentis foramen, per quod radius transmittatur, & quod immineat ad perpendiculum puncto pavimenti, in quod demitti possit filum tensum a ponduscula appenso. Pro hoc affigi poterit muro laterali fenestræ altioris vir-

ga

ga ferrea oblique posita ita, ut prope ejus aperturam sustineat intra ipsum conclave ejusmodi laminam sibi affixam in positione horizontali, e cujus foramine demitti poterit ejusmodi filum cum ponduſculo: supplebuntur altitudines correspondentes per plures distantias alterutrius verticis imaginis solaris a pede gnomonis notatas in pavimento ante, & post meridiem, per quæ si ducantur tractus continui, & ope cuspidis applicatæ filo longiori ducantur inter ipsos plures arcus circulares habentes pedem gnomonis pro centro, ac secetur bifariam quivis ex iis arcubus; habebitur linea meridiana transiens per eas sectiones, & per ipsum gnomonis pedem.

29. Ea erit parum abludens a linea meridiana exacta, quod ipsum sufficit, cum distantia imaginis solaris a pede gnomonis prope meridiem subeat mutationem perquam exiguam. Verum si quis ipsam etiam lineæ meridianæ directionem velit habere magis exactam, id obtinere poterit, adhibendo canalem, & cymbulam, & cuneum micrometricum facile parabilem, quorum ope determinari possunt distantiæ eorum pavimenti punctorum a plano horizontali transeunte per pedem gnomonis, ut habeatur ratio depressionis eorum punctorum infra id planum horizontale, vel elevatio supra, & vero etiam ratio motus solis in declinationem, qui est basis correctionis adhibitæ meridiei inventi per altitudines correspondentes: inveniet facile harum rerum peritus correctiunculam adhibendam meridianæ lineæ ductæ ope illorum arcuum circularium sectorum bifariam. Porro facile aptatur ad eum usum canalis quicumque ex iis, qui adhibentur ad deducendam aquam, obstructis argillâ, vel arenâ binis ejus capitibus. Facile complanatur superficies tigilli, & adducitur ad eam formam, ac cætera præstari possunt, quæ hic sunt præstita.

30. Verum etiam sine tigillo ego quidem Mediolani in Collegii Braidensis ambulacro hanc methodum adhibui cum optimo successu. Excavavi foveolam in pede gnomonis, in qua aptavi capsulam metallicam parallelepidam habentem operculum planum, quod amoveri posset, & reponi. Eo remoto demisi ponduſculum affixum filo tenui exeunti e centro foraminis in id vasculum ple-

num

num aqua : affixi duo fila tenuia binis clavis infixis prope ipsum pavimentum in parietes proximos, & adduxi lentè alterum post alterum ad contactum cum eo filo verticali, ac notavi in pavimento ex parte oppositâ singula puncta sub singulis iis filis horizontalibus. Summoto filo verticali cum ponduscul o, remisi operculum, ac eadem fila horizontalia adduxi ad eadem puncta prius notata. Horum intersectio exhibuit punctum, quod erat ipse pes gnomonis, per quod in operculo eodem duxi binas rectas, alteram in directione lineæ meridianæ, alteram ipsi perpendicularem. Per id punctum ducta ibi est meridiana linea, & insculpta ipsis lateribus coctis complanatis, quibus pavimentum erat constratum, adhibitis pro habenda ejus directione altitudinibus correspondentibus captis per sectorem speculæ astronomicæ extructæ supra illam ipsam Collegii partem, unde signum edebatur pro momento meridiei. Eo pacto determinata ibi fuerat accurata positio meridianæ lineæ ductæ in usum communem Collegii ipsius : ea habebat in illa operculi intersectione pedem gnomonis accuratum : eâdem methodo alibi etiam ego sum usus pro determinando pede gnomonis meridianæ lineæ stabilis ducendæ in pavimento conclavis lapidibus etiam constrato, & divisionibus insculptis partium gnomonis pro tangentibus distantiarum a zenith, ac signis zodiaci. Ibi ad usus domesticos satis erat sulcus tenuis insculptus ipsis lateribus coctis. Cum vellem experiri accurationem hujus methodi pro determinanda altitudine poli, notavi in iis ipsis pavimenti lateribus tenues lineas perpendiculares lineæ meridianæ ductas, ut hìc, per puncta notata in verticibus imaginis solaris ellipticæ : ope circini habentis cuspides tenues perpendiculares virgæ metallicæ notavi in ipso pavimento ad latus lineæ meridianæ intervalla notæ longitudinis, usque ad lineas illas, quorum postremo adjeci, itidem ut hìc, partem intervalli sequentis residuam usque ad illas rectas easdem : altitudinem gnomonis determinavi per duas regulas longiores, ut hìc, sed facilius, cum lamina habens foramen esset horizontalis : admovi canalem cum cymbula, & filo ferreo incurvo, ac ope cunei micrometrici obtinui tangentes horizontales, quæ relatæ ad altitudinem gnomonis exhibuerunt distantias bino-

rum limborum a zenith : inde altitudinem poli erui eâdem hac methodo , pluribus plurium dierum determinationibus consentientibus intra admodum pauca secunda , & medio inter eas assumpto consentiente fere penitus accurate cum altitudine poli determinata in Observatorio superiore per ingentia instrumenta . Usque adeo horum defectus suppleri potest pro hac determinatione, qui est scopus hujus Opusculi utilitatis multo latius patentis , quam pro sola correctione latitudinis urbis Venetæ , pro qua eæ observationes sunt institutæ .

OPUSCULE VI.

DÉTERMINATION DU LIMBE ÉCLAIRÉ DE LA LUNE QU'ON DOIT ATTENDRE AU MÉRIDIEN.

1. CELUI-CI ne mérite pas le nom d'un Opuscule, que je lui donne seulement pour le mettre sous un nom commun avec toutes les autres pièces de ce Recueil, comme il y en aura d'autres dans ce dernier Volume, qui sont des simples Mémoires bien courts : c'est la solution d'un petit problême, qu'on m'a proposé à Paris dans une conversation particulière, qui n'exige, qu'un peu d'imagination pour concevoir les intersections de quelques plans, & la résolution d'un triangle sphérique. L'ayant résolu d'abord, & trouvant cette solution à présent parmi mes papiers, j'ai jugé à propos de la réunir aux autres pièces de ce Recueil appartenantes à l'Astronomie.

2. La lune arrive tous les jours au méridien ; mais hors du temps, où elle est pleine en opposition avec le soleil, on ne voit bien claire que la moitié de son disque : on voit aussi pendant quelques jours avant & après qu'elle est nouvelle, & a la forme du croissant, tout le reste du disque avec une lumière foible & pâle, qu'elle reçoit par réflexion de la terre, qui tourne alors vers elle la plus grande partie de sa surface éclairée : on n'apperçoit pas cette foible lumière que le soir après le coucher du soleil, ou le matin avant son lever, quand la lune au commencement de son mois a déjà dépassé le méridien, ou à la fin, avant d'y arriver ; mais elle n'a bien claire, que la partie de son disque, qui est tournée vers le soleil, & frappée immédiatement par ses rayons : cette partie est terminée d'un côté par un demi-cercle lumineux, qui est la moitié visible de la circonférence du même disque toujours circulaire, & par la moitié du périmètre d'une ellipse, qui est la projection de la moitié de la circonférence circulaire, qui termine la partie de sa surface éclai-

rée par le soleil tant soit peu plus grande, que *la moitié* du total : *mais ici nous la* considérerons comme une moitié de ce total, & ce cercle comme un grand cercle de son globe : nous considérerons de même comme un grand cercle du même globe le bord du disque, qui se présente à nous sous la forme d'un cercle plat, & qui est la base d'une partie de sa surface visible un peu plus petite au contraire que la moitié du total.

3. Le disque se présente au méridien tantôt avec la partie éclairée de son bord, & tantôt avec l'obscure, de manière qu'on ne peut pas hors du temps de la pleine lune en déterminer par une observation immédiate l'arrivée à ce cercle, que d'un seul bord, qui est l'occidental, quand le demi-cercle éclairé arrive au méridien le premier, & l'oriental, quand celui-là est le second à y arriver ; tandis qu'on observe le passage par le méridien de tous les deux bords du soleil, & par-là on a le moment du passage de son centre en prenant le milieu entre les deux moments des passages des deux bords. On pourroit bien avoir le moment du passage de la lune par le méridien en observant le passage des deux sommets des angles curvilignes formés par le demi-cercle éclairé du bord du disque, & par le périmètre de la demi-ellipse produite par la projection susdite, qui coupe le même disque en deux parties, une claire & l'autre obscure, si ce périmètre étoit bien uni & net : mais les inégalités de la surface de la lune qui la rendent raboteuse, rendent incertaine la pointe extrême de ces angles, & la détermination du moment de ce passage un peu incertaine : pourtant on peut avoir par-là le moment de ce passage du centre peu éloigné de l'exactitude précise, & on le voit par un à-peu-près, quand on voit le diamètre qui passe par ces deux sommets de ces deux angles coupé par le milieu par le fil, qui marque le méridien dans la lunette d'un quart de cercle mural, ou d'un instrument des passages. Dans ce moment il y a toujours sur le méridien un point de la demi-circonférence éclairée du disque, & un autre opposé de la demi-circonférence obscure : l'un des deux est le plus haut, l'autre le plus bas de tous les autres de la circonférence entière.

4. La

4. La manière la plus commode pour examiner les tables de la lune, & en déterminer les erreurs est celle d'en faire des observations à son passage par le méridien, en déterminant par l'instrument des passages, ou par un quart de cercle mural bien vérifié son ascension droite, & par ce second sa déclinaison. Pour le premier objet il faut observer le moment de l'arrivée au fil méridien du limbe éclairé, d'où l'on tire l'ascension droite du point de l'attouchement, qui est le plus occidental, quand le limbe éclairé arrive le premier à ce fil, & le plus oriental, quand il est le dernier : il y faut ajouter dans le premier cas, & en ôter dans le second le demi-diamètre de la lune réduit en parties du parallèle, dans lequel se trouve son centre dans ce temps, en divisant ce demi-diamètre par le co-sinus de la déclinaison, & pour cet objet il suffit d'avoir cette déclinaison par un à-peu-près ; parcequ'une petite différence de déclinaison ne change pas sensiblement cette réduction : ainsi on peut prendre la déclinaison donnée par les tables, & déjà calculée dans la Connoissance des temps, comme aussi le demi-diamètre apparent, dans lequel on ne peut pas craindre une erreur considérable : on pourroit employer aussi le diamètre apparent, qui passe par les deux angles formés par la demi-ellipse avec le limbe éclairé, en le déterminant par un micromètre objectif ; mais les inégalités qu'on trouve dans le périmètre de cette demi-ellipse, comme nous l'avons dit ci-dessus, jusqu'au sommet de l'angle même, peuvent rendre cette détermination moins exacte, comme nous avons dit, que cette même raison rendroit un peu incertain, & par-là peu exact le moment du passage par ce fil de ces mêmes sommets, qu'autrement on pourroit employer pour avoir le moment du passage du centre.

5. Pour la déclinaison de la lune il faut déterminer sa distance au zénith à son arrivée au méridien, & cette observation ne se fait pas avec l'instrument des passages, mais avec un quart de cercle, sur-tout le mural. Or on ne peut pas observer immédiatement la distance au zénith de son centre : on détermine celle du limbe éclairé, en y amenant le fil qui dans le foyer de l'ob-

l'objectif ſe trouve perpendiculaire au méridien, & parallèle au mouvement diurne. S'il y a un micromètre extérieur, qui donne le mouvement à l'alidade par une vis, on y peut avoir dedans un ſeul fil parallèle immobile, qu'on amène par ce mouvement extérieur de l'alidade à l'attouchement de ce limbe éclairé : autrement on amène l'alidade à un point exact de la diviſion du limbe, & par un micromètre intérieur, qui donne à un autre fil parallèle un mouvement, par lequel on amène celui-ci à l'attouchement avec le limbe *éclairé*, on *obtient la* distance apparente au zénith de ce limbe, qu'on *corrige par la réfraction* & *la parallaxe* assez connue, & *on y ajoute le demi-diamétre* apparent, ou on l'ôte, ſelon que le limbe *éclairé touché* par le fil est le *supérieur*, ou l'*inférieur* par rapport au centre..

6. C'est principalement pour ce ſecond uſage qu'il est utile de ſavoir d'avance, quel des deux limbes, le ſupérieur, ou l'inférieur doit être l'éclairé, c'est-à-dire, ſi l'on doit attendre au méridien pour cet attouchement le limbe ſupérieur, ou l'inférieur. En le ſachant d'avance, on peut préparer l'alidade qui porte la lunette pour placer celle-ci à une poſition, dans laquelle, quand la lune entre dans le champ de la lunette, le limbe éclairé qui doit être touché par le fil parallèle ſe trouve peu éloigné de celui, qui paſſe par le centre du champ de la lunette. Après cette diſpoſition on amène dans la première des deux manières indiquées le fil parallèle immobile à cet attouchement par le micromètre extérieur avec moins de mouvement, & dans la ſeconde manière non ſeulement on y amène le fil mobile avec moins de mouvement de la vis, mais on fait que cet attouchement ſe faſſe loin le moins poſſible du centre du champ, où les obſervations ſont les plus aſſurées, & le moins ſujettes à une erreur qui dérive d'une eſpèce de parallaxe de l'œil qu'il faut éviter, & qui s'évanouit toujours dans le centre du champ de la lunette, pouvant devenir d'autant plus grande, que l'objet est plus éloigné du même centre. On voit ordinairement quand la lune est encore ſuffiſamment éloignée du méridien, ſi le limbe éclairé doit être l'inférieur, ou le ſupérieur pour pouvoir pré-

préparer à temps la position de la lunette; mais lorsque le diamètre de la lune qui va d' un des deux angles de la partie éclairée à l'autre opposée, est peu incliné à la position verticale, on y peut se tromper facilement : il est bien toujours d'avoir un moyen de s' assurer avant de la position, que le disque aura en arrivant au méridien par rapport à cet objet, mais sur-tout dans la circonstance de cette petite inclinaison de ce diamètre, pour bien disposer à temps l' alidade avec la lunette.

7. On fait souvent cette espèce d' observations, non seulement pour être à portée de perfectionner la théorie de la lune & ses *tables*, mais aussi, & principalement parcequ' il y a une période d' un nombre déterminé de lunaisons, après lequel dans la période suivante les erreurs des tables reviennent très-peu différentes, ainsi les ayant déterminées pour celle-là on les a d' avance pour celle-ci : c' est pourquoi on m' a parlé du problême exprimé dans le titre, dont je m' en vais donner ici la solution, qui est très-simple, & n'exige, comme je l' ai dit ci-dessus, que la résolution d' un seul triangle sphérique.

8. Dans la fig. 1 (Tab. IX) T est le centre de la terre, & d' une surface sphérique qui passe par le centre L de la lune, AOBM le disque de celle-ci tourné vers celle-là, qui occupe une petite partie de cette surface sensiblement plane, P, P' les intersections de l' axe de l' équateur avec cette surface, qui sont ses deux pôles, PLP' le méridien sur lequel la lune se trouve, S le point de cette surface qui répond au lieu du soleil, S' le point diamétralement opposé a celui-là, Z le zénith sur le méridien, C l' intersection de l' arc PZL avec le disque, D le point du disque diamétralement opposé à celui-là, O, M les intersections des arcs SL, S'L avec le même disque.

9. Si l' on conçoit la ligne TS prolongée jusqu' au centre du soleil, & une autre L*s* tirée du point L vers le même centre, celle-ci sera peu éloignée du parallélisme par rapport à la même TS, & sur la surface du globe de la lune il y aura un grand cercle AGBG', qui sera la base de l' hémisphère éclairée par le soleil, dont le plan sera perpendiculaire à la ligne L*s*, & une des

deux

deux demi-circonférences, comme AGB appartiendra à l'hémisphère *tourné vers la terre*, l'autre AG'B à l'*hémisphère opposé*. On peut considérer aussi le demi-périmètre AGB comme la projection de la demi-circonférence tournée à la terre faite sur le plan circulaire AOBM du disque par des lignes droites parties du point T, qu'on peut prendre pour parallèles à la ligne TL, perpendiculaires à ce plan. Cette ellipse rencontrera le diamètre OLM en G, & le demi-perimètre AGB divisera le disque apparent en deux parties, une éclairée AOBGA; & l'autre obscure AMBGA: les deux angles courvilignes, dont j'ai parlé ci-dessus auront ses sommets en A, & B.

10. Or le diamètre ALB doit être perpendiculaire à l'autre OLM, ce qu'on prouvera de la manière suivante. En considérant AGBG' de la première manière comme grand cercle de la surface du globe lunaire, son plan doit être perpendiculaire à la ligne L*s*, & le disque AOBM à la ligne TL: ainsi le diamètre ALB, qui se trouve dans tous ces deux plans, sera perpendiculaire tant à la première qu'à la seconde de ces deux lignes: par conséquent il sera perpendiculaire au plan TL*s*, qui est le même que le plan STL, à cause de la convergence des lignes TS, L*s* vers le même centre du soleil. Ce plan est le même que celui du demi-cercle SLS', dans lequel se trouve le diamètre OLM: ainsi le même diamètre ALB sera perpendiculaire au diamètre OLM, & l'angle ALO sera droit.

11. Il s'ensuit, que quand l'angle PLS sera aigu, comme la figure 1 le représente, le point supérieur C du diamètre CD, qui est l'intersection du méridien PLP' avec le disque, se trouvera dans le demi-cercle éclairé AOB du même disque, & l'inférieur D dans le demi-cercle obscur, & lorsque cet angle sera obtus, comme dans la fig. 2, alors au contraire le point inférieur D du même diamètre se trouvera dans le demi-cercle éclairé, & le point supérieur C dans l'obscur. Dans cette figure 2 on a pour le reste de même tout ce que nous avons vu dans la fig. 1, à l'exception de l'angle PLS, qui dans celle-là étoit aigu & dans celle-ci est obtus, à cause d'une position différente mutuelle de la lune & du so-

soleil, & de l'une & de l'autre par rapport à notre pôle P. Ici aussi PLP' sera le méridien du lieu de l'observation, PSP' un cercle de latitude passant par le lieu S du soleil, & le diamètre ALB perpendiculaire au diamètre OLM.

12. On voit donc, que la solution du problême proposé dépend de la résolution du seul triangle sphérique SPL, qui a ses angles dans le soleil S, la lune L, & le pôle P. On y connoît les deux côtés PS, PL, qui sont les compléments de la déclinaison du soleil & de la lune par excès ou par défaut relativement à 90°, selon que la déclinaison sera australe ou boréale, & l'angle en P, qui est la différence des leurs ascensions droites. Il suffira de trouver dans ce triangle l'angle en L. Le limbe qu'il faut attendre au méridien pour y avoir dans l'arrivée du centre à ce cercle son point visible éclairé sera le supérieur ou l'inférieur, selon que dans le triangle terminé à notre pôle, au soleil, à la lune, l'angle en celle-ci sera obtus ou aigu.

13. *La même qualité* de l'angle PLS obtus ou aigu fera voir, quel des deux points extrêmes A & B de la partie éclairée du disque sera la première à arriver au méridien avant le centre L. Soit ELF le diamètre du disque perpendiculaire au diamètre vertical CLD, le point E étant occidental, F l'oriental, c'est-à-dire celui-là à droite par rapport à un qui regarde selon la direction TL, & celui-ci à gauche, comme on voit exprimé dans toutes les deux figures, qui représentent le soleil S placé dans l'hémisphère occidental : cette position dépend de la différence des ascensions droites : si en ôtant l'ascension droite du soleil de celle de la lune augmentée de 360°, quand elle est plus petite, on a moins de 180°, le soleil est plus occidental : si le reste est plus grand, il est plus oriental : la première position se trouve presque toujours depuis la nouvelle jusqu'à la pleine lune, la seconde dans le reste du mois lunaire : j'ai dit presque toujours, parceque la latitude de la lune fait varier un peu cette règle dans le voisinage des syzigies, qu'on considère par rapport aux cercles des latitudes, qui passent par les pôles de l'écliptique, & déterminent les longitudes, & non par rapport aux cercles de dé-

clinaison, & qui *déterminent les ascensions droites*, *dont* un convient toujours avec le méridien. Si le soleil est plus occidental, le point A *boréal* passera, comme on voit dans la fig. 2, avant le centre L, qui passe avec le point C & par conséquent avant le point opposé B dans le cas de l' angle PLS obtus, & il passera après dans le cas de cet angle aigu, comme on voit dans la fig. 1. Il y aura tout le contraire, si le soleil est plus oriental.

14. On verra aussi quel des deux demi-cercles du disque sera visible à son passage par le méridien, l' oriental ou l' occidental. L' attouchement du limbe avec le méridien se fera toujours dans le point E le plus oriental du limbe, & dans le point F le plus occidental. Dans le cas de toutes les deux figures le visible sera le premier, qui se trouvera sur le demi-cercle éclairé AOB, comme on voit aisément: ainsi on aura la règle suivante. L' attouchement visible du disque sur son bord éclairé se fera avant l' arrivée du centre au méridien, ou après, selon que le soleil sera plus occidental que la lune, ou plus oriental, dans lequel second cas on voit aisément, qu' il doit arriver tout le contraire, c' est-à-dire selon que *le reste de l'* ascension droite de la lune moins celle du soleil sera plus grand, ou plus petit, que de 180°.

15. On peut appliquer les règles, qu' on a donné ici pour le passage par le méridien au passage par le fil horaire d' un micromètre filaire tourné de manière, que l' autre, qui lui est perpendiculaire, ait la position parallèle au mouvement diurne. Le premier fil à la place d' appartenir au méridien du lieu de l' observation, qui passe par le zénith Z, appartiendra à un autre cercle de déclinaison, qui est le méridien d' un autre lieu, & tout ce qu' on a dit par rapport au méridien s' applique à ce cercle: seulement à la place d' appeller le point C le supérieur, & D l' inférieur, on doit appeller celui-là le boréal, & celui-ci l' austral. On se sert de l' arrivée à ce fil, quand on compare la lune à une étoile fixe dans un endroit du ciel quelconque, comme de l' arrivée au méridien: il y aura là seulement un peu plus de dérangement causé par la parallaxe, qui détourne un peu la

lune

lune de la position du cercle de déclinaison, ce qui n' arrive pas au passage par le méridien.

16. La résolution du même triangle LPS donnera aussi la forme de la partie éclairée du disque, parcequ' elle donnera le côté SL, qui est la distance de la lune au soleil. *On sait bien*, & on le démontre très-aisément, que *la partie éclairée du disque* sera plus grande que l' obscure, comme *dans la fig.* 1, ou plus petite comme *dans la fig.* 2, *selon que cette distance sera* plus grande, ou plus petite qu' un quart de cercle, & quand elle sera = 90°, il y aura la dicotomie, c' est-à-dire le disque partagé en deux parties égales, une éclairée, & l' autre obscure: le grand demi-axe LA de l' ellipse produite par la projection sera au petit LG comme le rayon au co-sinus de l' arc LS, & la partie éclairée du disque sera la somme, ou la différence de son demi-cercle & de cette demi-ellipse, selon que cet arc sera plus grand ou plus petit qu' un quart de cercle: la partie OG éclairée du diamètre MO tourné vers le soleil sera égale au sinus verse d' un arc de la circonférence du disque semblable au même côté LS. On tire tout cela de ce qu' on a vu dans l' Opuscule XV du Tome IV au §. XXI sur la forme de la partie éclairée de Vénus en employant les figures 8, & 9 de la planche X, qui serviroit de même ici pour démontrer ce que nous venons de dire de la forme de la partie éclairée du disque de la lune.

OPUSCULE VII.

MÉTHODE POUR EMPLOYER LE RETOUR DE VÉNUS A LA MÊME LONGITUDE PAR LA RÉTROGRADATION POUR LA DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS MOINS CERTAINS DE SON ORBITE.

1. La différence, qu'on trouve assez considérable entre les lieux de Vénus déduits des meilleures tables & les observés, fait voir que la théorie, sur laquelle ces tables sont fondées, a besoin de correction : pourtant parmi ces éléments il y en a au moins un, sur lequel on ne peut avoir le moindre doute. J'ai songé à me servir de celui-ci pour en tirer tous les autres, & j'ai imaginé une méthode, qui paroît capable de remplir cet objet en l'employant conjointement avec le retour de cette planète à la même longitude : c'est la rétrogradation, qui donne l'occasion à ce retour, & il y en a un après le commencement & un autre après la fin du mouvement rétrograde. J'employe l'un, & l'autre, & j'expose dans cet Opuscule cette méthode. Elle n'est pas ni la plus facile pour l'exécution, ni la plus sûre pour le succès à cause des quantités qu'on y néglige, que pourtant je crois telles à pouvoir être négligées pour en corriger l'effet au moins par un renouvellement de calcul, comme on fait dans les méthodes de fausse position. Elle servira au moins pour un exercice de Géométrie, & pour voir combien de ressources on y trouve pour la solution des problêmes, & particulièrement pour ce qui appartient à l'Astronomie.

2. Les éléments le moins certains de la théorie de Vénus sont l'excentricité, & la direction du grande axe, c'est-à-dire la position de l'aphélie. La position des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite ont gagné infiniment par les observations des deux dernières

nières passages sous le disque du soleil : on a déjà vu dans un Opuscule du Tome III l' usage, qu'on peut faire de ces deux éléments pour la recherche des orbites elliptiques des comètes, & on le verra aussi dans l' Opuscule IX : on peut s' en servir aussi pour l'orbite d'une planète quelconque : mais l'élément le plus sûr est le temps de sa révolution périodique, dont on en tire par la troisième loi de Kepler la distance moyenne au soleil rapportée à celle de la terre, ce qui étoit déjà assez bien connu même avant ces derniers passages : mais ceux-ci l'ont confirmé de manière, à en rendre indubitable l' exactitude, au moins pour l' orbite, que nous avons à présent, quoique dans le cours de plusieurs siècles on pourra y trouver des variations produites par les forces perturbatrices. Ces passages observés avec tant de soin dans le temps des conjonctions avec le soleil, & sur son disque même, ce qui rend les méthodes pour faire des observations exactes beaucoup moins sujettes aux moindres erreurs, & arrivés presque dans les mêmes points de l' orbite, étoient les plus propres pour la vérification de cet élément. M. de La-Lande dans le Volume II de son Astronomie livre VI, que j' ai cité tant de fois comme un ouvrage classique, donne quatre déterminations de cette distance faites par Kepler, Street, Halley, & par lui-même. La première, quoique fondée sur des observations anciennes, & sur les premières de l' Astronomie renaissante bien éloignée de la perfection de nos instruments, & de nos méthodes est de 72413 parties, dont celle de la terre est = 100000 : elle se trouve si peu éloignée des deux suivantes, qui sont bien exactement d' accord de 72333. M. de La-Lande après les deux passages n'y ajoute, qu' une petite fraction de la dernière unité en la faisant de 72333,24, ce qui fait voir, qu' on peut bien s' y fier avec toute sureté.

3. Or voici comment on peut s'y prendre pour employer cette méthode. Soit (Tab. IX fig. 3) S le centre du soleil, T, T', T'' les trois lieux de la terre, V, V', V'' les trois de Vénus réduits au plan de l' écliptique dans les trois directions TE, T'E', T''E'' données par les longitudes, dont la seconde soit plus orientale, que

que la première, la troisième de nouveau plus occidentale que la seconde, & même égale à la première, trouvée ou par observation immédiate, ou par une interpolation entre plusieurs observées dans le voisinage de ce retour, & par conséquent les extrêmes TE; T''E'' seront parallèles entr' elles, & l' intermédiaire T'E' les doit rencontrer en deux points L & L', comme aussi elle rencontrera la corde VV'' en un point A, & les cordes TT'', VV'' seront rencontrées par les rayons ST', SV' en *t*, & *u*. Si les intervalles du temps étoient petits quoiqu'inégaux; on pourroit prendre les segments T*t*, *t*T'', & V*u*, *u*V'', comme proportionnels aux temps, selon ce qu'on a démontré dans le Tome III sur le mouvement uniforme de l' intersection du rayon vecteur avec la corde, & qui a été le fondement principal pour la théorie des comètes; mais alors la flèche V'*u*; dont je m' en vais faire usage, seroit trop petite. Or on peut prendre pour le retour un intervalle de temps même d'un mois entier, comme on le verra ci-après, & les deux intervalles de temps égaux: alors l'égalité exacte des secteurs TST', T'ST'', & VSV', V'SV'', & la presqu' exacte des segments TT', T'T'', & VV', V'V'' surtout dans des orbites si peu excentriques, comme sont celles de la terre, & de Vénus, rendront presque tout-à-fait exactement égaux les triangles TST', T'ST'', & VSV', V'SV'', qui sont entr'eux comme T*t*, *t*T'', & V*u*, *u*V'': ainsi sans craindre aucune erreur sensible on peut considérer ces deux parties de chacune de ces deux cordes, comme égales entr'elles, & par conséquent la ligne *tu* comme parallèle aux lignes TV, T''V'', parallèles entr' elles, dont la position est donnée par les deux longitudes extrêmes égales.

4. Cette ligne rencontrera la seconde direction T'E' en un point B en y formant un angle T'B*t* égal à la différence, que ces deux longitudes extrêmes ont à la seconde, & par conséquent donné: ainsi on pourra trouver aussi la ligne T'B, parcequ' on aura la flèche T'*t*, qu' on pourra prendre pour égale au sinus verse de la moitié de l' arc TT'' mouvement de la terre au rayon de la distance moyenne de la terre au soleil faite = 1, &

dans

dans le triangle T'Bt on aura encore l'angle en B, qui est la différence de ces longitudes, & l'angle BT't, qui est le supplément de ST'E', élongation de Vénus au soleil, c'est-à-dire différence connue des longitudes du soleil & de Vénus dans le temps de sa seconde longitude : ainsi si l'on conçoit la ligne Bt prolongée indéfiniment en e, on aura le point B, & l'angle ÈBe donné.

5. Or on aura aussi la flèche V'u, que l'on pourra prendre sans rien craindre pour le sinus verse de la moitié de l'arc VV'' considéré comme arc d'un cercle du rayon égal à la distance moyenne de Vénus au soleil : on le trouvera en degrés & minutes, en prenant le quatrième terme proportionnel après le temps périodique de Vénus, que nous supposons connu, le temps écoulé entre les deux positions extrêmes, & 360 degrés : la petitesse de l'excentricité de l'orbite de Vénus permet de considérer pour cet objet cette orbite comme circulaire, & sa projection sur le plan de l'écliptique comme elle-même. Ainsi pour trouver le point V', qui donne la distance & la direction du rayon vecteur SV', le problême se réduira à l'autre de tirer par le point S donné une ligne droite SV' de manière, que son segment uV' intercepté entre les côtés de l'angle ÈBe donné soit égal à une ligne droite donnée. C'est un problême très-connu, qui pourtant va jusqu'au quatrième degré, & j'en ai donné la solution avec tout le plus grand détail dans le Mémoire Correlatif VI du premier Opuscule du Tome III, & une construction graphique aidée d'un calcul numérique fait par la règle de la fausse position la rend très-facile.

6. Si l'on vouloit avoir le point V' avec beaucoup moins de danger du côté des quantités négligées, on pourra bien retenir le parallélisme de la ligne tu, avec les deux TV, T''V'', dans lequel il n'y a rien à craindre, & qui donne presqu'avec la dernière exactitude le point B, & l'angle ÈBe, & tirer la valeur de la flèche V'u d'un calcul fondé sur les tables, qui ne peuvent donner une erreur dans cette valeur, qui ne soit très-petite par rapport à elle-même. On trouvera par ce calcul les trois distances

rac-

raccourcies SV, SV', SV'', & les trois longitudes, d'où l'on tirera les angles VSV'', VSV': dans le triangle VSV'' sachant encore les côtés SV, SV'' on trouvera l'angle SVV', & SVV'', c'est-à-dire SV*u* : ainsi dans le triangle VS*u* on aura le côté SV, & les deux angles en S, & V, ce qui donnera le côté S*u*, dont la différence à la distance SV' donnera la flèche V'*u* à placer dans l'angle donné ÈB*e*. On pourroit même après qu'on auroit rectifié la théorie par la méthode, que nous continuerons à développer, renouveller le calcul pour corriger la valeur de cette flèche, & l'employer pour trouver de nouveau le point V', & pour la continuation de tout le reste.

7. Mais on peut s'y prendre aussi de la manière suivante, qui peut donner le point V' par la simple Trigonométrie plane. Premièrement dans les triangles TST', T''ST', on saura les angles en S par la différence des longitudes du soleil avec les côtés terminés au point S, qui sont les distances du soleil à la terre : ainsi on trouvera les bases TT', T''T', & les angles ST'T, ST'T''. Comme on saura l'angle ST'L différence de la seconde longitude géocentrique de Vénus & du soleil, on saura l'angle TT'L = ST'T − ST'L, & T''T'L = ST'T'' + ST'L, avec T''T'L' supplément de ce second. On aura aussi dans les deux triangles TT'L, T''T'L' les angles en L, & L', dont chacun est la différence de la seconde longitude de Vénus aux deux extrêmes égales entr'elles : ainsi on trouvera les côtés T'L, T'L', & leur somme LL'. Par les tables de Vénus on pourra trouver comme auparavant la flèche V'*u*, dans les triangles VSV'', VS*u* résolus comme auparavant la corde VV'', sa partie V*u*, & l'angle AV'*u* différence de la seconde longitude géocentrique de Vénus, qui a la direction T'V'E', & de sa longitude héliocentrique tirée des tables, & augmentée ou diminuée de *6* signes pour substituer la direction V'S à la direction SV'. Dans le même triangle SV*u* on trouvera l'angle S*u*V supplément de l'angle A*u*V' : ainsi dans le triangle AV'*u* ayant le côté V'*u* avec les deux angles en V' & *u* on trouvera les deux autres AV', A*u*. On pourroit bien les avoir plus aisément par la seule flèche V'*u*, en prenant l'angle A*u*V' pour droit,

droit, ce qui donneroit $AV' = \frac{V'u}{cos.AV'u}$, & $Au = V'u \times tan.AV'u$. Alors on auroit $AV = Vu - Au$, & la raison de VV' à VA. Comme dans les triangles VLA, V''L'A on a les côtés VA, V''A proportionnels aux côtés AL, AL', on aura aussi la proportion suivante, VV'' : VA : : LL' : LA. La raison seule des deux premiers termes tirée des tables, dans laquelle il paroît bien, qu' on ne peut pas craindre une erreur, qui tire à conséquence, ou qui ne puisse être corrigée par un renouvellement de calcul, & le troisième terme trouvé exactement, donneront le quatrième, & le point A: en y ajoutant la ligne AV' on aura LV', qui donnera le point V'.

8. Mais il faudra trouver la longueur, & la direction du rayon vecteur SV', qu' on avoit tiré des tables. On les trouvera à l' aide du triangle T'SV'. On y a l' angle ST'V', & le côté ST' déjà trouvés indépendamment des tables de Vénus, & T'V' = LT' — LV', dont le premier terme est trouvé aussi indépendamment d' elles, & le second LV' par le détour exposé: on y trouvera le rayon SV' & l'angle en V' supplément de l'angle SV'A, qu'on avoit tiré des tables, pour trouver la flèche V'u, & à son aide les lignes AV', Au. Si l' on ne trouve ce rayon, & ces lignes, on peut se servir de ces nouvelles valeurs, pour refaire le calcul jusqu'à ce, qu' on trouve l'accord de ces deux termes, & on réservera la correction de tout le reste à la fin de toutes les opérations à faire pour trouver tous les éléments jusqu'à l'accord de tout ce qu' on auroit pris de tables avec ce qu' on aura trouvé par les détours proposés: mais il y a bien de l' apparence, que le premier résultat après la seule valeur V'u prise des tables pour la première des deux manières proposées, & elle avec la raison des lignes VV'', VA, & avec la ligne V'A à ajouter à la ligne LA dans la seconde suffira pour avoir avec une exactitude suffisante la distance raccourcie SV', & l' angle SV'L, qui comparé avec la direction V'E' de la seconde longitude de Vénus donnera la longitude du soleil vu de Vénus dans la direction V'S, & celle-ci par l' addition ou soustraction de six signes donnera la longitude héliocentrique de Vénus.

9. *Dans le même triangle* T'SV' *on trouvera aussi la distance* T'V' *raccourcie à la terre : ayant la latitude géocentrique de Vénus* ou par une observation immédiate, ou par une interpolation entre plusieurs, on trouvera l' héliocentrique par la propriété connue que les tangentes des latitudes héliocentriques sont réciproquement proportionnelles aux distances raccourcies à la terre & au soleil.

10. On trouvera une autre distance raccourcie au soleil, & à la terre avec une autre longitude & latitude héliocentrique à côté de la station suivante, dans laquelle on revient à la même longitude après le passage du mouvement rétrograde au direct, & je ferai voir ci-après comment en employant ces deux distances, & ces deux longitudes & latitudes hélioncentriques on trouvera le lieu du nœud, & l' inclinaison de l' orbite : on passera delà aux rayons vecteurs, & aux angles dans le soleil de l' orbite même inclinée telle qu' elle est en elle-même, & en y ajoutant la distance moyenne, on trouvera tous les autres éléments. Mais auparavant je ferai voir ici, qu' on peut avoir les arcs TT'', VV'', & les angles en L, & L' assez grands pour avoir assez grande la flèche V'*u*, & l' inclinaison de la seconde longitude aux deux extrêmes, & par-là pouvoir espérer un bon succès de la méthode exposée.

11. Je me servirai pour cet objet des Éphémérides de Milan pour l' année 1785, où on a les longitudes de Vénus, qu' on voit dans la petite table mise ici à côté. On voit bien, que la dernière longitude du 25 Mai se trouve entre le 19, & 25 d'Avril, & par interpolation on la trouve le 21 : ainsi il y a 34 jours d' intervalle, dans lequel temps le soleil parcourt presque 33 degrés. Le temps du milieu tombe vers le 8, où la longitude de Vénus est à-peu-près $2^{s}.17^{\circ}.15'$, ce qui donne la différence de la seconde longitude aux deux extrêmes de $5^{\circ}.11'$: ainsi l'arc TT'' de la terre est assez grand, & beaucoup plus grand l' arc VV'' de Vénus, & l' an-

		long. ♀
Avr.	19	$2^{s}.11^{\circ}.2'$
	25	14.11
Mai	1	16.21
	7	17.20
	13	16.57
	19	15.7
	25	12.4

angle en L, L', B assez grand. J'ai adapté la figure aux deux orbites prises pour circulaires avec les rayons en raison de 10 à 7; j'ai pris *la position* des points T, T', T'' par rapport à l'écliptique héliocentrique avec les signes 3, 6, 9, qu'on y voit marqués, ayant tiré les lignes TE, T''E'' parallèles dans la direction, qui convient aux deux longitudes extrêmes géocentriques, ce qui m'a donné les points V, V'', qu'on y voit, & qui ne peuvent être si éloignés de la vrai position, à ne pouvoir représenter suffisamment le cas aux yeux: j'ai incliné un peu plus la direction T'E' pour empêcher les points L, L' d'aller trop loin & allonger la figure par rapport aux rayons des cercles, qu'on ne devoit pas faire trop petits, pour rendre assez visibles les flèches T'*t*, V'*u*; mais je n'ai pas trop forcé cette direction aussi: j'ai obtenu par-là non seulement les arcs TT', T'T'' sensiblement égaux, mais encore les VV', V'V'' très-peu éloignés de l'égalité, ce qui a donné aussi le parallélisme apparent de la ligne *tu* aux directions TE, T''E'', & toute la figure assez propre pour guider le calcul, si l'on vouloit l'entreprendre, & pour faire voir, qu'il y a de l'espérance de quelque succès, si l'on vouloit le faire d'après des observations faites à circonstances peu éloignées de celles-là.

12. Quand on aura deux longitudes héliocentriques avec ses latitudes, on trouvera le lieu du nœud, & l'inclinaison de l'orbite de la manière suivante dans la figure 4. Elle est adaptée au cas particulier des deux retours à la même longitude de cette même année 1785, dans lequel le premier a lieu vers le 8 Mai, avec une latitude boréale, & le second vers le 22 Juin avec une australe: ainsi le nœud descendant tombe entre les deux lieux de Vénus: mais on transportera aisément la solution à tout autre cas en y adaptant la figure. Soit VNV' l'intersection du plan de l'orbite de Vénus avec la surface de la sphère céleste concentrique au soleil, V, V' les deux lieux de Vénus dans ce cercle, N ce nœud, qui est son intersection avec l'écliptique de la même surface, & VB, V'B' deux arcs perpendiculaires à la même écliptique: ceux-ci seront les deux latitudes héliocentriques, & les points B, B' marqueront sur la même écliptique les deux longitudes: M, M' sont

 deux

deux points, qui coupent par le milieu les arcs BB', VV' : j'ai fait les arcs BV, B'V' à-peu-près dans le rapport des latitudes héliocentriques, mais un peu plus grands pour les rendre visibles. Dans les triangles rectangles NBV, NB'V' par les théorèmes de la Trigonométrie sphérique le rayon est à la tangente de l'angle en N comme le sinus du côté NB à la tangente du côté VB, & comme le sinus du côté NB' à la tangente du côté V'B' : par conséquent on aura les proportions suivantes, *sin.*NB : *sin.*NB' : : *tan.*VB : *tan.*V'B', & *tan.*VB + *tan.*V'B' : *tan.*VB − *tan.*V'B' : : *sin.*NB + *sin.*NB' : *sin.*NB − *sin.*NB' : : *tan.*$\frac{1}{2}$(NB + NB') = *tan.*MB : *tan.*$\frac{1}{2}$(NB − NB') = *tan.*MN. On a les deux premiers termes de cette dernière proportion par les deux latitudes héliocentriques connues, & le troisième par la différence des deux longitudes connues aussi, qui est BB', & dont la moitié MB reste aussi connue ; ainsi on a le quatrième, qui donne l'arc MN, & NB = MB + MN, & celui-ci étant ajouté à la première longitude du point B donne celle du nœud N. On aura aussi l'arc BN par les arcs MN, & MB, d'où l'on tirera l'angle N, qui est l'inclinaison de l'orbite ; puisque sa tangente par la première proportion énoncée ci-dessus sera $= \frac{tan.\mathrm{VB}}{sin.\mathrm{NB}}$.

13. Pour ne pas employer la somme, & la différence des tangentes, on peut concevoir les arcs BV, V'B' prolongés jusqu'au pôle P de l'écliptique : alors dans le triangle VPV' on aura les deux côtés, PV = 90° − BV, P'V' = 90° + B'V', & l'angle VPV', qui est la différence des longitudes. On y trouvera le côté BB' : alors on aura par les théorèmes de la Trigonométrie sphérique employés ordinairement pour cet objet, dont on a fait usage aussi dans les Tomes précédents les proportions suivantes, *sin.*VB : *sin.*V'B' : : *sin.*NV : *sin.*NV', & *tan.*$\frac{1}{2}$(VB + V'B') *tan.*$\frac{1}{2}$(V'B' − VB) : : *tan.*$\frac{1}{2}$VV' = *tan.*M'V : *tan.*M'N. Cela donnera l'arc M'N, & celui-ci avec M'V fera connoître NV, d'où l'on tirera l'inclinaison de l'orbite VNB par son sinus $= \frac{sin.\mathrm{VB}}{sin.\mathrm{NV}}$, & l'arc NB par son co-sinus $= \frac{cos.\mathrm{NV}}{cos.\mathrm{BV}}$, qui étant ajouté à la lon-

longitude du point B, ou en étant ôté, comme ci-dessus, donnera la longitude du nœud N (*).

14. Ayant la longitude du nœud N, & l'arc NV à y ajouter, ou en ôter, on trouvera la longitude du point V dans l'orbite, & l'arc VV' ajouté ou ôté donnera celle du point V'. On sait par les premiers éléments de l' Astronomie, qu' on a le rayon vecteur en divisant la distance raccourcie par le co-sinus de la latitude héliocentrique, & comme elle est bien petite, son changement, même assez sensible, n' apporte qu' une erreur insensible dans la valeur de ce rayon : de même si on tiroit l'arc NV de l'arc BN sensiblement fautif en faisant son co-sinus = *cos.*NB × *cos.*BV, la différence entre les arcs NB, NV, qui donne la différence de la longitude dans l' écliptique déterminée en B, à celle dans l' orbite, dont nous allons faire usage, ne seroit pas sensiblement fautive.

15. Soit à présent S (fig. 5) le soleil dans le centre du cercle VNV' le même, que dans la fig. 4, avec les points V, N, V' les mêmes aussi, & SD, SD' dans les rayons SV, SV' égaux à ceux qu' on aura trouvés dans le numéro précédent pour rayons vecteurs : ainsi les points D, D' seront les deux vrais lieux de Vénus dans son orbite réelle. On trouveroit aisément son foyer supérieur F, s' il s' agissoit d' une construction géométrique. On l' auroit par l' intersection de deux cercles, dont les centres seroient en D, & D', & les rayons les excès du double de la distance moyenne, qui est la longueur du grand axe de l' orbite elliptique de Vénus, sur chacun des deux rayons SD, SD'. Il y auroit deux intersections F & F', & deux rayons tirés par S & par F & F', dont chacun pourroit déterminer le lieu de l' aphélie dans l'or-

(*) La longitude du nœud, & l'inclinaison de l'orbite trouvée par cette méthode ne sera jamais aussi exacte, & sûre, comme celle, qu' on a déjà surtout après les passages de Vénus par le disque du soleil : on la met pourtant ici pour faire voir la liaison géométrique de ces objets : mais pour avoir ce qui nous sera nécessaire pour trouver l' excentricité, & le lieu de l' aphélie, il suffit d' avoir le lieu du nœud, & l' inclinaison de l' orbite par un à-peu-près.

l' orbite en A ou A', & on auroit l' indétermination du problême tant pour *le lieu* de l' aphélie, que pour l' excentricité SF ou SF': mais *l' incertitude* seroit ôtée par la *petitesse* de la même excentricité, qui empêche de prendre le point F' placé par rapport à la ligne DD' du côté opposé au premier foyer S.

16. Comme il faut employer le calcul numérique, on s'y prendra de la manière suivante. On aura dans le triangle DFD' les deux côtés DF, D'F égaux, comme on a *dit*, aux deux excès du double de la distance *moyenne sur les rayons SD*, SD' trouvés. On aura aussi le *côté* DD' tiré du triangle DSD', où l' on connoît les deux rayons SD, SD' avec l' angle en S mesuré par l' arc VV' le même que dans la fig. 4., qui est la différence des deux longitudes héliocentriques dans l' orbite. Si l' on conçoit les lignes FB, SE perpendiculaires à la base DD' avec FI perpendiculaire à la SE; on aura par les propositions élémentaires du second livre d' Euclide, les lignes DE, DB, dont la première dans le cas indiqué par la figure sera $= \frac{DS^2 + DD'^2 - D'S^2}{2DD'}$, & la seconde $\frac{DF^2 + DD'^2 - D'F^2}{2DD'}$. Ainsi on aura FI = BE = DB — DE, & ayant trouvé dans les triangles rectangles DFB, DSE la ligne FB par l' hypothénuse DF & par le côté DB, & de même SE par l' hypothénuse DS, & par le côté DE, on aura SI = SE — FB. Alors dans le triangle rectangle SIF on trouvera la distance SF double de l' excentricité SC par les côtés SI, IF avec l' angle FSI: on aura encore dans le triangle DES l' angle en S, ainsi on trouvera l' angle FSD, c'est-à-dire ASV différence de la longitude dans l' orbite de l' aphélie A au lieu V de Vénus. On ôtera VN de VA, qui est la mesure de cet angle pour avoir AN, qui sera la distance de l' aphélie A au lieu du nœud, par où on connoîtra le lieu du même aphélie dans l' orbite. De cette manière on aura ces deux éléments aussi, qui étoient les moins certains, qu' on pourroit employer avec les autres pour refaire tout le calcul; mais on aura d' autres méthodes ci-après, qui donneront plus d' espérance d' un plein succès.

OPU-

OPUSCULE VIII.

MÉTHODE POUR CORRIGER LES ÉLEMENTS D' UNE COMETE, DONT ON A LA LONGITUDE DU NŒUD, ET L' INCLINAISON DE L' ORBITE PAR UN À-PEU-PRÈS.

1. CETTE méthode est fondée sur la solution d' un problême, qui se trouve aussi dans le Mémoire Correlatif III après le premier Opuscule du Tome III : mais ici elle est dégagée de beaucoup d' autres objets, qui s' y trouvent mêlés dans ce Mémoire : il y aura des opérations, qu' on a déjà proposées dans le même Mémoire ; mais le tout y est mis mieux sous un seul coup d' œil, & il y a des transformations de plusieurs formules, qui rendent les opérations mêmes plus simples. Voici ce problême avec sa solution.

2. *La longitude du nœud, & l' inclinaison de l' orbite étant données, trouver la longitude héliocentrique, & la distance au soleil d' une comète, dont on a la longitude, & latitude géocentrique à un temps donné.*

3. Les points S, T, C, P (Tab. IX fig. *6*) avec la ligne SN, sont les lieux du soleil, de la terre, de la comète sur son orbite, ce dernier réduit à l' écliptique, & la ligne des nœuds : PDC est le plan perpendiculaire à la ligne SN en D.

4. L' angle PDC sera l' inclinaison de l' orbite, PTC la latitude géocentrique, dont les tangentes sont $\frac{PC}{PD}$, $\frac{PC}{PT}$: ainsi on a $\frac{PT}{PD} = \frac{tan.inclin.}{tan.lat.}$: TP est la direction de la longitude donnée, DP celle d' une longitude différente de celle du nœud de *90*°: ainsi on aura l' angle TPD par la différence de ces longitudes. On y trouvera par-là les angles TDP, PTD, qui sont déterminés par la raison des côtés avec l' angle intercepté.

5. On

5. On aura par-là l'angle TDS, qu'on trouve par la différence de l' angle TDP à SDP $= 90°$, ou par leur somme selon les différents cas : on a l' angle TSD différence de la longitude héliocentrique de la terre à celle d' un des nœuds : ainsi on aura l'angle STD supplément de la somme de ces deux.

6. On a la distance ST de la terre au soleil : par-là $SD = \frac{ST \times sin.STD}{sin.TDS}$, $TD = \frac{ST \times sin.TSD}{sin.TDS}$, $DP = \frac{TD \times sin.PTD}{sin.TPD} = \frac{ST \times sin.TSD \times sin.PTD}{sin.TDS \times sin.TPD}$: ainsi on aura $tan.DSP = \frac{DP}{SD} = \frac{sin.TSD \times sin.PTD}{sin.TPD \times sin.STD}$.

7. Cela donnera cet angle sans avoir besoin de trouver aucun côté. On aura alors de même l' angle DSC, dont la tangente est $\frac{tan.DSP \times DC}{DP} = \frac{tan.DSP}{cos.incl.}$.

8. Comme on a la longitude de la ligne SN, qui est celle d' un des nœuds, en y ajoutant, ou en ôtant l' angle DSP, on aura la longitude héliocentrique de l' astre dans l' écliptique, & de même par l' angle DSC on l' aura dans l' orbite.

9. La distance raccourcie SP sera $= \frac{SD}{cos.DSP} = \frac{ST \times sin.STD}{sin.TDS \times cos.DSP}$, & la distance $SC = \frac{SD}{cos.DSC} = \frac{ST \times sin.STD}{sin.TDS \times cos.DSC}$.

10. On aura ainsi par un calcul très-simple & facile la longigitude dans l' écliptique, & dans l' orbite, la distance au soleil raccourcie, & l'entière. On trouvera, si l'on veut, aussi $TP = \frac{TD \times sin.TDP}{sin.TPD} = \frac{ST \times sin.TSD \times sin.TDP}{sin.TDS \times sin.TPD}$, $TC = \frac{TP}{cos.PTC} = \frac{TP}{cos.lat.}$, & $sin.PSC = \frac{PC}{SC} = \frac{TP \times tan.lat.}{SC}$, ce qui donnera la distance raccourcie à la terre, la distance entière à la terre, & la latitude héliocentrique ; & si l'on veut cette dernière sans avoir besoin des lignes TP, SC, il suffit d' employer leurs valeurs trouvées, ce qui fera encore disparoître trois valeurs communes,

qui

qui y entrent ; on aura $\frac{sin.TSD \times sin.TDP \times cos.DSC \times tan.\,lat.}{sin.TPD \times sin.STD}$.

11. L'application de ce problême à l'objet proposé est fondée sur ma *méthode* graphique, ou trigonométrique d'approximation, exposée dans le Tom. III. On trouve aisément par cette méthode la direction de la ligne des nœuds, & l' inclinaison de l' orbite, qui ne seront pas exactes, mais qui ne seront pas trop éloignées des *véritables*. En employant ces deux *éléments*, on trouvera deux longitudes *héliocentriques*, avec les deux distances au soleil, qui répondent à deux observations éloignées : on trouvera aisément par la méthode commune les éléments de l' orbite, & la longitude & latitude géocentrique, qui répondent au temps d' une troisième : on marquera les erreurs, qu' on appellera e, e' (*). On fera un changement arbitraire $= m$ à la longitude du nœud, plus grande, ou plus petite, selon la grandeur de l' erreur, & ayant refait l' opération, on trouvera les nouvelles erreurs de la même longitude & latitude : on appellera p, q leur différence aux précédentes, que l'on considérera positive, ou négative, selon que l' erreur aura diminuée, ou augmentée. On reprendra la longitude du nœud, qu' on avoit changé, & l'on fera un changement m' à l'inclinaison. En répétant l'opération on trouvera la diminution, ou augmentation nouvelle p', q' des mêmes erreurs.

12. En appellant x, x' les changements, qu' on devra faire pour détruire les erreurs e, e', la variation des erreurs sera pour la longitude $\frac{px}{m} + \frac{p'x'}{m'} = e$, & $\frac{qx}{m} + \frac{q'x'}{m'} = e'$, d' où l' on tirera les valeurs x, x', par lesquelles on corrigera les deux éléments de l' orbite : autrement on répétera l' opération, comme dans toutes les méthodes des fausses positions.

13. On peut employer pour avoir une des deux erreurs e, e' le

 temps

(*) C' est la même méthode, que celle qu' on trouve aussi dans ce Mémoire Correlatif au num. 45 ; mais les quantités qu' on change, & celles, dont on doit détruire les erreurs, ici sont différentes. Le fond de la méthode est le même.

temps écoulé entre la première observation & la seconde : on trouve aisément ce temps relativement à chaque position par la distance périhélie, & par les anomalies des rayons vecteurs. Ainsi comme les trois erreurs de la longitude, de la latitude, & du temps donnent trois binaires, on aura aisément trois binaires d' équations, dont chacun donnera les changements cherchés, & en choisissant un milieu, on aura plus de sureté.

14. On fera beaucoup plus aisément toute cette opération par construction. On tirera sur le papier pris pour le plan de l' écliptique dans la direction de la longitude héliocentrique de la terre la ligne ST égale à sa distance au soleil, & les lignes SN, TE indéfinies dans celle de la longitude du nœud, & de la comète. On prendra TA sur la TE, qui soit égale à la distance moyenne de la terre au soleil $= 1$, en employant pour unité les 100, ou 1000 parties d' une échelle. On trouvera la valeur numérique de la fraction $\frac{tan.lat.}{tan.incl.}$, & ayant tiré par A une ligne perpendiculaire à celle des nœuds, on y portera cette valeur prise sur l' échelle en AB. On tirera par T, & B une ligne, qui rencontrera celle des nœuds en D, & par D une autre parallèle à la ligne BA, qui rencontrera la ligne TE en P. On appliquera sur un compas de proportion la ligne DP aux nombres 100, & on y prendra la valeur de la sécante de l' inclinaison de l' orbite, qui répond au rayon 100 dans la table des sinus pour la porter sur la DP prolongée en D*c*. Le point P sera le lieu de la comète sur l' orbite projetée, & *c* celui de l' orbite appliquée. Parcequ' on aura $\frac{PD}{PT} = \frac{AB}{AT} = \frac{tan.lat.}{tan.incl.}$, & $Dc =$

$$DP \times sec.incl. = \frac{DP}{cos.incl.} = DC.$$

15. Ayant les deux points *c* correlatifs aux deux premières observations, on aura aisément la directrice, tangente commune de deux cercles tirés avec le centres *c* & les rayons *c*S. La ligne perpendiculaire à la directrice, tirée par le soleil donne la direction de l' axe, & sa moitié la distance périhélie avec le sommet

met de la parabole. Ayant tiré la troisième TE, on trouvera sur elle par la même construction le point c. On verra, si la distance de celui-ci à la directrice est égale à sa distance au point S: la différence sera une des erreurs e. La distance périhélie avec les trois anomalies, ou les trois distances Sc donneront les temps, qui devoient être écoulés entre l'arrivée au périhélie & les trois observations. Les deux différences du premier aux deux autres devroient être égales aux intervalles entre la première observation, & les deux dernières. Cela donnera deux autres erreurs e, & un des trois binaires déterminera les corrections cherchées.

16. On peut tirer les intervalles des temps par ma méthode graphique, en appliquant la distance périhélie sur un compas de proportion aux nombres, qui expriment les jours de l'anomalie $= 90°$, que l'on trouve aisément par son logarithme, qui est la somme du logarithme de 109,6, du logarithme de la distance périhélie, & de la moitié de celui-ci. Ayant coupé par le milieu la distance périhélie par une ligne perpendiculaire à l'axe, on y trouvera aisément les trois points, qui ont la même distance au soleil S, & à chacun des points c. La distance du premier aux deux autres portée sur le compas de proportion donnera les intervalles des temps à comparer avec ceux des observations.

17. Si l'on ne veut pas employer les temps; on fera la correction sans avoir besoin de l'axe, par la seule directrice; mais en employant quatre observations. On trouvera quatre points c: on déterminera la directrice par deux entr'eux, & la différence de la distance de chacun des deux autres au soleil, & à cette directrice donnera les deux erreurs à employer pour la correction. Cette méthode est très-courte, & si l'on prend des observations assez éloignées, & dont les latitudes ne soient pas trop petites; on obtiendra par la seule construction une orbite bien peu éloignée de la véritable.

OPUSCULE IX.

MÉTHODE ANALOGUE POUR TROUVER L'ORBITE ELLIPTIQUE QUAND LA PARABOLIQUE NE S'ACCORDE ASSEZ AVEC LES OBSERVATIONS.

1. LE sujet de cet Opuscule est énoncé différemment dans le catalogue imprimé, où on a mis par faute *Autre Méthode analogue pour le même objet, & même pour trouver l'orbite elliptique, quand la parabolique &c.* La méthode a le même fondement, que la précédente, & l'objet est différent : celui-là étoit la correction des éléments d'une comète, c'est-à-dire de ceux qu'on employe généralement dans leur théorie, qui considère leur orbite, comme parabolique, & celui-ci est la recherche de l'orbite elliptique, quand la parabole trouvée selon la théorie ne satisfait pas à toute la suite des observations en donnant des différences plus grandes, que celles qui peuvent être produites par des erreurs des observations faites avec soin. La méthode dans cet Opuscule-ci a pour fondement la solution du même problême, qu'on a proposé, & résolu dans l'Opuscule précédent.

2. Le Mémoire Correlatif III du Tome III, dont j'ai parlé dans l'Opuscule précédent avoit le même objet, que cet Opuscule-ci, & comme je l'ai dit là aussi, il y a dans le même Mémoire la solution du même problême, mais elle y est mêlée avec d'autres objets, & le fondement de la méthode principale, que j'y ai développée, est bien différente.

3. On commencera par employer la méthode que j'ai proposée dans l'Opuscule I Tome III pour déterminer la position de la ligne des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite. Elle ne donnera ces deux éléments, que par un à-peu-près, même lorsqu'on l'employe dans ce Tome pour l'orbite parabolique ; mais cela suffit ici pour y pouvoir faire usage du théorème indiqué. On l'expose

posé dans le §. VIII de ce même Opuscule la manière de trouver par une construction graphique la distance de la comète dépendamment de trois longitudes observées pas trop éloignées entr' elles avec leurs latitudes, & dans le §. IX celle de trouver aussi par une construction graphique tous les éléments de l'orbite, dont les premiers sont les deux nommés, c'est-à-dire la position de la ligne des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite.

4. Pour le premier objet on employe la vîtesse de la comète, qui répond à la théorie du mouvement dans une parabole, dont le quarré est double du quarré de la vîtesse dans un cercle du rayon égal au rayon vecteur de la comète: on part de ce principe pour former le premier jugement de la distance, & position de la corde de l'arc parcouru par la comète rapportée à la corde de l'arc parcouru par la terre, & on y ajoute un rapport, qu' ont les distances raccourcies entr' elles: on corrige cette distance par la comparaison de la formule $bc^2 + \frac{c^4}{12b} = a$, où c est la corde de l'arc de la comète, b la somme des deux rayons vecteurs extrêmes, a une valeur, qui dépend du mouvement moyen de la terre dans une minute de temps, & du nombre des minutes du temps écoulé entre le observations extrêmes. Toute cette méthode reste la même, quand on fait la substitution d' un arc elliptique au parabolique hors de la valeur a, qu' on doit prendre plus petite, à cause de la vîtesse elliptique moindre de la parabolique à parité de distance au soleil, & la méthode employée dans ce Mémoire III est appuyée au changement convenable de cette valeur. Quand on a trouvé les distances, on peut trouver la position de la ligne des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite par une méthode exposée dans ce paragraphe, qui est totalement commune à l'orbite parabolique, & à l'elliptique.

5. Quand il s'agit de trouver assez exactes les distances, il faut trouver avec exactitude la valeur a, qui leur convient dans l'hypothèse elliptique; mais pour avoir ces deux éléments seuls, comme ici, par un à-peu-près, il suffit d'avoir cette valeur pas trop éloignée de l'exacte, & celle qui convient à l'arc parabolique ne

peut

peut pas être trop éloignée de celle, qui convient à l' elliptique, parceque la vîtesse dans l' ellipse, qui peut appartenir à l' orbite d' une comète toujours beaucoup allongée, ne peut pas être tr[illegible] éloignée de celle qu' on doit avoir dans la parabole. Ainsi pou[illegible] déterminer ces deux éléments à l' usage de l' objet de cet Opuscule-ci, il suffit d' employer toute la méthode exposée dans les deux paragraphes de l' Opuscule I de ce Tome III indiquee ci-dessus, comme s' il s' agissoit de l' orbite parabolique. On aura déjà fait cette opération, quand on aura cherché la parabole par trois observations, & qu' on l' aura trouvée sans avoir l' accord des autres lieux calculés avec les observés. Ces éléments trouvés de cette manière ne pourront pas être trop éloignés des véritables: ils seront suffisants pour s' en servir dans la méthode des fausses positions, qui les corrigera, en faisant disparoître les erreurs, qui en dérivent.

6. Après cette première détermination fautive de ces deux éléments on s' y prendra de la manière suivante pour les corriger. Par la solution du problême de l' Opuscule précédent en employant cette position de la ligne des nœuds, & cette inclinaison de l' orbite on trouvera trois rayons vecteurs, comme le rayon SC de la fig. 7 de cette même planche IX (*) avec leurs longitudes héliocentriques, chacune pour chacune de trois observations, qui auront fourni les trois longitudes & latitudes géocentriques. Ces trois rayons avec leurs longitudes héliocentriques donneront la forme, la grandeur, la position de l' ellipse, qu' on trouvera par le procédé que nous exposerons ci-après, & par la méthode employée dans le même Mémoire Correlatif III du Tome III on trouvera les aires des deux secteurs interceptés entre les deux premiers, & les deux derniers rayons: ces aires avec l' aire totale de l' ellipse donneront les deux temps, qui devroient leur répondre;

(*) Dans les ellipses des comètes on aura tous les points C très-éloignés de l' a-phélie A, & très-peu du périhélie V; mais on a changé leur position p[illegible]rement pour éviter la confusion de tant de lignes trop peu éloignées e[illegible]r' elles, & après pour faire servir les mêmes figures aussi pour l' Opuscule sui-vant, qui aura pour objet les ellipses des planètes.

dre : les différences de ces temps à ceux, qu' on aura tirés des observations mêmes, donneront les deux erreurs e, e'. On employera les variations des deux éléments fautifs l' une après l' autre, qu' on appellera m, m' : on trouvera comme au num. 11 de l' Opuscule précédent les nouvelles erreurs produites par la première variation, & on appellera p & q les diminutions qu' on aura obtenu par-là de celle qu' on avoit trouvé d' abord & appellées e, e', bien entendu, que si à la place des diminutions on trouve des augmentations, on considérera les valeurs p, q comme négatives. Après la seconde variation on trouvera de nouveau les erreurs, dont la comparaison avec les primitives e, e' donnera les nouvelles diminutions, qu' on appellera p', q'. En nommant ici aussi x, x' les variations capables de détruire tout-à-fait ces erreurs, on aura les mêmes équations $\frac{px}{m} + \frac{p'x'}{m'} = e$, & $\frac{qx}{m} + \frac{q'x'}{m'} = e'$, qui donneront les valeurs x, x' cherchées.

7. Si l' on ne veut pas chercher les temps par les aires des deux secteurs ; on pourra employer deux autres observations pour trouver deux autres points de l' orbite par la même solution de ce problême, & comparer la distance au foyer de chacun d' eux avec sa distance à la directrice. Dans la parabole cette seconde doit être égale à la première, dans l' ellipse elle en doit être plus petite en raison de l' excentricité au grand demi-axe. Ainsi on trouvera aisément la valeur que cette seconde devroit avoir, en prenant la valeur quatrième proportionnelle après l' excentricité, le demi-axe, le rayon vecteur, dont on aura trouvé toutes les trois valeurs. On trouvera aisément la distance de ce point à la directrice déjà trouvée : la différence de ces deux valeurs sera son erreur e : de cette manière on en aura deux pour trouver les deux variations x, & x', qui anéantiront les erreurs du lieu du nœud, & de l' inclinaison de l' orbite, dont on tirera de nouveaux trois longitudes, & latitudes héliocentriques, & par leur moyen tous les éléments de l' orbite cherchée.

8. Cette seconde méthode est beaucoup plus simple pour l' exécution, parcequ' on trouve avec beaucoup moins de calcul la di-

stan-

stance à la directrice, que l' aire du secteur ; mais elle exige un arc assez considérable pour y avoir cinq observations assez éloignées entr' elles, avec des latitudes assez considérables, parcequ' on voit bien, qu' on ne peut pas employer pour cette recherche le problême de l'Opuscule précédent, lorsque la latitude est trop petite. Les petites erreurs inévitables dans les observations ayant un rapport considérable au total porteroient une erreur considérable dans le rapport des tangentes de latitude géocentrique & de l' inclinaison de l' orbite, sur-tout si celle-ci étoit aussi assez petite : les points de l' orbite viendroient trop fautifs pour une recherche si délicate, où leur position doit être trop peu éloignée de celle, qui convient à la parabole, dont l' axe va à l' infini. La même seconde méthode seroit beaucoup plus facile pour l' exécution, si l' on vouloit employer une construction graphique ; mais on ne peut pas se fier à la construction graphique dans cette espèce de recherche. On peut les essayer toutes les deux par le calcul, & j' en espère beaucoup de succès, même de la seconde, quand les latitudes seront suffisamment fortes, & l' inclinaison de l' orbite pas trop petite, ce qui arrive très-souvent aux orbites des comètes, qui ne sont pas resserrées dans un étroit zodiaque, mais vont librement à des angles quelconques avec l' écliptique.

9. Il faut à présent exposer la méthode de trouver l' ellipse par trois rayons vecteurs données avec leurs longitudes. La construction graphique pour déterminer la directrice en est très-simple, & même très-connue, & on en tire très-aisément la position, & la longueur du grand axe, avec le centre, & par conséquent l' excentricité : mais il s' agit ici d' y appliquer le calcul numérique. On verra tout cela dans la fig. 7. On [illegible] les trois rayons vecteurs SC, SC', SC'', qui partent du soleil S dans les directions connues des leurs longitudes, le premier étant le plus court : on adaptera aisément la figure, & tout le procédé à tout autre cas selon les régles de la transformation des lieux géométriques.

10. On trouvera sur les deux derniers les points L, L' avec le cen-

centre S, & l' ouverture égale au premier SC : on tirera les lignes droites LC, L'C, & du point S deux lignes parallèles à celles-là, qui rencontreront les chordes C'C, C''C prolongés en H, & H' : on tirera par ces deux points la ligne droite MM' indéfinie, qui sera la directrice. Parceque si l' on conçoit les droites CG, C'G', C''G'' perpendiculaires à la MM', on aura les proportions suivantes, SC' : SL = SC : : C'H : CH : : C'G' : CG, & SC' : C'G' : : SC : CG : de la même manière mettant par-tout deux accents à la place d' un seul, SC'' : C''G'' : : SC : CG, ce qui est la propriété *essentielle de toute section conique*, qui détermine les deux *points* H, H', *de la directrice par le foyer*, & par les trois points C, C', C'' *de la courbe*. On tirera la ligne SE perpendiculaire à MM', & on la coupera en V en raison de SC à CG, ce qui donnera le point V pour le périhélie. On prendra dans la VS prolongée la distance aphélie SA quatrième proportionnelle après CG — SC, SC, & SE, ce qui rend AE quatrième proportionnelle après SC, CG, SA, comme la nature de l' ellipse l' exige. En coupant AV par le milieu en I on y aura le centre, avec l' excentricité SI. Si l' on a après deux autres points C donnés par la longitude, qui donne la direction du nouveau rayon SC par rapport aux *précédents*, & par la longueur de celui-ci, on prendra *aisément* avec le compas *sa* distance CG à *la* directrice à transporter dans l'échelle, qui aura servi pour la construction du reste : on trouvera aussi aisément la valeur quatrième proportionnelle après une couple des précédentes SC, CG, & le nouveau rayon SC, dont la différence à la valeur trouvée pour la nouvelle CG donnera un des deux erreurs *e* : l'autre se trouvera de même par la seconde des deux observations ajoutées aux trois premières.

11. On ne pourra employer cette méthode pour determiner l' ellipse d' une planète par trois points C : parceque l' excentricité trop petite dans les orbites de toutes les planètes fait aller la directrice à une distance, qui empêche de l'avoir par construction, si l' on ne prend une échelle trop petite pour les rayons vecteurs, ce qui rend trop insensibles les dimensions nécessaires pour éviter les erreurs très-grossières dans les objets cherchés. Les ellipses

des comètes doivent avoir une excentricité très-grande, & même peu différente du demi-axe de manière que la distance VE de la directrice au point du perihélie V ne soit pas beaucoup plus grande que la distance SV de celui-ci au foyer. Mais justement la petitesse de cette différence, qui rend trop petite aussi la différence de chaque SC à CG, empêche d'employer aussi la construction pour la détermination de l'ellipse d'une comète, où les petites erreurs dans le premier terme CG — SC de la proportion indiquée pour trouver SA augmentent trop excessivement l'erreur de ce quatrième terme. Ainsi il faut exposer le procédé du calcul à appliquer à la construction proposée pour trouver l'ellipse, & les distances à la directrice pour la seconde méthode, comme aussi pour la première le calcul, qui donnera la comparaison des temps tirés des aires des secteurs.

12. Dans le triangle CSC' on aura l'angle en S par la différence des longitudes, & les deux côtés SC, SC', qui sont les rayons vecteurs, le tout trouvé en nombres par la solution du problême de l'Opuscule précédent: ainsi on y trouvera l'angle SCC', & son supplément SCH: on trouvera de même l'angle SCC'', & son supplément SCH', d'où on tirera l'angle HCH', qui dans le cas de la figure est leur différence. On trouvera dans le même triangle CSC' la base CC', & par son moyen la ligne $CH = \frac{SL \times CC'}{LC'}$, puisqu'on a $SL = SC$, & $LC' = SC' - SC$. Ayant trouvé de même CH', on aura dans le triangle HCH' les deux côtés CH, CH' avec l'angle en C, ce qui donnera l'angle CH'H, c'est-à-dire CH'G, & par conséquent $CG = CH' \times sin.CH'H$. On aura aussi l'angle $CSA = SCG$ excès de SCH' sur H'CG complément de CH'H, & en concevant l'ordonnée CK, on aura SK & CK en multipliant SC par le co-sinus, & sinus du même CSA. La première ajoutée à $KE = CG$, ou ôtée, selon que l'angle CSA aura été obtus ou aigu, donnera SE, d'où l'on tirera $SV = \frac{SC \times SE}{CG + SC}$, $SA = \frac{SC \times SE}{CG - SC}$, $AV = SV + SA$, $IA = IV = \frac{1}{2} AV$, $SI = IV - SV$, l'angle CSA trouvé sera la

diffé

différence de la longitude dans l' orbite de la direction SA à celle du rayon SC, ce qui donnera la longitude de l' aphélie A, & en y ajoutant, ou en ôtant six signes on aura celle du périhélie. Pour un autre rayon vecteur, qui soit représenté par une autre SC, on aura la différence de sa longitude à celle du périhélie, qui donnera son angle CSE, avec sa valeur $SK = SC \times cos.CSE$: la $CG = SE - SK$ à comparer avec celle, qu' elle devoit être égale au nouveau rayon SC multiplié par l' ancienne CG, & divisée par l' ancienne SC: ainsi on aura l' erreur e, qui sera la différence de ces deux: la seconde des deux observations ajoutée aux trois premières donnera par le même procédé l' erreur e', pour corriger les deux éléments fautifs.

13. Il n' y reste, que de rappeller la méthode pour avoir par le moyen des secteurs elliptiques les deux temps à comparer avec ceux, qu' on tire des observations. Que l' on conçoive (fig. 8) les lignes CK prolongées du côté des points C jusqu' au cercle du diamètre AV en H. Comme on a la longitude de l' aphélie, c' est-à-dire de la direction SA, & celle de chaque rayon SC, on aura chaque angle ASC, qui sera l' anomalie, ou son reste à 360°, qu' on peut appeller A: ainsi on trouvera chaque $CK = SC \times sin.A$. Le petit demi-axe est $= \sqrt{SV \times SA}$, & si on le fait $= B$, on aura $HK = \frac{IA \times SC \times sin.A}{B}$, & l' angle AIH, dont le sinus est $= \frac{HK}{IA} = \frac{SC \times sin.A}{B}$, qu' on prendra toujours obtus dans les ellipses des comètes, où tous les points C seront beaucoup moins éloignés du périhélie V, que le petit axe. L' aire du secteur AIH sera le quatrième terme proportionnel après 360°, l' angle AIH, & l' aire totale du cercle, qui est $= 3{,}1415926 AI^2$, parceque ce nombre est la valeur de la demi-circonférence d' un cercle, qui a le rayon $= 1$, & par conséquent c' est la valeur de ce cercle, & celui-ci est au cercle du rayon IA comme 1 est à AI^2. Le triangle SHI est $= \frac{1}{2} SI \times HK$. On trouvera chaque secteur ASH par la somme ou la différence du secteur circulaire, & de ce triangle. Les trois secteurs ASH

 bien

bien combinés par leur somme ou différence donneront les secteurs HSH', HSH'', qui sont à l'aire totale du cercle, qu'on vient de trouver, comme les secteurs CSC', CSC'' à l'aire totale de l'ellipse ; puisque tant ceux-ci à ceux-là que l'aire de l'ellipse à l'aire du cercle sont en raison de CK à HK, c'est-à-dire de B à IA. Or l'aire totale de l'ellipse est à l'aire du secteur elliptique comme le temps périodique dans la même ellipse au temps, qui convient à ce secteur : ainsi sans déterminer la valeur de l'aire totale de l'ellipse, & du secteur elliptique en nombres, il suffira d'avoir l'aire totale du cercle, celle du secteur circulaire, & le temps périodique de cette ellipse : le quatrième terme proportionnel donnera le temps cherché. On a le temps périodique en multipliant l'année siderale par $IA^{\frac{3}{2}}$, & cette année est $= 31558150''$, comme on a vu au num. 32 de l'Opuscule I du Tome III ; ainsi on a tout ce qu'il faut pour trouver aussi en secondes le temps du secteur à comparer avec celui, qu'on aura tiré des observations, & par-là les deux erreurs cherchées, la correction des deux premiers éléments, le trois points de l'orbite corrigés, & à la fin l'ellipse de la comète.

14. On trouvera aussi une époque du mouvement moyen, en déterminant par l'aire du secteur contenu entre un des rayons SC, & le rayon qui va au nœud, dont la longitude aura été corrigée, le temps de l'arrivée à cette longitude vraie, & par les méthodes connues en Astronomie on trouvera l'équation qui y répond dans une ellipse de cette espèce & le lieu moyen, qui servira d'époque, ou qui donnera l'époque de la longitude moyenne pour un autre temps quelconque.

OPU-

OPUSCULE X.

MÉTHODE POUR CORRIGER LES ÉLÉMENTS D'UNE PLANÈTE PAR TROIS OBSERVATIONS.

1. JE donnerai deux de ces méthodes, dont la première convient presque tout-à-fait avec celle de l'Opuscule précédent, mais elle exige presque toujours la plus grande exactitude dans les observations, la seconde demande un grand travail pour l'exécution de beaucoup de longs calculs arithmétiques ; mais cette dernière est susceptible de toute l'exactitude dans le résultat pour remplir l'objet proposé.

2. Il s'agit ici aussi de prendre pour la première de ses deux méthodes par position la direction de la ligne des nœuds, & l'inclinaison de l'orbite, & en employant ces deux éléments comme connus déterminer autant de rayons vecteurs avec la longitude & latitude héliocentrique de chacun, qu'il y a des observations bien exactes, qui donnnent la longitude & latitude géocentrique. Dans l'un & l'autre cas de l'orbite elliptique d'une comète, & de celle d'une planète, il faut avoir ces deux éléments par un à-peu-près, ce qui est nécessaire toujours, quand on veut employer la méthode des fausses positions. Pour les comètes, qui arrivent pour la première fois inconnues, il a fallu proposer l'application de la méthode employée dans le Tome III pour l'orbite parabolique en déterminant ces deux éléments par le procédé, que nous avons exposé en grand détail pour la parabole. Comme l'arc visible de l'orbite d'une comète quoiqu'elliptique ne peut pas différer que peu de l'arc d'une parabole, ces deux éléments trouvés par le procédé proposé pour une courbe de cette première espèce ne peuvent différer que peu de ceux qu'on doit avoir dans le cas de la seconde assez allongée. Dans le second cas après tant d'observations, & de recherches on a déjà dans les éléments de l'Astronomie les orbites peu éloignées de l'exactitude, comme

me on voit par la petitesse des erreurs, qu'on trouve dans les lieux calculés sur les tables, & comparés avec les observés. Ainsi on peut employer la longitude du nœud, & l'inclinaison de l'orbite tirées de ces éléments, principalement celles qu'on trouve dans l'ouvrage classique de l'Astronomie de M. de La-Lande.

3. Alors en employant trois observations, qui donnent trois longitudes, & trois latitudes géocentriques, on trouvera comme dans l'Opuscule précédent trois rayons vecteurs avec leurs longitudes, & latitudes héliocentriques par le problême de l'Opuscule VIII. Ces rayons vecteurs avec leurs longitudes donneront, comme dans le même Opuscule précédent, la directrice, & la direction, & longueur du grand axe, & on pourra corriger les deux éléments pris de la théorie à l'aide des deux erreurs, qu'on trouvera ou par le moyen des deux intervalles des temps déterminés par les aires des deux secteurs, & comparés avec ceux qu'on aura tiré des mêmes trois observations, ou par les distances à la directrice tirées des deux autres observations, & comparées avec celles, qui répondent à la raison constante des distances au foyer & à la même directrice. Après la correction de ces deux éléments on trouvera de même par leur moyen les trois rayons vecteurs corrigés avec leurs longitudes, & latitudes héliocentriques, qui donneront tous les éléments de la même manière, que dans le même Opuscule précédent.

4. C'est la petitesse des latitudes géocentriques des planètes, & des inclinaisons des leurs orbites, qui exige une très-grande exactitude dans les observations, & il faut choisir les temps les plus favorables pour avoir les latitudes les plus grandes qu'on peut, avec des différences de longitude assez considérables. Cette méthode peut être employée principalement pour l'orbite de Vénus, dont les latitudes géocentriques peuvent aller même au de-là de 8 degrés, & l'inclinaison de l'orbite va au de-là de 3 degrés & un tiers. Heureusement on détermine beaucoup plus exactement la latitude géocentrique, que la longitude, parceque celle-ci dépend principalement de l'ascension droite, qui ne se détermine que par la différence de temps, où l'erreur d'une se-

conde horaire en porte 15 du cercle, tandis que les latitudes dépendent principalement de la déclinaison, qui se détermine immédiatement en secondes de cercle.

5. Cette même année 1785 la latitude géocentrique dans les mêmes Éphémérides de Milan arrive le 25 d'Avril à 4°. 55', & le 13 Juillet à 4°. 25', c'est-à-dire à 17700", & 15900", qui sont des nombres assez grands pour pouvoir tirer bon parti de cette méthode. L'inclinaison de l'orbite dans l'*Astronomie* de M. de La-Lande est de 3°. 23'. 20", & on y voit que cette même mesure étoit *déjà* celle d'*Halley*, & de Cassini: cela donne 12200", nombre assez considérable. C'est vers la conjonction inférieure, qui revient après 19 mois, qu'on peut avoir des grandes latitudes; mais dans une seule période aussi on peut en avoir trois suffisamment fortes, & à différences des longitudes suffisamment grandes, comme cette même année on a dans les mêmes Éphémérides le 1 Avril 3°. 53', le 13 Mai 3°. 59', le 25 Juin 3°. 48', le 1 Juillet 3°. 46'. On pourroit prendre les deux positions extrêmes avec une des deux intermédiaires, & même celle de 13 Juillet, où la latitude est 4°. 25', avec les deux premières, ou les deux dernières avec celle de 25 Avril, où la latitude est 4°. 55'. Dans d'autres conjonctions d'autres années on trouvera des circonstances encore beaucoup plus favorables.

6. Mais pour Vénus on peut obtenir son objet par deux seules observations en y ajoutant la distance moyenne exactement connue. On trouvera par cette méthode-ci deux rayons vecteurs avec leurs longitudes, & latitudes en employant beaucoup moins de calcul, & avec beaucoup plus de sureté, que dans l'Opuscule VII. Ces sont les mêmes données employées dans le même Opuscule sur les figures 4, & 5, & c'est une des méthodes, que j'ai indiquées à la dernière ligne de ce même Opuscule en disant, que celles-là donneront plus d'espérance d'un plein succès. On peut espérer le plein succès, même sans employer la règle de fausse position, & les équations qui appartiennent à cette règle; que nous avons employées dans les deux Opuscules précédents, parcequ'on peut employer immédiatement comme sûrs tous

ces trois éléments comme on les trouve dans la seconde édition de l' Astronomie de M. de La-Lande Tom. II livre VII en fixant la longitude du nœud pour une époque, & réduisant les longitudes de Vénus observées à ce qu' elles auroient été, si la précession des équinoxes n' avoit fait rétrograder le point équinoxial, qui est le commencement de la numération des longitudes. Deux observations avec ces trois éléments censés exactes donneront les deux autres, qui sont les incertains; la longitude de l' aphélie, & l' excentricité.

7. La seconde méthode pour corriger les éléments d' une planéte plus sûre pour le succès, plus simple dans la théorie, mais beaucoup plus laborieuse pour l' exécution à cause de la multiplicité, & longueur énorme de calculs numériques est la suivante, qui pourtant pour Vénus devient incomparablement plus simple, & moins embarrassante, si on y suppose exactes les trois éléments énoncés dans le numéro précédent. La théorie entière d' une planète peut être réduite à six éléments : le lieu du nœud, l' inclinaison de l' orbite, la distance moyenne, l' excentricité, la longitude de l' aphélie, & la longitude moyenne à une époque déterminée. On tire le temps périodique de la distance moyenne par la troisième loi de Kepler, & viceversa, ainsi on doit compter ces deux pour un seul. Ces sont six quantités inconnues, qui sont liées avec six, qu' on connoît par trois observations, c' est-à-dire trois longitudes, & trois latitudes géocentriques, & on sait par les éléments de l' Astronomie la manière de tirer ces dernières six valeurs des six précédentes pour trois temps donnés, puisqu' on sait la manière de tirer de ces éléments la longitude, & latitude géocentrique pour un temps donné quelconque, & par conséquent si l' on prend par position les valeurs de ces six éléments, on trouvera le six longitudes, & six latitudes géocentriques, qui leur répondent pour les trois moments de trois observations, qui donnent ces mêmes objets tels, qu' ils sont réellement. Les six différences de ces six objets calculés d' après ces éléments aux observés seront six erreurs e, qui peuvent servir à corriger ces six éléments de la même manière que

deux

deux ont ſervi dans les Opuſcules VIII, & IX pour en corriger deux.

8. On eſt autoriſé à employer cette méthode par le progrès, que l'Aſtronomie a fait dans les théories de toutes les planètes, pour leſquelles on a ces objets dans tous les ouvrages élémentaires de cette Science, & beaucoup mieux diſcutés dans l'Aſtronomie de M. de La-Lande, que j'ai cité tant de fois. On a fait des tables pour chaque planète tirées de ces éléments, on a calculé tant de différentes eſpèces d'Éphémérides d'après ces tables, & les différences de ces réſultats aux lieux obſervés ſont toujours petites de manière, qu'on eſt bien aſſuré d'avoir les mêmes éléments peu éloignés des véritables. Donc on voit bien ce qu'il faut faire pour employer cette méthode d'après ce qu'on a fait dans les deux Opuſcules précédents pour la correction de deux éléments, & dans pluſieurs autres des Tomes antérieurs pour corriger un plus grand nombre de quantités connues par un à-peu-près.

9. On fera un petit changement m à un de ces ſix éléments, en retenant les cinq autres: & ayant calculé encore les trois longitudes, & trois latitudes pour les trois temps des obſervations, que nous appellerons les trois termes à comparer, on trouvera de nouveau les ſix erreurs, & on appellera p, q, r, s, t, u la différence de celle-ci aux précédentes poſitive, ou négative ſelon que cette différence aura été une diminution, ou augmentation d'erreur. En nommant x un autre changement quelconque du même premier élément, on aura $\frac{px}{m}$, $\frac{qx}{m}$, $\frac{rx}{m}$ &c. pour les diminutions, que ce changement produira dans les ſix erreurs e, e', e'' &c. En reprenant le premier élément, comme on l'avoit d'abord, on fera un changement m' au ſeul ſecond, & on calculera de nouveau les mêmes ſix termes à comparer: cette comparaiſon donnera les erreurs nouvelles, & les nouvelles diminutions, qu'on appellera p', q', r' &c., en appellant x' un autre petit changement quelconque, on aura $\frac{p'x'}{m'}$, $\frac{q'x'}{m'}$, $\frac{r'x'}{m'}$ &c. pour les diminutions, qui en réſulteront aux erreurs primitives

e, e', e'' &c. De la même manière en employant les changements m'', m''', &c. x'', x''' &c. aux éléments suivants, & faisant la même opération, on aura les diminutions $\frac{p''x''}{m''}$, $\frac{q''x''}{m''}$, $\frac{r''x''}{m''}$ &c, & $\frac{p'''x'''}{m'''}$, $\frac{q'''x'''}{m'''}$, $\frac{r'''x'''}{m'''}$ &c., & ainsi de suite. En faisant la somme des six premiers termes $\frac{px}{m} + \frac{p'x'}{m'} + \frac{p''x''}{m''}$, &c. $= e$, on aura une équation de six termes, qui par le moyen de six changements m, m', m'', &c. détruira la première erreur e. Une pareille équation $\frac{qx}{m} + \frac{q'x'}{m'} + \frac{q''x''}{m''}$, &c. $= e'$ détruira la seconde, & ainsi des autres.

10. On aura six équations chacune avec six inconnues x, x', x'' &c., mais toujours élevées au seul premier degré, dont par les méthodes connues on tirera les six valeurs de ces inconnues, qui seront les corrections à employer à ces six éléments. Comme leurs erreurs doivent être petites, on peut espérer, que sans le renouvellement d'un si long calcul, on aura après cette première opération les mêmes éléments bien corrigés: autrement il faudroit renouveller le calcul, comme on fait dans tous les emplois des règles de fausse position, quand les différences ne sont pas assez petites pour en avoir la proportion sensiblement exacte.

11. Les formules pour réduire six équations de cette espèce à une seule seroient d'une complication immense, si on vouloit y retenir les expressions algébriques: en augmentant le nombre des équations, celui des termes augmente immensement plus, qu'en simple raison de ce premier nombre, comme le nombre des combinaisons, qu'on peut former avec un nombre donné de lettres: l'application des nombres y seroit presqu'impossible. Mais l'opération devient assez praticable, si l'on y employe à mesure les coefficients numériques. En divisant à l'aide des logarithmes tous les termes de chaqu'équation par le coefficient de son premier, on dégage celui-ci de son coefficient: alors en ôtant par une simple soustraction numérique la première des cinq suivantes, la première inconnue disparoît, & on a cinq équations avec cinq inconnues: on réduit

de

de la même manière les cinq à quatre, celle-ci à trois &c., & on arrive à toutes les valeurs cherchées par la simple substitution des logarithmes aux nombres, soustraction de ceux-ci, substitution des nombres aux logarithmes, & soustraction des coefficients numériques. La route reste encore bien longue pour arriver à ce terme, & plus longue encore pour arriver aux six équations par le moyen des valeurs, qu' on doit tirer des éléments, & qui doivent donner les erreurs, & leurs diminutions nécessaires pour obtenir les six équations ; mais pourtant elle est droite, & avant d'y entrer on la voit toute entière d'un seul coup d'œil jusqu'à son terme.

12. On en peut diminuer la longueur, en supposant la distance moyenne connue par le temps périodique, qui est assez bien connu pour toutes les planètes : on réduit par-là les éléments à varier à cinq. Pour Vénus on peut supposer connue encore la longitude du nœud, & l'inclinaison de l'orbite, ce qui réduira les équations à trois seules, & rendra incomparablement moins difficile la correction des éléments les plus incertains, qui sont la longitude de l'aphélie, l'excentricité, & la longitude moyenne à une époque donnée, & c'est l'autre méthode indiquée à la dernière ligne de l'Opuscule VII.

OPUSCULUM XI.

De orbitæ inclinatæ projectione in planum eclipticæ (*).

1. Theorema. Si N'VN (Tab. X fig. 1) sit arcus sectionis conicæ, cujus planum inclinetur ad planum N'uN in quovis angulo dato, ac omnia ejus puncta P projiciantur in totidem puncta p hujus plani per rectas ipsi perpendiculares; arcus projectus NpuN' pertinebit ad sectionem conicam ejusdem generis cum priore, nimirum erit ellipticus, parabolicus, vel hyperbolicus, ut ille (**).

2. Si enim planum prioris arcus concipiatur applicatum posteriori plano, motu facto circa intersectionem communem N'N; constat, quamvis rectam PQ perpendicularem eidem lineæ transituram per p, & fore PQ ad pQ, ut est radius ad cosinum inclinationis, quæ ratio fiat m ad 1.

3. Sit N'Q $= x$, QP $= y$, Q$p = y'$, & erit $y = my'$. Æquatio ad priorem arcum erit hujus formæ $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, adeoque posito my' pro y æquatio ad posteriorem erit $m^2ay'^2 + mbxy' + cx^2 + mdy' + ex + f = 0$. Genus sectionis conicæ determinatur a relatione producti coefficientium valorum x^2, y^2 ad quadratum dimidii coefficientis valoris

(*) Hoc argumentum convenit ex parte cum eo, quod habetur in §. XII Opusculi I Tomi III satis fuse ibidem pertractatum, sed pro sola parabola: agitur enim ibidem de relatione parabolæ cometicæ projectæ in planum eclipticæ cum parabola primitiva applicata, & habetur multiplex ipsius projectæ constructio. Hìc id ipsum proponitur, ac perficitur generalius pro omnibus conicis sectionibus. Constructio pro ipsa parabola, & ipsius demonstratio habet discrimen quod præbet alias geometricas contemplationes, & in iis, quæ pertinent ad parabolam, & in reliquis, quæ generaliter ad reliquas binas sectiones conicas, ostendit semper magis Geometriæ vim, atque fœcunditatem.

(**) Si planum orbitæ, quæ projicitur, esset perpendiculare plano eclipticæ; oriretur è projectione recta linea, ut patet: sed hìc agimus de orbita inclinata, non de insistente ad angulos rectos.

ris xy. Nimirum æquatio prior erit ad ellipsim, parabolam, vel hyperbolam, prout $ac - \frac{1}{4}b^2$ fuerit valor positivus, vero, vel negativus; posterior pro ejusmodi valore diverso formulæ $m^2ac - \frac{1}{4}m^2b^2$: hæc formula est illa ipsa ducta in valorem positivum y^2. Quamobrem utraque debet esse valoris similis, & proinde pertinebunt ad eadem curvarum genera.

4. *Scholium*. Si projectio fieret per lineas parallelas utcunque obliquas, idem genus curvæ semper haberetur, quia ductis utcunque planis parallelis per lineas projectionum, quæ occurrerent intersectioni N'N in totidem punctis Q, rectæ QP haberent omnes directionem communem, ut & omnes Qp, ac puncta P, Q, p essent vertices triangulorum similium, in quibus quævis PQ $= y$, ad suam pQ $= y'$ haberet semper rationem communem. Inde generaliter constat, sectionem solidi cylindracei cujusvis habentis pro basi quancumque sectionem conicam, quæ fiat plano quovis, fore sectionem conicam generis ejusdem.

5. *Corol.* Si VFV' sit axis ellipseos applicatæ, existente F in recta N'N, & ductis VA, V'A' perpendicularibus ipsi N'N, sumantur in ipsis Au, A'u' ad AV, A'V' in illa ratione 1 ad m; erunt puncta u, u' ad curvam projectam, & jacebunt in directum cum puncto F. Quare si abeunte altero vertice V' in infinitum ellipsis abeat in parabolam; recta uF producta nusquam occurret parabolæ projectæ, abeunte nimirum in infinitum etiam puncto u'. Quare ipsa uF pertinebit ad unam e diametris parabolæ projectæ.

6. *Problema*. Data intersectione N'N planorum cum foco F parabolæ applicatæ jacente in ipsa, & ejusdem parabolæ vertice V, ac angulo inclinationis, invenire focum, & verticem parabolæ projectæ.

7. Ducta VA perpendiculari ad N'N capiatur in ipsa Au, quæ sit ad eam ut cosinus inclinationis ad radium. Ducta per V recta perpendiculari ad VF, quæ occurrat rectæ N'N productæ in B, ducatur Bu, & recta ipsi parallela ex N', quæ occurrat uF in D. In recta Fu producta capiatur uE tertia continue proportionalis post uD & dimidiam N'D, ac per E ducatur EG ipsi

per-

perpendicularis. Facto angulo BuH = BuE capiatur uH = uE: ducatur HG perpendicularis ad EG, & secetur bifariam in L. Erit H focus, L vertex quæsitus.

8. Si enim assumpto P ubicunque in arcu N'VN, recta QP occurrat rectis BV, Bu in R, r; erit QR : Qr :: AV : Au :: QP : Qp. Quoniam autem BV perpendicularis axi VF est tangens parabolæ applicatæ; erit quævis RQ major quam PQ, adeoque & quævis rQ major quam pQ, & idcirco Bu tangens parabolæ projectæ. Cum N'D sit ipsi parallela, & uD transiens per F sit quædam diameter ipsius projectæ (num. 5); erit parameter ejus diametri tertia post uD, DN', adeoque uE, quæ est tertia post uD, & $\frac{1}{2}$DN', erit ejus quadrans, & EG directrix. Cum vero tangens Bu secet bifariam angulum EuH, recta uH tendet ad focum, & ob uH = uE ipsum punctum H erit focus, HG positio axis, L secans bifariam ipsam HG vertex. Q. E. D.

9. *Scholium* 1. Si N'N contineat cum axe VF angulos parum abludentes a rectis; punctum B abibit nimis procul. In eo casu ductâ VR perpendiculari ad VF, & ex quovis ejus puncto R demisso perpendiculo RQ in N'N, ac captâ Qr ad QR, ut est Au ad AV, ductâque ru, ducenda esset N'D ipsi parallela. Satis enim constat eâdem demonstratione, fore ur tangentem. Posset etiam N'D duci in angulo FN'D cognito: nam is æquatur angulo FBu, cujus tangens ad tangentem anguli FBV, sive cotangentem anguli VFN est, ut Au ad AV, sive ut cosinus inclinationis ad radium. Angulus VFN est anomalia nodi. Hinc anguli FN'D tangens habetur ducendo cosinum inclinationis orbitæ in cotangentem anomaliæ nodi, adeoque habetur facile is angulus, cujus ope ducitur N'D sine ullo usu puncti B, vel R, & r.

10. *Scholium* 2. Potest adhiberi alia constructio æque simplex in fig. 2. Sint puncta N', F, N, V eadem ac in fig. 1. Demisso perpendiculo VA, sumatur, ut prius Au ad AV, ut est cosinus inclinationis ad radium: ducatur uN, & fiat angulus FN'I = FuN, existente I in recta uF producta. Secta bifariam N'N in C, ducatur CD parallela Fu tertia post IF, CN', producaturque,

que, donec sit DE $= \frac{1}{4}$FI, & ducatur EG ipsi perpendicularis. Centro D intervallo DC inveniatur in N'N punctum O, & in directione DO capiatur DH $=$ DE. Erit EG directrix, H focus, FI parameter diametri DC.

11. Nam in primis cum *u*F sit quædam diameter per num. 5, erit diameter quædam etiam DC, & ex natura parabolæ tam rectangulum ex CD, & parametro ejus diametri æquatur rectangulo NC$\times$CN' sive quadrato NC, quam rectangulum ex eadem parametro, & F*u* parallela ipsi CD rectangulo FN$\times$N'F. Porro triangula F*u*N, FN'I sunt similia ob angulos ad verticem F oppositos, adeoque æquales, & æquales ad *u*, & N' ex constructione; ac proinde *u*F : FN :: FN' : FI, & *u*F$\times$FI $=$ FN$\times$FN', adeoque FI æquatur ei parametro. Hinc CD tertia post eam parametrum, & ordinatam CN' exhibet verticem ejus diametri, & DE, DH ipsius quadrantes distantiam ipsius verticis a directrice, & foco. Cum autem tangens ducta per D debeat esse parallela chordæ NN', quæ cum sit secta bifariam ab ea diametro, est ejus ordinata; rectæ DO, DC, quæ in triangulo CDO isoscelio continent angulos æquales cum ea chorda, continebunt æquales etiam cum ea tangente; adeoque cum earum altera sit diameter, altera tendet ad punctum H, quod erit focus ipse ob DH assumptam æqualem distantiæ verticis D a foco.

12. *Scholium* 3. Aliam constructionem itidem satis simplicem exhibebit in fig. 1 sequens analysis geometrica. Si consideretur FP perpendicularis ad FV, ipsa erit parallela tangenti BVR, & dupla FV ex natura parabolæ. Cum vero sit PQ : *p*Q :: VA : *u*A, & angulus PFQ $=$ VBA, erit & *p*FQ $=$ *u*BA, adeoque & F*p* parallela tangenti B*u*. Quare erit parameter diametri *u*F tertia continue proportionalis post abscissam F*u*, & ordinatam F*p*, adeoque *u*E quarta pars ejus parametri erit tertia post F*u*, & dimidiam F*p*. Hæc dimidia invenietur capiendo in tangente BV segmentum VM $=$ VF, & ducendo M*m* parallelam VA, quæ ex tangente B*u* abscindet *um* $= \frac{1}{2}$F*p*. Erit enim VM : *um* :: VB : *u*B :: PF : *p*F, cumque sit FP $=$ 2FV $=$ 2VM, erit F*p* $=$ 2*um*.

13. En

13. En igitur constructionem. Ducatur per V recta VM perpendicularis, & æqualis VF. Per V, & M ducantur rectæ VA, MO perpendiculares N'N, & in iis assumantur A*u*, O*m*, quæ sint ad ipsas VA, MO, ut est cosinus inclinationis ad radium. Ducatur *um*, & in F*u* producta capiatur *u*E æqualis ipsi *um* : ducatur EG huic perpendicularis : capiatur *u*H æqualis eidem *u*E in angulo *mu*H = *mu*E : ducatur HG perpendicularis ad EG, ac secetur bifariam in L. Erit parameter diametri F*u* = 4*u*E, directrix EG, positio axis HG, focus H, vertex quæsitus L.

14. *Scholium* 4. Facile demonstratur generaliter, si VFV' sit diameter sive ellipseos, sive hyperbolæ applicatæ, existente F in linea nodorum N'N, fore *u*F*u*' diametrum projectæ; quia nimirum assumptis R*r*, P*p* in arcu N'V'N tangentes ductæ per V', & *u*' tenderent ad commune punctum ejusdem rectæ N'N respondens puncto B ex parte opposita, & essent parallelæ tangentibus BV, B*u*. Captâ autem DI tertiâ post *u*D, DN', & ductâ ex *u*' per I rectâ, quæ tangenti B*u* occurrat in K, erit *u*K parameter ejus diametri ex proprietate notissima sectionum conicarum. Cum nimirum sit $uu' : uK :: Du' : DI :: uD \times Du' : uD \times DI = DN'^2$. Datâ autem diametro, & parametro, ac directione ordinatarum, quæ sunt parallelæ tangenti B*u*, facile construitur sectio conica. In parabola parameter *u*K æquatur ipsi DI, cujus quadranti æquantur *u*H, *u*E, quæ determinant focum & directricem.

Opu-

OPUSCULUM XII.

De orbitæ inclinatæ projectione in aliud planum.

1. Projectio ad usus astronomicos fieri solet in planum eclipticæ, quia longitudines, & latitudines geocentricæ, quæ eruuntur ex ascensionibus rectis, & declinationibus immediate observatis, referuntur ad id planum: nam in eo jacent directiones longitudinum, dum latitudines habentur in planis perpendicularibus ad ipsum planum eclipticæ ductis per eas directiones. Hinc puncta orbitæ inclinatæ reducuntur ad planum eclipticæ per rectas ipsi perpendiculares ductas ex ipsis, quæ determinant relationes omnes pro reducendis positionibus geocentricis ad heliocentricas, & earum considerationi innititur quidquid pertinet ad positionem lineæ nodorum, & inclinationem orbitæ, quæ omnia deinde adhibentur pro reducendis positionibus heliocentricis ad geocentricas ope Trigonometriæ sphæricæ, & vero etiam planæ, adhibentis eam ipsam directionem longitudinis jacentem in plano eclipticæ, & erectionem perpendicularem lineæ demissæ ex ipso in planum eclipticæ, per quam transit planum anguli latitudinis tam geocentricæ, quam heliocentricæ.

2. Vidimus abunde in Tomo III, quantæ utilitatis sit consideratio ejusmodi projectionis, & curvæ ex ipsa ortæ in plano eclipticæ, cujus naturam, & varias constructiones idcirco persecutus sum in illo paragrapho XII Opusculi I Tomi III, quibus hic adjeci alia plura in superiore Opusculo. Hinc censui, opportunam fore considerationem projectionis in aliud planum quodcumque, cum ea etiam consideratio possit aliquando evadere non inutilis. Id hic persequor, sed retineo projectionem orthogonalem, cum angulus rectus omnium aptissimus sit ad calculos instituendos ob admirabilem hypothenusæ proprietatem respectu laterum, & horum

rum ad se invicem, cui omnis Trigonometria innititur ita, ut ea ubique occurrat adhibenda: facile multa ex iis, quæ hìc proponentur pertinentia ad projectionem factam per lineas perpendiculares, traducentur ad eam, quæ fiat per parallelas utcumque obliquas.

3. In primis facile occurrit illud, projectionem in planum parallelum plano orbitæ factam per ejusmodi rectas ipsi perpendiculares, nihil immutare dimensiones orbitæ ipsius primigeniæ: curva, quæ oritur ex ejusmodi projectione, est illa ipsa translata ad distantiam æqualem distantiæ sui plani ab eodem illo plano parallelo. Inclinatio sola inducit mutationem, quæ occurrit consideranda: inclinatio autem inducit intersectionem planorum, quæ in hac consideratione generali succedit lineæ nodorum cum hoc solo discrimine, quod illa in omnibus orbitis planetarum primariorum, de quibus hìc agitur, transit per solem jacentem tam in plano orbitæ, quam in plano eclipticæ, qui quidem etiam est focus orbitæ inclinatæ, quod inducit proprietates foci utiles ad eruendas proprietates curvæ genitæ a projectione: in casu autem generali ea intersectio per focum non transit.

4. In primis theorema, quod habetur in ipso initio Opusculi superioris, habet locum hìc etiam, neque enim pendet a natura foci F figuræ 1. Dummodo linea TT' sit intersectio communis orbitæ primigeniæ applicatæ per motum circa eam rectam ad planum, in quod illa projicitur, omnes rectæ PQ ductæ e punctis quibusvis P perpendiculares ipsi intersectioni ita occurrent orbitæ projectæ in punctis *p*, ut ratio PQ ad *p*Q sit eadem, ac ratio radii ad cosinum inclinationis ipsius orbitæ, quæ ratio si dicatur *m* ad 1 redit, ut ibi, æquatio illa eadem, quæ ostendit, orbitam projectam fore ejusdem naturæ cum primigenia inclinata, nimirum ellipsim, parabolam, vel hyperbolam, cujus est illa. Positio plani novi perpendicularis plano orbitæ primigeniæ induceret itidem hìc rectam lineam: sed agimus de orbita inclinata, cujus planum hìc potest esse parallelum priori: in illo alio casu eclipticæ si nec sit perpendiculare ejus plano, nec inclinatum, congruet cum ipso, nec ulla habebitur projectio, sed omnia puncta orbitæ primigeniæ remanerent immota in iisdem locis.

5. Hinc

5. Hinc nec parabola, pro qua potissimum hasce considerationes instituimus ad usum theoriæ cometarum, nec hyperbola per ejusmodi projectionem potest abire in curvam simpliciorem: potest autem *sola ellipsis*, quæ pertinet ad planetas omnes, & vero etiam censetur pertinere ad cometas, sed ita oblonga, & compressa, ut ejus arcus, qui sub conspectum cadit, pro parabolico assumi possit: ea nimirum potest abire in circulum, & facile determinatur positio plani, in quod fiat projectio, quæ circulum exhibeat, quæcumque sit *distantia* plani ejus a sole existente in foco ipsius primigeniæ, & extra intersectionem planorum, quam positionem mox determinabimus.

6. Sed interea pro determinatione curvæ genitæ per projectionem habetur in primis illud: in casu *plani eclipticæ* curva primigenia debet omnino occurrere intersectioni *saltem in uno* puncto N: si ea fuerit ellipsis, debebit ipsi occurrere in binis hinc & inde a foco F, si parabola, vel hyperbola, semper in binis *præter casum parabolæ*, in quo intersectio planorum sit ipse axis parabolæ, & *binos hyperbolæ*, in quibus ea sit parallela alteri e binis asymptotis, in quibus casibus altera e binis intersectionibus abit in infinitum: atque id quidem patet ex elementis conicarum sectionum, & in parabola etiam focus debet manere inter duas *intersectiones*, ubi habentur duæ, in hyperbola vero inter eas vel extra, prout ipsa intersectio continuerit cum axe angulum minorem quam axis, vel majorem.

7. At ubi planum non transit per focum, potest intersectio planorum vel occurrere orbitæ inclinatæ in duobus punctis, vel occurrere in unico, vel nusquam incidere in ipsam; cum possint infinitæ numero duci rectæ lineæ, quæ datæ cuicumque sectioni conicæ occurrant in binis punctis, infinitæ, quæ tangant in unico, infinitæ, quæ nusquam ipsi occurrant: nam potest per duo puncta quævis duci recta linea, quæ ei curvæ occurret utique in iis binis punctis, & in iis solis, in quibus eam secabit, cum recta linea sectioni conicæ non possit occurrere in pluribus, quam in duobus punctis: per quodvis punctum potest duci tangens, quæ ipsam curvam ita ibi continget, ut nusquam alibi ipsi occurrat:

quævis autem recta parallela tangenti cuivis ducta ex parte opposita arcui parabolæ, quem ipsa tangit, nusquam occurret parabolæ in infinitum etiam productæ, quævis in hyperbola ducta inter binas tangentes transeuntes per bina puncta opposita diametri primariæ cujusvis, quæ tangentes erunt inter se parallelæ, nusquam eidem curvæ occurret, ut e contrario quævis ducta inter duas ejusmodi tangentes pertinentes ad binos vertices diametri cujusvis secabit ellipsim ipsam in binis punctis, quævis ipsi parallela ducta extra eos limites nusquam ipsi occurret. Poterunt autem duci per quamvis ex iis rectis infinita numero plana, quorum singulorum intersectio cum plano orbitæ erit eadem recta: adeoque haberi poterunt infinities infinita numero plana, in quæ ita projiciatur orbita proposita, ut eorum intersectio cum plano orbitæ vel occurrat bis orbitæ ipsi eam secans in utroque, vel semel tantum secans itidem ibidem, si fuerit parabola, vel hyperbola, vel illam tangat in puncto unico, vel ipsi nusquam occurrat.

8. Porro idem accidet & curvæ projectæ in illud planum. Si enim A'Q fuerit ejusmodi recta, vel focus F jaceat in ipsa, vel extra ipsam; semper cuivis puncto V respondebit suum punctum *u*, & viceversa: evanescente altera e rectis AV, A*u*, evanescet & altera, ac si binis punctis V ad se invicem accedentibus in infinitum ita, ut demum congruant, & chorda, quæ producta utrinque erat recta secans curvam in binis punctis, evadat tangens in unico; etiam bina puncta *u*, quæ ipsis respondent, ita accedent ad se invicem, ac demum congruent, ut secanti succedat tangens: viceversa cuivis puncto *u* debet respondere suum punctum V, quod pertinebit ad intersectionem, vel contactum, prout punctum ipsum *u* pertinuerit ad intersectionem, vel contactum.

9. Hinc in omni hac perquisitione abstinebimus a punctis N, N', quæ adhibuimus in præcedente Opusculo, & ut possit adhiberi eadem figura 1 pro nonnullis, quæ hìc proponentur, adjecimus puncta T, T' assumpta ubicumque in ipsa intersectione planorum, quæ in casu plani eclipticæ adhibiti pro projectione erant occursus ipsius cum orbita utraque, nimirum primigenia, & genita. Eodem pacto punctum F non exhibebit hìc focum, sed ge-

ne-

neralius punctum, in quo occurrat intersectioni recta quæpiam ducta *e puncto* quopiam V curvæ primigeniæ applicatæ ad planum, in quod *fit* projectio. Ductâ autem quavis rectâ PQ perpendiculari ad *intersectionem* TT', & assumpto in ipsa puncto *p* ita, ut sit *p*Q ad PQ in ratione cosinus inclinationis ad radium, erit punctum *p* ad curvam genitam a projectione.

10. Habebit autem hæc consideratio generalis illud etiam commune cum casu priore particulari, quod si B fuerit occursus tangentis ductæ per quodvis punctum V orbitæ primigeniæ, recta ducta ex B per *u* erit itidem tangens genitæ: erit enim eodem pacto quævis RQ ad *r*Q, ut VA ad *u*A, ut PQ ad *p*Q, adeoque, & alternando RQ ad PQ ut *r*Q ad *p*Q, adeoque cum P jaceat citra tangentem BV, jacebit *p* citra rectam B*u*, quod cum debeat accidere hinc & inde a puncto *u*, non pertinebit occursus *u* rectæ B*u* ad intersectionem, sed ad contactum, ut idcirco B*u* sit tangens curvæ genitæ.

11. *Si* curva primigenia fuerit parabola, & VF quædam ejus diameter; erit & *u*F diameter curvæ genitæ: cum enim ipsa VF producta in infinitum nusquam iterum occurrat parabolæ primigeniæ; nec *u*F poterit occurrere parabolæ genitæ, adeoque hæc erit quædam ejus diameter. Hinc facile invenietur hujus parabolæ directrix, focus, vertex. Ducatur FP parallela tangenti BV media geometrice proportionalis inter abscissam VF, & parametrum parabolæ primigeniæ, quæ hac datâ datur, datur enim ejus focus, & distantia puncti V ab ipso, cujus quadruplum est ea parameter: ducatur PQ perpendicularis ad TT', & recta F*p* parallela tangenti B*u*, quæ eidem PQ occurrat in *p*: patet, punctum *p* fore ad parabolam genitam, cum facile perspiciatur, fore Q*p* ad QP, ut A*u* ad AV, nimirum in illa ratione cosinus inclinationis ad radium: hinc erit *u*F abscissa, F*p* ordinata ad diametrum, cujus vertex *u*: adeoque tertia continue proportionalis post F*u*, & F*p* erit parameter ejus diametri. Eâ inventâ, assumetur in recta F*u* producta *u*E æqualis ejus quadranti, fiet angulus B*u*H = B*u*E, & *u*H = *u*E, ducetur recta EG perpendicularis ad F*u*, tum HG perpendicularis ipsi E, quæ secabitur bifariam in

L , & erit EG directrix , H focus , L vertex parabolæ genitæ.

12. Si curva primigenia fuerit ellipsis , vel hyperbola , & VFV' *quædam* ejus diameter ; ductis VA , V'A' perpendicularibus rectæ TT', & assumptis Au, A'u' ad AV, A'V' in illa ratione eâdem , erit & uu' diameter curvæ genitæ . Si enim concipiatur recta ducta per V' parallela rectæ BV , ea occurret rectæ TT' productæ , quantum est opus , in alio puncto B', quod hic non exprimitur , posito ex parte T', & u'B' erit tangens curvæ genitæ , quam facile patet , fore parallelam tangenti Bu ob rectas V'A', u'A' proportionales rectis VA , uA . Recta autem , quæ jungit binos contactus binarum tangentium parallelarum in sectionibus conicis est diameter . Quare invenietur & centrum sectâ bifariam ipsâ uu'. Si autem e quovis puncto curvæ primigeniæ ducatur recta parallela tangenti uB , quæ occurrat ipsi diametro in D , ut N'D in casu ellipseos , in quo omnes ordinatæ jacent inter binos vertices u , u', & assumatur media geometrice proportionalis inter uD , & Du', tum tertia post hanc mediam , ordinatam illam N'D , & diametrum uu', erit hæc diameter conjugata : erit enim rectangulum sub binis abscissis uD , Du', quod est æquale quadrato illius mediæ , ad quadratum ordinatæ N'D , ut quadratum uu' ad quadratum illius quartæ lineæ inventæ , quæ est proprietas diametrorum conjugatarum . Ductâ per centrum hinc & inde rectâ parallelâ tangenti Bu æquali dimidio diametri inventæ , habebitur & positio ipsius : datis autem magnitudine , & positione binis diametris conjugatis , facile per regulas , quæ traduntur in elementis sectionum conicarum , inveniuntur axes , foci , directrices , omnia , quæ pertinent ad curvam quæsitam . Porro eadem est constructio etiam pro hyperbola cum hoc solo discrimine , quod punctum D cadet non inter puncta u , u', sed in productionem ejusdem diametri .

13. Si punctum V fuerit vertex axis parabolæ primigeniæ , vel alter e verticibus axis hyperbolæ , aut utriuslibet e binis axibus ellipseos ; uF in parabola genita non pertinebit ad ejus axem , nec uu' erit harum axis , nisi recta TT' fuerit perpendicularis axi curvæ ipsius primigeniæ , quo solo casu , puncto B abeunte

in

in infinitum , etiam tangens Bu erit perpendicularis diametro , rectâ VA cum suo puncto u abeunte in rectam VF . In reliquis casibus angulus FuB erit semper obtusus , cum singulæ ejus partes AuF , AuB sint anguli externi , majores internis , & oppositis AVF , AuB , partibus nimirum anguli recti FVB .

14. Adhuc tamen facile invenietur inclinatio plani transeuntis per eandem rectam TT' datam , in quo ipsa uF pertineat ad axem . Assumatur in orbita primigenia pro V non punctum axis , sed punctum , in quo tangens contineat cum diametro VF angulum FVB acutum , quod fieri poterit ; semper enim puncta posita extra verticem hinc & inde ab ipso erunt ejusmodi , ut is angulus ex parte altera sit acutus , & ex altera obtusus . Si capiatur V ex ea parte , ex qua is angulus est acutus , & diametro FB fiat semicirculus ; is occurret rectæ AV in aliquo puncto u , & angulus FuB erit rectus , adeoque uF pertinebit ad axem , & vertex parabolæ erit ipsum punctum u , ac focus invenietur facilius assumendo $uH = uE$ versus F.

15. Si orbita primigenia fuerit hyperbola , vel ellipsis invento u per ejusmodi semicirculum , & u' ut prius , erit uu' axis transversus hyperbolæ , vel alter e binis axibus ellipseos , qui erit axis transversus , vel conjugatus , prout illa media geometrice proportionalis inter uD , & Du' fuerit major , vel minor , quam ordinata DN'. Si ea media fuerit æqualis huic ordinatæ ; habebitur circulus , quod potest accidere casu quodam , qui tamen est unicus inter infinitos casus inæqualitatis . Facile autem est invenire plana numero infinita , in quibus pro ellipsi tuto obveniat circulus . Satis est ducere rectam TT' perpendicularem axi transverso , per quodvis punctum ipsius etiam producti , ac per eam rectam ducere planum inclinatum ad planum orbitæ primigeniæ in angulo , cujus cosinus ad radium sit , ut axis conjugatus ad ipsum transversum .

16. Sint enim in fig. 3 VCV', PCP' bini axes ellipseos primigeniæ , quorum prior transversus , adeoque major posteriore : intersectio planorum perpendicularis priori ducta per punctum F ipsius etiam utcumque producti sit TT'. Ductis PQ , P'Q' perpendicu-

dicularibus ipsi TT', & assumptis F*u*, F*u*', Q*p*, Q'*p* ad FV, FV', QP, Q'P' in ratione cosinus inclinationis ad radium, quæ est ex constructione ratio axis conjugati PP' ad transversum VV', patet ex præcedentibus, fore *uu*', & *pp*' axes curvæ genitæ: erit autem etiam *uu*' ad VV' in illa ratione axis PP' ad axem VV', in qua sunt F*u*, F*u*' ad FV, FV'. Hinc axis *uu*' genitæ erit æqualis axi PP' primigeniæ, cui cum sit æqualis etiam alter axis *pp*' genitæ, latus nimirum oppositum lateri PP' rectanguli PP'*p*'*p*, is erit æqualis priori *uu*', ellipsi migrante in circulum.

OPU-

OPUSCULUM XIII.

DE CALCULANDA ABERRATIONE ASTRORUM ORTA E PROPAGATIONE LUMINIS SUCCESSIVA.

§. I.

De natura, & binis generibus ejus aberrationis.

1. Si radius momento temporis deveniret ab objecto ad oculum directione nihil mutata; linea visualis, per quam determinamus objectorum loca, & motus, tenderet recta ab oculo ad objectum ipsum. Eam directionem mutat refractio, quæ radium detorquet. Hujus effectum hìc mente secludimus, considerando pro ultima directione radii advenientis ad oculum rectam lineam, quæ ad ipsum tendit ab objecto. Per eam oculus videret ipsum objectum in eo loco, in quo id est tum, cum videtur, nisi aliud aberrationum genus oriretur a luminis propagatione successiva, quod est simplex pro objectis immotis, duplex pro habentibus motum suum, quo id ipsum mutat locum, dum lux progreditur.

2. Primum ejus aberrationis genus oritur ex eo, quod linea visualis, secundum quam dirigimus instrumenta astronomica ad objectum, debet deflecti ab ultima directione ràdii delati ad oculum ad hoc, ut particula luminis ingressa in instrumentum ipsum, ut in tubum, deveniat ad oculum, unde fit, ut secluso etiam effectu refractionis, non dirigatur linea visualis ad locum ipsum objecti, adeoque non videamus ipsum utut immotum ibi, ubi id est, ac de eo effectu egimus in Opusculo III Tomi II, ubi etiam persecuti sumus discrimen ejus aberrationis, quod occurrit, si pro tubo vacuo, nimirum pleno solo aere, ut sunt ii, qui adhibentur tam ad astronomicas observationes, quam ad usus civiles, adhibeatur tubus ple-

nus aqua. Hoc primum genus aberrationis est commune etiam objectis interea translatis, pro quibus accedit alterum ortum ex eo, quod, seclusa refractione, secluso primo eo aberrationis genere, linea visualis non tendit ad locum, in quo objectum est tum, cum lumen advenit ad oculum, sed in quo erat tum, cum id ab ipso est emissum. Agitur in hoc Opusculo de utroque aberrationis genere, de primo potissimum, quod fixarum loca a sua positione detorquet.

3. Aberratio mutat nonnihil tam longitudinem, & latitudinem fixarum, quam ascensionem rectam, & declinationem. Habentur apud Astronomos formulæ pro calculandis effectibus aberrationis primi generis commodiores etiam iis, quas hìc exhibebimus, & de hac re tota consulenda est in primis Astronomia La-Landii; sed libuit hoc idem argumentum hìc pertractare methodo, quæ nobis prima se obtulit, ut appareret semper magis, quam late pateat usus formularum Trigonometriæ differentialium, quas exhibuimus in Opusculo XV Tomi præcedentis: determinatis enim methodo geometrica particulari formulis pertinentibus tam ad longitudinem, & latitudinem, quæ simpliciores sunt, & facilius eruuntur, quam ad ascensionem rectam, & declinationem, quæ sunt aliquanto complicatiores, deduximus hasce posteriores ex illis prioribus ope earundem formularum applicatarum ad casum, in quo habetur constans unicus e sex terminis pertinentibus ad triangulum variatum, nimirum e tribus lateribus, & tribus angulis. Aliunde hæ ipsæ formulæ, uti hìc occurrunt, sunt itidem aptæ ad calculandas aberrationes easdem, & satis commodæ.

4. Sit in fig. 4 (Tab. X) C objectum, ATB arcus orbitæ terrestris, ad cujus punctum T' deveniat oculus delatus cum motu terræ per arcum TT' eo tempusculo, quo radius percurrit axem tubi TD, qui tubus consideretur ut in immensum arctus, vel ut habens binas bases oppositas cum tenuissimis foraminulis: particula luminis ingressa in D non adveniet ad oculum in T', nisi tubus ipse inclinetur directione TD, quæ sit basis trianguli TT'D, cujus latera TT', T'D sint, ut est velocitas terræ ad velocitatem luminis. In ea positione tubi translati cum ipsa terra motu ad sensum

sum parallelo ob immensam hujus exiguitatem in T'D' progredietur semper particula per ejus axem usque ad T', ad cujus nimirum puncta singula deveniet singulis momentis temporis intermedii. Tubo directo ad objectum, vel utcumque aliter inclinato, impinget particula in latera tubi, vel si is sit crassior, cum iis binis basibus oppositis habentibus illa bina foraminula, ipsa particula ingressa per primum in D non inveniet secundum in T', per quod transcurrat usque ad oculum. Porro directio, per quam nos determinamus lineam visualem, est illa, quam habet axis tubi, sive directio *foraminum*, quæ tendit per T'D' parallelam TD, cui si *occurrat in E recta EC parallela chordæ* TT', locus apparens objecti in ea recta erit E, & aberratio angulus CT'E. Erit autem T'C ad CE ut T'D ad DD' æqualem TT', *nimirum ut celeritas* luminis ad celeritatem oculi translati cum tubo. Hinc erit sinus aberrationis DT'D' ad sinum anguli T'D'D, sive D'T'I, quem *continet* directio apparens T'D' cum productione T'I chordæ TT' *abeunte*, ubi agitur de aberratione orta a motu annuo terræ, in *tangentem* orbitæ terrestris, ut est DD' = TT' ad T'D, sive celeritas luminis ad celeritatem terræ: ea aberratio idcirco erit maxima, ubi is *angulus* erit rectus, ac variabitur pro varia *positione directionis* apparentis respectu tangentis orbitæ terrestris. Cum velocitas motus annui terræ subeat mutationem per quam exiguam respectu totius, magnitudo rectæ CE erit ad sensum constans, & cum ea sit semper parallela tangenti orbis annui jacentis in plano *eclipticæ*, *jacebit* in plano parallelo eclipticæ ipsi. Hinc locus apparens E describet circa verum C circulum, cujus planum erit parallelum plano *eclipticæ*, & *jacebit* in directione parallela tangenti motus annui terræ, & punctum sphæræ cælestis infinitæ, ad quod ea directio tendit, *debet* esse orientalius per tria *signa* puncto, quod in ipsa occupat terra visa e sole, adeoque occidentalius per tria *signa* puncto, quod occupat in eadem sol *spectatus e terra*: *hinc si concipiantur* in eodem circulo puncta respondentia signis zodiaci cælestis, punctum ejus circuli occupatum a *loco* apparente erit occidentalius per tria signa loco occupato in ecliptica cælesti a sole spectato e terra.

5. Is circulus relatus ad superficiem sphæræ cælestis spectatæ e terra apparebit itidem circulus pro fixa existente in polo eclipticæ, recta linea pro ea, quæ sit in ecliptica ipsa, & in omnibus aliis positionibus apparebit ob tantam exiguitatem ellipsis magis, vel minus compressa, prout fixa ipsa fuerit propior eclipticæ, vel ab ea remotior: axis major pro omnibus ejusmodi ellipsibus subtendet constanter angulum eundem aberrationis maximæ, ac erit perpendicularis plano transeunti per axem eclipticæ, & fixam, adeoque perpendicularis ad arcum circuli latitudinis ducti per hanc e polo eclipticæ: axis autem minor ipsi perpendicularis congruet cum arcu ejusdem circuli cælestis, ac erit ad majorem in ratione radii ad sinum latitudinis metientis angulum, quo planum ejus circuli paralleli plano eclipticæ inclinatur ad superficiem ejus sphæræ, in quam is circulus projicitur.

6. Hæc est idea genuina naturæ, & causæ physicæ ejus aberrationis tradita ab ipsius inventore Bradleyo, ex qua determinandæ sunt formulæ pro calculandis ejus effectibus. Observationibus institutis inventa est aberratio maxima secundorum 20, unde patet nullam rationem habendam esse motus diurni terræ, cujus velocitas invenitur circiter 60 vicibus minor velocitate motus annui: nam idcirco is motus non potest inducere pro aberratione, nisi trientem unius secundi, nimirum quantitatem, quæ effugit omnem sensum.

7. Pro secundo aberrationis genere consideretur recta CC' ducta a puncto C, in quo erat objectum eo momento temporis, quo particula luminis discessit inde, usque ad punctum C', ad quod illud devenit eo momento, quo ea appellit ad T': aberratio secundi generis erit angulus CT'C', aberratio composita ex iis binis angulus ET'C', objectum enim erit in C', & locus visus in E. Sed agemus in sequentibus paragraphis seorsum de singulis, nimirum de sola aberratione primi generis, de sola secundi, de composita e præcedentibus binis simul conjunctis.

§. II.

§. II.

De primo aberrationis genere orto ab inclinatione lineæ visualis ad directionem radii advenientis.

8. SIT in fig.5 (Tab.X) ABDE ecliptica sphæræ cælestis geocentricæ, ad quam referimus astrorum loca, & motus spectatos e terra, A principium arietis, B cancri, D libræ, E capricorni, BPE semicirculus solstitiorum cum suo polo eclipticæ P, æquatoris P', locus autem fixæ C in suo quadrante PCG circuli latitudinis, in quo latitudo ipsa erit arcus GC, & longitudo determinabitur a puncto G. Ellipsis descripta in superficie ejus sphæræ a loco apparente per aberrationem primi generis habebit juxta num. 5 axem majorem *g*CK perpendicularem arcui PCG, minorem OCN congruentem cum ipso, qui erit ad majorem, ut sinus latitudinis GC ad radium. Si concipiatur centro C radio maximæ aberrationis C*g* circulus habens planum parallelum plano eclipticæ occurrens plano circuli PCG in L, & M; motus apparens fiet, tanquam si fixa percurreret eum circulum, cujus projectio facta in superficiem sphæræ cælestis per radios ipsi perpendiculares, & ad sensum parallelos, gignit eam ellipsim. In eo circulo locus fixæ apparens, sole appellente ad G, occupabit punctum *g* occidentalius per tria signa loco eclipticæ G, cui respondet in eo circulo punctum L: si quovis alio tempore sol sit in H, accipiatur autem arcus *gh* in eodem circulo similis arcui GH; punctum *h* erit locus apparens fixæ in eo circulo. Ad habendum eundem locum in ea ellipsi orta ex projectione ejus circuli obliqui respectu superficiei sphæræ, in quam is projicitur, satis erit concipere ipsum applicatum ad eam superficiem conversione facta circa axem *g*K: in ea applicatione puncta ipsa *g*, K remanebunt in iisdem locis, recta autem *h*Q perpendicularis lineæ *g*K determinabit punctum I, in quod projicitur ipsum punctum *h* circuli inclinati, nimirum punctum quæsitum, quod occupat in ellipsi orta ex projectione locus apparens.

9. Si

9. Si concipiantur arcus circulorum latitudinis, & declinationis ducti e polis P, P' per locum I, ipsorum particulæ inclusæ intra eam ellipsim haberi poterunt pro rectis lineis, quæ sint parallelæ particulis arcuum PC, P'C, quorum prior est perpendicularis axi majori gK, adeoque haberi poterit pro perpendiculari axi eidem etiam particula arcus PI, quæ idcirco congruet cum illa hIQ. Hinc aberratio latitudinis erit IQ, longitudinis angulus IPC, ductoque arcu CR perpendiculari ad P'I, erit IR aberratio declinationis, angulus CP'I aberratio ascensionis rectæ.

10. Harum aberrationum determinanda est directio, & magnitudo, quorum utrumque facile obtinebitur per formulas trigonometricas. Et quidem in casu, quem exprimit figura, in quo fixa sit orientalior quam principium capricorni E, & sol orientalior quam fixa per arcum minorem quadrante, ac itidem fixa per arcum minorem quadrante distans a polis borealibus P, P', patet, aberrationem utramque applicatam distantiæ ab ipsis polis fore positivam, aberrationem vero latitudinis, & ascensionis rectæ fore negativam. Quare si valores inveniantur pro hoc casu per sinus, & tangentes, ac præmittatur illis prioribus signum positivum, hisce posterioribus negativum, determinentur autem rite arcus EG, GH directione tendente in orientem, & signa sinuum fiant negativa in tertio, & quarto quadrante, signa cosinuum in secundo, & tertio, signa tangentium, & cotangentium in secundo, & quarto, considerentur autem distantiæ a polis borealibus pro latitudine, & declinatione; ipsæ formulæ sponte sua exhibebunt directionem aberrationis.

11. Pro valore autem inveniendo, arcus GH, quem appellant argumentum annuum, fiat $= a$, arcus EG $= b$, arcus PC $= c$, arcus P'C $= d$, arcus PP' $= e$, angulus gCI $= x$, angulus RCI $= y$, P'CP $= z$, & erit ut radius $= 1$ ad cosinum arcus PC $= \cos.c$, ita LC ad NC, adeoque ex natura ellipseos, ita $hQ = Ch \times \sin.hCg = 20'' \times \sin.GH = 20'' \times \sin.a$ ad QI $= 20'' \times \sin.a \times \cos.c$, erit autem CQ $= 20'' \times \cos.hCg = 20'' \times \cos.a$, quo diviso per $\sin.$PC $= \sin.c$, fiet angulus CPI $= \dfrac{20'' \times \cos a}{\sin.c}$.

De-

Deinde ob radium communem CI erit $cos.QCI = cos.x : sin.RCI = sin.y :: CQ = 20'' \times cos.a : IR = \frac{20'' \times cos.a \times sin.y}{cos.x}$, ac eodem pacto $CR = \frac{20'' \times cos.a \times cos.y}{cos.x}$, quo diviso per $sin.P'C = sin.d$, erit angulus $CP'I = \frac{20'' \times cos.a\, cos.y}{cos.x\, sin.d}$.

12. Quare remanebunt determinandi tantummodo anguli x, & y, ad habendos valores quæsitos. Porro est ut radius $= 1$ ad $cos.PC = cos.c$ ita hQ ad IQ, ita tangens $hCg = tan.a$ ad tangentem $ICg = x$, adeoque $tan.x = tan.a \times cos.c$; angulus autem $ICR = y$ est major angulo $ICg = x$ per angulum RCQ, qui ob rectos PCg, P'CR æquatur angulo $PCP' = z$. Hic autem habebitur factis $sin.P'C = sin.d : sin.PP' = sin.e :: sin.P'PC = sin.EPC = sin.EG = sin.b : sin.PCP' = sin.z = \frac{sin.e \times sin.b}{sin.d}$. Quare habentur omnia: nimirum $tan.x = tan.a \times cos.c$, $sin.z = \frac{sin.e \times sin.b}{sin.d}$, $y = x + z$. Porro horum angulorum inventio est expeditissima, cum ob exiguitatem aberrationum negligenda sint secunda.

13. Posset quidem angulus $PCP' = z$ inveniri ex sola longitudine, & latitudine, quæ in eo triangulo exhibent latus PC, & angulum ad P dato jam latere PP', vel ex sola ascensione recta, & declinatione, quæ exhibent latus P'C cum angulo ad P'. Sed quoniam plurium fixarum jam habetur in catalogis tam longitudo, & latitudo, quam ascensio recta & declinatio, & hæ quidem haberi solent pro pluribus fixis, simplicior est ejus determinatio hic proposita, quæ adhibet solam declinationem cum longitudine jam necessaria pro inveniendo argumento annuo aberrationum in longitudinem, & latitudinem.

14. Valor a invenietur subtrahendo longitudinem fixæ a longitudine solis, aucta per integrum circulum, si hæc fuerit minor. Valor b subtrahendo 270° a longitudine fixæ itidem aucta per 360, si opus sit, valor c, vel d subtrahendo a 90° latitudinem, vel de-

declinationem borealem, & ipsis addendo australem: valor e est inclinatio eclipticæ. En igitur denominationes, & formulas

long. solis — *long.* fixæ . . . . a

long. fixæ — 270° . . . . b

$90^\circ \ldots \left\{ \begin{array}{l} - lat.bor. \\ + lat.austr. \end{array} \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots c$

$90^\circ \ldots \left\{ \begin{array}{l} - dec.bor. \\ + dec.austr. \end{array} \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots d$

Inclinatio eclipticæ . . . . e

Formulæ pro x, & y . . . $\left\{ \begin{array}{l} tan.x = tan.a \times cos.c \\ sin.z = \dfrac{sin.b \times sin.e}{sin.d} \\ y = x + z \end{array} \right.$

Formulæ pro $\left\{ \begin{array}{ll} \text{latitudine} \ldots\ldots = & + 20'' \times sin.a \times cos.c \\ \text{longitudine} \ldots = & - \dfrac{20'' \times cos.a}{sin.c} \\ \text{declinatione} \ldots = & + \dfrac{20'' \times cos.a \times sin.y}{cos.x} \\ \text{ascensione recta}.. = & - \dfrac{20'' \times cos.a \times cos.y}{cos.x\, sin.d}. \end{array} \right.$

15. Prima, & tertia applicantur distantiæ a polo, adeoque applicari possunt cum suis signis latitudini, & declinationi australi, cum contrariis boreali. Secunda, & quarta cum suis signis applicantur longitudini, & ascensioni rectæ. Pro tertia, & quarta invento $log.20 + log.cos.a - log.cos.x$, satis est prius addere $log.sin.y$, tum $log.cos.y - log.sin.d$. In his autem ipsis res est expeditissima, cum in angulorum valoribus negligantur secunda.

16. Hæc quidem methodus est satis expedita, ubi agitur de unico astro quovis, pro quo inde potest construi tabula habens unicum argumentum a exhibens positionem respectu loci solis. Formulæ priores pro longitudine, & latitudine, quæ sunt communes, exhibent etiam tabulam generalem habentem binos ingressus, nimirum per ipsum valorem a, & per latitudinem, quæ exhibet c. Verum pro ascensione recta, & declinatione hoc pacto requirerentur tria argumenta, nimirum a, b, c, quæ determinant

nant quartum d, manente communi e. Id reddit multo complicatiores & tabulas, & earum usum. Verum per alias formulas adhuc satis simplices potest construi alia tabula generalis, quæ pro duplici ingressu contineat solam longitudinem, ac latitudinem, & exhibeat breves numeros, per quos multiplicata exigua aberratio longitudinis, & latitudinis inventa per tabulam priorem præbeat quæsitas aberrationes ascensionis rectæ, & declinationis.

17. Eæ formulæ facile invenientur. Ob angulos rectos CQI, CRI puncta Q, R sunt ad semicirculum, cujus diameter esset CI: *hinc anguli* QCR, QIR insisterent eidem arcui QR ad peripheriam, adeoque *erit* QCR $=$ QIR, sive PIP', pro quo ob tantam viciniam punctorum C, & I *potest* assumi PCP' $= z$ (*num.* 11), & juxta eundem numerum 11 *erit* PC $= c$, P'C $= d$. Fiat autem præterea aberratio declinationis QI $= m$, & longitudinis CPQ $= n$, quorum valorum primus applicetur distantiæ a polo P, & exprimat numerum positivum, quando eam augebit, *ut in* casu expresso a figura, secundus positivum, ubi aberratio dirigatur secundum ordinem signorum, adeoque augeat longitudinem, quam cum angulus CPQ minuat in casu ejusdem figuræ, exprimetur hìc per n numerus negativus: in eodem autem sensu debebunt haberi hìc pro positivis valores, qui augeant distantiam a polo P' per aberrationem declinationis, & ascensionem rectam per aberrationem hujus. Si autem concipiantur QV, QT perpendicula ducta in CR, IR; erit TR $=$ QV, VR $=$ QT. Quod si ponantur arcus, & anguli exigui pro suis sinubus; erit CQ $=$ CPQ$\times$*sin.*PC $= n\,sin.c$, CV $=$ CQ$\times$*cos.*QCR $= n\,sin.c\,cos.z$, RT $=$ VQ $=$ CQ$\times$*sin.*QCR $= n\,sin.c\,sin.z$, VR $=$ QT $=$ QI$\times$*sin.*QIR $= m\,sin.z$, TI $=$ QI$\times$*cos.*QIR $= m\,cos.z$. Jam vero aberratio declinationis RI habebit summam binorum terminorum TI, & RT, quorum uterque in casu expresso a figura debet esse positivus, cum augeat distantiam a polo P', adeoque ea erit $= m\,cos.z - n\,sin.c\,sin.z$, ut nimirum ob valorem n negativum sit positivus etiam secundus terminus: aberratio autem ascensionis rectæ CR habebit positivum VR cum negativo CV, adeoque erit $m\,sin.z + n\,sin.c\,cos.z$, quorum prior

 erit

erit positivus, & posterior negativus ob n itidem negativum. En igitur formulas pro hisce aberrationibus (*):

Aberratio declinationis . . . . . . $m\cos.z - n\sin.c\sin.z$

Aberratio ascensionis rectæ . . . $\frac{m\sin.z}{\sin.d} + \frac{n\sin.c\cos.z}{\sin.d}$.

18. Ex his computari potest tabula generalis; quæ pro quavis longitudine, & latitudine exhibeat numeros quatuor, qui earum ope innotescent, nimirum $\cos.z$, $-\sin.c\sin.z$, $\frac{\sin.z}{\sin.d}$, $\frac{\sin.c\cos.z}{\sin.d}$. Inventis valoribus m, n per primam tabulam numeri 16 computatam adhibendo formulas numeri 14, inveniantur in hac secunda tabula pro quavis data longitudine, & latitudine ii quatuor numeri: primi duo ducti in m, & n exhibebunt aberrationem declinationis, postremi duo ducti in eosdem valores exhibebunt aberrationem ascensionis rectæ. Qui suscipiat computandam ejusmodi tabulam generalem, is posset prius computare aliam futuram usui non solum pro hoc casu, sed pro aliis etiam plurimis in Astronomia, in qua pro data longitudine, & latitudine haberetur angulus z, quem continet circulus latitudinis cum circulo declinationis, & declinatio. Satis esset computare ejusmodi tabulam pro unico octante sphæræ, cum in reliquis redeant eædem determinationes, & pro re præsenti satis esset habere ipsam in quinos gradus longitudinis, & latitudinis ob tantam aberrationum exiguitatem.

19. Hæc methodus, pro ascensione recta evadet erronea, ubi distantia ab alterutro polo æquatoris fuerit nimis exigua, quo casu, decrescente in infinitum $\sin.d$, aberratio ascensionis rectæ in formula excresceret in infinitum. Id autem accidit ob quantitates inferiorum ordinum, quæ in methodo differentiali negliguntur, quod quidem rite fit, donec eæ, respectu quarum negliguntur, non

(*) Hi valores adhibendi sunt cum suis signis, ubi reducendus sit locus verus ad apparentem: si apparens reduci debeat ad verum, adhibenda sunt signa contraria. Aberratio latitudinis, & declinationis, uti hic proponitur, appellanda potius fuisset aberratio distantiæ a polo, cui ea applicanda est, cavendo, quod, aucta distantia a polo, augetur latitudo, & declinatio australis, minuitur borealis.

non decrescunt in infinitum etiam ipsæ. Sic etiam formulæ pro latitudine, & longitudine non bene procedent in distantia a polo eclipticæ nimis exigua, ubi PI non est perpendicularis ad C*g*, nec CQ exigua respectu CP. Utrobique addibenda alia methodus, quæ rem immediate conficiat pro paucissimis iis fixis, quæ ita parum distent a polo, ut 20 secunda non sint quantitas exigua respectu ejus distantiæ.

20. Formulæ, quæ num. 17 inventæ sunt methodo particulari, inventæ *prius* fuerant alia methodo generaliore adhibente meas *formulas differentiales* Trigonometriæ, quæ habentur in Opusculo *XV* Tomi IV num. 15 adjectis in eodem Opusculo & demonstrationibus, & pluribus aliis usibus egregiis. Eæ sunt quatuor, & complectuntur nexus omnes inter exiguas mutationes, quæ occurrere possint in triangulorum omnium lateribus, & angulis, quarum tres quæcumque determinant quamvis e reliquis tribus. Hìc tamen occurrit usus binarum tantummodo applicatarum ad triangulum, *in quo unum latus sit constans*. In triangulo CPP' abeunte in IPP' præter *latus constans* PP' datur ex latitudine, & longitudine immediate latus PC, & angulus ad P, ex quibus reliqua, quibus opus fuerit, erui possunt. Mutatio lateris PC, & *anguli P* est ipsa aberratio latitudinis, & longitudinis, assumpta hac posteriore cum signo contrario, cum nimirum decrescente EPC, crescat P'PC: aberratio autem declinationis, & ascensionis rectæ sunt mutationes lateris P'C, & anguli PP'C. Ubi quæritur harum prior, combinatio ad rem necessaria est trium laterum PC, P'C, PP' cum uno angulo P: combinatio autem pro posteriore est laterum PC, PP' cum angulis ad P, & P': manet in utraque latus PP' sine mutatione, & dantur mutationes binorum e reliquis tribus terminis, ac quæritur mutatio tertii. Pro hisce mutationibus meæ formulæ sunt, quæ sequuntur.

Latera cum angulis oppositis . . . . x, y, z, p, q, r.

Pro x, y, z, p . . . . $dx - dy\cos.r - dz\cos.q - dp\sin.z\sin.q = 0$

Pro x, y, p, r .. $dx\sin.q - dy\cos.z\sin.p - dp\sin.z - dr\sin.x\cos.q = 0$

21. In prima combinatione angulus ad P debet esse $= p$, latus ipsi oppositum P'C $= x$, tum reliqua duo latera, ut libet,

 adeo-

adeoque fieri poteſt PP' $=y$, PC $=z$: tum erit angulus ad C $=q$, ad P' $=r$, adeoque erit $dy=0$, $-dp$ aberratio longitudinis $=n$, dz aberratio latitudinis $=m$: quæritur autem dx aberratio declinationis, quæ omiſſo $-dycos.r$ eruitur e priore formula $=dzcos.q+dpsin.zsin.q$, ubi cum angulus ad C, qui hìc eſt q, & latus PC, quod hìc eſt z; ſint (juxta denominationem numeri 11) z, & c, erit aberratio quæſita declinationis $mcos.z-nsin.csin.z$, eadem quæ numero 17 in iisdem valoribus numeri 11.

22. In ſecunda combinatione valor anguli P', cujus mutatio quæritur, debet eſſe p, ut habeat mutationem dx lateris oppoſiti PC datam $=m$: tum angulus ad P erit r, cujus mutatio $-dr$ eſt itidem data $=n$: hinc fiet angulus ad C $=q$, latus P'C $=z$, PP' $=y$. Facto in ſecunda formula $dy=0$, eruitur $dp=\frac{dxsin.q}{sin.z}-\frac{drsin.xcos.q}{sin.z}$: poſitis z, d, c pro C, P'C, PC ex numero 11, nimirum hìc pro q, z, x, habebitur aberratio quæſita aſcenſionis rectæ $=\frac{msin.z}{sin.d}+\frac{nsin.ccos.z}{sin.d}$.

§. III.

De ſecundo aberrationis genere orto e motu objecti reſpondente tempori, quo lumen ab ipſo devenit ad oculum.

23. ABERRATIONES, de quibus egimus in paragrapho ſuperiore, ſunt communes cuivis objecto, ſive ipſum ſit immotum toto tempore, quo lux ab ipſo devenit ad oculum, uti cenſentur manere fixæ, ſive interea moveatur motu quopiam, ut planetæ, & cometæ. Hinc aberrationi, quæ in fig. 4 reſpondet angulo CT'E, addenda eſt pro his objectis juxta num. 7 ea, quæ reſpondet angulo CT'C'.

24. Ejus valor determinari poteſt, ſi determinetur ratio diſtantiæ T'C ad rectam CC', & angulus T'CC', quibus habitis habetur ſpecies trianguli CT'C', & angulus ad T'. Ea ratio facile invenietur, ſi motus objecti ſit rectilineus, & uniformis, vel haberi

beri possit pro tali eo tempore, quo lux devenit ab ipso ad terram, & inveniatur ratio velocitatis terræ in orbita sua habita pro circulari ad velocitatem objecti ipsius. Nam ratio rectæ T'C ad CC' erit eadem, ac ratio, quam habet velocitas luminis ad velocitatem objecti, quæ componitur e ratione, quam habet velocitas luminis ad velocitatem terræ, & hæc ad velocitatem objecti. Prima est ratio, quam habet radius ad sinum aberrationis maximæ primi generis juxta ea, quæ habentur in paragrapho præcedente, & ea aberratio maxima est $= 20''$, adeoque ea ratio est radii ad sinum secundorum 20, nimirum 1 ad 0,000097.

25. Ex ipsa illa aberratione maxima $= 20''$, facile eruitur tempus, quo lux advenit a sole ad terram: cum enim arcus tam exiguus assumi possit pro suo sinu; eo tempore terra percurret in orbita sua eum arcum: porro ipsius motus horarius est circiter $= 2'.\ 28'' = 148''$, qui respondet secundis horariis 3600, adeoque secundis 20 ejus motus respondent secunda temporis $\frac{20 \times 3600}{148}$ $= 486 = 8',1$. Hinc tempus, quo lux devenit a quovis planeta, vel cometa visibili, est tam breve, ut ejus motus eo tempore haberi possit pro rectilineo, & uniformi, atque id eo magis, quod in distantiis majoribus, in quibus id tempus est aliquanto longius, sed adhuc semper satis breve, motus est magis lentus. Potest autem pro planeta posito in quovis puncto dato ejus orbitæ determinari velocitas relata ad velocitatem terræ, & angulus, quem directio tangentis eorum orbitæ in eo puncto continet cum recta tendente ad terram, ac directionis ipsius positio, quibus inventis, patet, inveniri posse tam magnitudinem ejus aberrationis, quam directionem, in quam ea tendit.

26. Facilius ea aberratio inveniri potest pro iis astris, quorum est cognitus motus verus, uti sunt planetæ, etiam sine suppositione motus rectilinei, & uniformis, sequenti pacto. Invenietur per tabulas astronomicas locus verus geocentricus planetæ pro momento, quo fit observatio, & distantia vera a terra pro eo momento, quæ haberi poterit pro æquali ei distantiæ, quam planeta habuit, cum lumen inde discessit. Si hæc distantia inveniatur,

tur, uti fieri solet, in partibus distantiæ mediæ solis a terra aſsumptæ pro unitate, & multiplicetur per ipsam tempus, quod lux impendit in suo cursu a sole ad terram, nimirum 8′, 1″; invenietur momentum ipsum ejus discessus. Invenietur locus verus heliocentricus pro eo momento, ex quo loco, & positione heliocentrica terræ pro momento, quo ipsa appellit ad T′, invenietur per calculum usitatum in Astronomia directio positionis geocentricæ T′C, quæ comparata cum priore loco geocentrico exhibente directionem T′C′ exhibebit angulum CT′C′ quæsitum.

27. Verum ea determinatio esset admodum operosa, & nullius usus. Illa est multo utilior, & admodum expedita, quæ pro planetis, & cometis exhibet immediate aberrationem compositam C′T′E, de qua agemus in sequenti paragrapho.

§. IV.

De aberratione composita e præcedentibus binis simul conjunctis.

28. ABERRATIO composita e binis conjunctis pro casu, in quo motus absolutus verus tam terræ, quam objecti, haberi possit pro rectilineo, & uniformi, non solum non auget complicationem, sed evadit simplicissimæ determinationis, quod sic demonstrabitur in fig. 6. Sit orbita terræ AI, objecti CH utraque rectilinea, ac terra allapsa ad T′ exceperit, ut prius, radium digressum ab objecto existente in C, & delatum per CDT′. Advenerit autem objectum ad C′ eo momento, quo terra, & lumen appulerunt ad T′: terra fuerit in A eo momento temporis, quo objectum, & particula luminis erant in C. Si concipiatur recta AC; ea erit parallela directioni apparenti T′E. Erit enim ob motum uniformem lucis, & terræ T′T ad T′A, ut T′D ad T′C, nimirum ut DD′ ad EC, adeoque ob rectam T′T = D′D erit & T′A = EC, quæ duæ rectæ postremæ cum sint etiam parallelæ, erunt itidem parallelæ T′E, AC.

29. Post aliquod tempus fiat nova observatio, per quam terra

alla-

allapsa ad t' excipiat radium digressum ab eodem objecto allapso ad c, & delatū per rectam ct'. Eodem pacto ductâ ex c rectâ parallelâ rectæ tt', quæ lateri $t'd'$ producto occurrat in e, & ca ad punctum a, ad quod devenerat terra eo momento, quo objectum advenit ad c, erit $t'e$ directio apparens, & recta ac ipsi parallela. Si compleatur parallelogrammum ET$'t'$C$''$, directione T'E translata motu parallelo cum terra in t'C$''$; motus apparens respectivus respectu telluris, fiet per angulum C$''t'e$, tanquam si tellure immota, objectum percurrisset rectam C$''e$.

30. Quod si hæc concipiatur producta usque ad concursum cum via objecti CH in c'; id punctum erit locus objecti ipsius in ea via momento secundæ observationis, quo terra appulit ad t'. Sunt enim similia triangula cec', CEC', adeoque est ce = at' : cc' : : CE = AT' : CC'. Cum igitur tempore, quo terra abiit per AT', objectum abierit per CC'; tempore, quo illa abiit per at', quo nimirum lux devenit per ct', objectum debuit abire per cc', & punctum c' erit locus verus objecti eo momento, quo terra delata ad t' ipsum videt in e. Porro C$''e$ fuit motus respectivus debitus tempori a prima observatione ad secundam, qui determinat motum apparentem angularem respondentem ei tempori, & ec' est recta, quæ determinat angulum aberrationis pro momento observationis secundæ, ac si ii anguli sint exigui considerari poterunt, ut proportionales iis rectis.

31. Quoniam vero objectum erat in C' momento primæ observationis, & in c' momento secundæ; motus verus objecti respondens intervallo temporis elapsi inter binas observationes erit C'c': erat autem cc' motus ipsius respondens tempori, quod lux impendit in percurrenda distantia ct'. Quare ea tempora erunt ut lineæ C'c', cc'. Si intervallum temporis inter eas observationes non fuerit nimis longum; distantiæ $t'c$, T'C parum admodum different inter se, adeoque & rectæ CC', cc', quæ sunt motus veri objecti respondentes motui luminis per eas distantias, assumi poterunt pro æqualibus. Hinc assumi poterit Cc pro C'c', & erit motus apparens C$''e$ ad aberrationem ec' compositam e binis ce, cc', ut Cc assumpta pro C'c' ad cc', nimirum ut tempus inter duas

duas observationes ad tempus, quod lux impendit in deveniendo ab objecto ad terram.

32. Id tempus, ubi agitur de planetis, & cometis conspicuis, est exiguum, & observationes pro motu apparente possunt fieri binis temporibus parum remotis a tempore ejus observationis, pro qua quæritur aberratio: adeoque potest tuto pro hoc effectu assumi motus ipsorum, & terræ eo tempore pro uniformi, adeoque ipsis convenit hæc theoria, & pro ipsis habebitur hoc egregium theorema: *aberratio pro planetis, & cometis composita e binis generibus expositis simul conjunctis, jacet in directione eadem cum motu apparenti, & est ejus pars respondens tempori, quo lux devenit ab eo objecto ad terram.*

33. Hinc habitâ quantitate motus apparentis, qui convenit dato intervallo temporis satis proximo illi momento, pro cujus observatione quæritur effectus aberrationis corrigendus, ut locus apparens reducatur ad locum verum, & habitâ distantia objecti ab oculo, adhibendæ sunt binæ proportiones, altera pro habendo intervallo temporis, quo lux devenit ab objecto ad oculum, altera pro habenda parte motus apparentis, qui convenit huic intervallo, e quibus obtinetur valor simplicissimus pro habenda hac parte. Distantia in partibus distantiæ mediæ terræ a sole facta $= 1$ dicatur d, intervallum temporis, cui respondet motus apparens qui dicatur u, redactum ad minuta sit t, tempus, quo lux devenit ab objecto ad oculum, erit $8', 1d$ (num. 25), tum aberratio angularis $\frac{8', 1du}{t}$. Hæc fiet in directione ipsius motus apparentis, qui si reducatur ad motum in longitudinem, latitudinem, ascensionem rectam, declinationem, adhibito valore u pro quovis ex hisce motibus, habebitur aberratio in longitudinem, latitudinem, ascensionem rectam, declinationem addenda cuivis ex hisce positionibus, prout motus u illam auxerit, vel imminuerit.

34. Quoniam pro planetis, & cometis particula motus apparentis absoluti est perquam exigua ob brevitatem temporis, quo lumen devenit ad oculum; satis est habere determinationem distantiæ factam modo utcumque crasso: pro planetis satis est assume-

sumere illam, quæ eruitur e tabulis, quæ erit multo magis proxima veræ, quam necessarium sit ad hunc usum, & pro cometis illam, quæ obtinetur etiam e methodo graphica exposita in *Opusculo I Tomi III*. Distantia a terra Saturni omnium remotissimi e veteribus planetis non est nisi 10,5, ubi is abit post solem, hinc tempus ipsi respondens non est nisi $10,5 \times 8',1 = 85'$: motus ipsius geocentricus in ea conjunctione superiore cum sole pro die integro, nimirum pro minutis $60 \times 24 = 1440$ est circiter minutorum 7 parum admodum mutatus a mutata celeritate Saturni, & terræ, adeoque motus apparens pro minutis 85 est circiter $= \frac{85 \times 420''}{1440} = 25''$. Distantia novi planetæ duplo major exigit pro adventu luminis tempus duplo majus, sed motus heliocentricus reducendus ad geocentricum minuitur multo magis a tempore periodico fere triplo longiore, quam augeatur pars motus apparentis ab intervallo temporis, quod impenditur a luce in suo motu non nisi duplo longiore.

35. Pro planetis propioribus velocitas motus heliocentrici augetur, sed distantia minuitur cum tempore, quod respondet motui luminis. Pro cometis, qui nunquam apparent in distantia a terra tripla distantiæ hujus a sole, id tempus nunquam abit ad 24'. Cum ii habent eam distantiam a terra, non possunt habere distantiam a sole minorem duplâ distantiâ hujus ab ipso, in qua habent velocitatem æqualem velocitati terræ. Si hic motus sit perpendicularis radio vectori, quod non accidit, nisi in perihelio, & contrarius motui terræ; duplicandus erit ab hoc illuc translato ad habendum motum apparentem nobis hinc spectantibus, & ob distantiam ipsius a nobis triplam distantiæ nostræ a sole inducet motum apparentem subtriplum dupli motus heliocentrici terræ: cum hic pro die integro sit gradus unius, is esset $= \frac{2}{3} \times 60' = 40'$, adeoque pro minutis temporis 24 esset $= \frac{24 \times 40'}{24 \times 60} = 40''$ exhibens aberrationem usque adeo exiguam. Habitus est aliquando motus apparens cometæ uno die major etiam gradibus 50, sed id non accidit nisi ob ejus transitum in ingenti vicinia

respectu terræ, in qua ita minuitur tempus debitum motui luminis, ut pars ejus motus apparentis cometæ respondens tempori tam brevi sit semper admodum exigua, ex quibus omnibus constat, satis esse pro æstimando eo tempore habere determinationem distantiæ per solam etiam graphicam operationem.

36. Pro motu apparenti *u*, qui respondet intervallo temporis *t*, fere semper poterit assumi is, qui convenit intervallo cuivis non nimis magno, nec nimis remoto a momento observationis corrigendæ, quia motus apparens tempore non nimis longo solet esse quamproxime æquabilis. Si habetur in eo inæqualitas aliquanto major; poterit is desumi a binis observationibus factis ante, & post illam, cujus aberratio quæritur: tum enim ejus quantitas adhibenda pro *u* respondebit accuratius, illi, quæ convenit tempori observationis corrigendæ. Verum illud apprime notandum est, regulam traditam non habere locum, nisi motus apparens eruatur directe e binis locis observatis, vel reducatur ad eum, qui ita esset observatus. Necessario is erit observandus immediate pro cometis ante determinationem satis accuratam ipsorum theoriæ: pro planetis, si corrigenda sit observatio exhibens locum apparentem, quin habeatur alia, ex qua comparata cum illa eruatur motus apparens, oportebit ope tabularum eruere locum, qui debet esse apparens pro alio quovis momento Ad eum obtinendum oportet earum ope invenire locum verum heliocentricum non pro momento, quod assumitur, præter illud, cujus observatio est adhibenda, quo nimirum planeta est in puncto C^{v}, sed pro anteriore per intervallum temporis, quo lux devenit ab objecto ad terram, quo momento id est in C: hic locus heliocentricus reducendus est ad geocentricum, quæ reductio exhibebit directionem T'C, & corrigendus per aberrationem primi generis CT'E, quæ correctio exhibebit directionem T'E, sive *t*'C^{v}, & ea comparata cum directione *t*'*e* dabit motum C^{v}*t*'*e* = *u*.

37. Si directio apparens *t*'*e* inveniatur per comparationem cum aliqua fixa; debet locus hujus apparens corrigi per aberrationem primi generis, ut reducatur ad verum, quem ea fixa obtineret

in

in superficie sphæræ cælestis, ita enim obtinebitur punctum sphæræ ejusdem, ad quod tendit directio *t'e* apparens, quæ comparari possit cum directione T'E determinata eodem modo per comparationem cum fixa quapiam, ut habeatur motus apparens C''*t'e* adhibendus in regula proposita: verum si utraque comparatio fiat cum eadem fixa, vel cum fixis proximis, pro quibus aberratio primi generis erit ejusdem ad sensum & magnitudinis, & directionis; ad habendam directionem, & magnitudinem motus apparentis omitti poterit ea applicatio ejus aberrationis primi generis ad reducenda bina *loca fixæ*; nam ea omissio retrahet tantummodo rectam C''*e* *versus c*C per intervallum æquale rectæ *ec*, conservatâ ipsius & directione, & magnitudine.

38. Quoniam pro objectis terrestribus immotis respectu terræ motus apparens est nullus; pars ejus esset nulla etiam si via radii ab objecto ad oculum esset longitudinis ingentis: sed accedit etiam brevitas itineris fere momentanei. Verum facile eruitur etiam immediate defectus aberrationis compositæ ejusmodi objectorum e sola consideratione figuræ *6*: motus annuus objecti CC' est parallelus, & æqualis motui AT': hinc punctum C' âbit in E, & oculus adveniens ad T', videt objectum delatum ad E per directionem T'E, quæ tendit ad ipsum. Videt ipsum per radium CT' digressum ab eo tum, cum id erat in C, sed ipsum videt per directionem T'E parallelam rectæ TD ita inclinatam ad radium T'C, ut incurrat in id punctum, ad quod objectum pervenit eodem momento, quo radius appellit ad oculum. Error secundi generis ortus ex motu objecti per CE corrigit errorem primi ortum ex inclinatione lineæ visualis T'E ad directionem T'C radii advenientis per CT'. Motus diurnus non est æqualis, si objectum non jacet in eodem parallelo cum oculo; sed discrimen nullam potest parere sensibilem aberrationem, dum totus integer diurnus motus in immensum major eo discrimine non parit ullam aberrationem, quæ sub sensum cadat, ut vidimus superius. Aberratio sensibilis haberetur in objecto terrestri spectato per tubum plenum aqua, uti diximus itidem superius, ob velocitatem lucis in tubo diversam a velocitate extra ipsum, qua fit,

ut inclinatio tubi debeat esse minor, vel major, si velocitas per aquam sit e contrario major, vel minor, quam velocitas per aerem: tubus dirigitur ad punctum positum in primo casu in recta CE inter C, & E, & in secundo ultra E, ex quo effectu combinato cum mutatione, quam subit directio tubi a motu diurno, oriuntur omnes illi motus apparentes, quos persecuti sumus in illo Opusculo Tomi II.

39. In luna aberratio primi generis orta e motu terræ annuo corrigitur, ut in objectis terrestribus, a motu lunæ ipsam comitantis. Motus ejus menstruus debet parere aberrationem secundi generis, sed ea evadit insensibilis ob immensam brevitatem temporis impensi in motu luminis per distantiam usque adeo exiguam. Distantia solis a terra e parallaxi horizontali $8''\frac{1}{2}$, eruitur semidiametrorum terrestrium paullo plus quam 24000, in qua lux impendit (num. 25) secunda 486: distantia media lunæ a terra est circiter earum semidiametrorum 60, adeoque tempus huic respondens est $\frac{60 \times 486}{24000} = \frac{486}{400}$, paullo longius uno secundo temporis: motus lunæ menstruus respondens ei tempusculo est minor uno secundo.

40. Stellis fixis theoria exposita applicari non potest: ipsarum distantia est tanta, ut non solum pro rectilineo assumi non possit motus terræ respondens tempori, quo lux inde ad terram pervenit, sed etiam respectu proximarum plures integras conversiones ipsa perficiat, & admodum credibile est, plura conversionum integrarum millia respondere ei tempori respectu plurimarum ex ipsis fixis. Fixæ censentur nullam habere annuam parallaxim. Paullo ante postremum Veneris transitum suborta fuerat suspicio de parallaxi annua Sirii, qui ob tantam vim luminis censetur omnium minime distans, assurgente ad 15 secunda: post observationes plurimas, & plures earum combinationes ea suspicio evanuit, & jam censetur ea parallaxis esse nulla. Si ea pro tota diametro orbis annui esset unius secundi, distantia Sirii contineret tot diametros orbis annui, quot secunda peripheriæ circuli continentur in radio, nimirum 206265: cum lux in percurrenda una e-

jus semidiametro impendat minuta 8,1; in percurrenda ea distantia impenderet minuta $16{,}2 \times 206265 = 3341493$, nimirum horas 55692, sive dies 2320, nimirum plus quam sex annos. Porro si fixæ telescopicæ idcirco tantum apparent usque adeo minores; saltem earum aliquæ, quod licet æquales Sirio, sunt remotiores ipso in ratione subduplicata vis luminis; aliquæ ex iis erunt etiam millecuplo magis remotæ, adeoque lumen impendet etiam sex annorum millia in percurrenda tam immani distantia. Possunt eo tempore habuisse motus ingentes nobis incognitos, & vero etiam a pluribus annorum millibus esse extinctæ, & adhuc nobis apparere per lumen, quod ante sex annorum millia ab ipsis adhuc existentibus fuerat emissum. Sic si noster hic aer extenderetur usque ad lunam, & sonus per ipsum propagaretur sensibilis cum eadem velocitate quam habet hic; non deveniret huc e luna nisi circiter post 14 dies. Possemus audire hominem nos alloquentem, qui tamen jam a pluribus diebus fuisset mortuus.

41. Hinc ubi agitur de stellis fixis, nulla habetur ratio loci, quem reipsa obtinent tum, cum videntur. Pro loco ipsarum vero consideratur is, ad quem tenderet *directio radii advenientis ad oculum, si nulla ipsum refractio detorqueret. Hinc pro reductione loci visi ad eum verum non adhibetur, nisi duplex correctio, ea, quæ respondet refractioni, & altera, quæ respondet aberrationi primi generis, quæ sola intelligitur, ubi nominatur aberratio respectu fixarum. Adduntur etiam aliæ reductiones*, ut eæ, quæ pertinent ad præcessionem æquinoctiorum, & nutationem, sed eæ oriuntur a motu, quem habet axis æquatoris terrestris, & positio æquatoris ipsius, non ad substituendum locum verum loco apparenti.

OPU-

OPUSCULE XIV.

DÉMONSTRATIONS SIMPLES DE QUELQUES BEAUX THÉORÈMES APPARTENANTS AUX TRIANGLES.

1. LES théorèmes, qu'on démontre dans ce petit Opuscule, sont élémentaires, & très-connus. Ils appartiennent à la manière de trouver par les trois côtés donnés un angle quelconque, le rayon du cercle inscrit, & l'aire. Les démonstrations, qu'on en donne habituellement dans les ouvrages élémentaires, sont assez compliquées. Ayant trouvé une démonstration du premier théorème d'une très-grande simplicité, & d'une élégance extraordinaire, & telle qu'avec la même figure, les mêmes mots elle s'applique au triangle plan, & sphérique, & voyant que les deux autres dans le triangle plan en découlent par eux-mêmes, & que pour l'aire du sphérique il y a une détermination également simple & élégante, je crois pouvoir proposer tout cela comme un objet très-utile aux rédacteurs des éléments, pour épargner aux jeunes élèves beaucoup de peine, & leur inspirer un certain goût de simplicité, de netteté, & d'élégance, qui doivent avoir lieu principalement dans les vérités élémentaires, par lesquelles on commence à développer ses idées, & l'on se fraye un chemin aux connoissances plus compliquées, & plus sublimes.

2. *Theor.* Dans un triangle BAD (Tab. X fig. 7) rectiligne, ou sphérique quelconque, si l'on ôte les deux côtés AB, AD quelconques de la demi-somme de tous les trois côtés l'un après l'autre, & que l'on appelle les deux restes M, N, & le rayon R, on aura la proportion suivante $R^2 : sin^2.\frac{1}{2}A :: AB \times AD : M \times N$, ou $:: sin.AB \times sin.AD : sin.M \times sin.N$.

3. Pour la démonstration, qu'on conçoive les angles ABD, ADB coupés en deux parties égales par les lignes droites, ou circu-

culaires BC, DC, & CE, CF, CG perpendiculaires aux trois côtés AB, AD, BD, comme aussi BI, DH perpendiculaires à la ligne AC *prolongée*. Il est assez évident, qu'on aura CE = CG = CF, que l'angle BAD sera aussi coupé en deux parties égales, & qu'on aura trois binaires des lignes égales AE, AF; BE, BG; DF, DG, & trois d'angles égaux ACE, ACF; BCE, BCG; DCF, DCG. C'est pourquoi, si l'on prend une ligne par binaire, on aura la demi-somme des trois côtés; & si l'on prend un angle par binaire, on aura la somme des deux droits, puisque *la* somme des trois premiers binaires est la somme des trois côtés, & *la* somme des trois derniers forme les quatre angles droits autour du point C.

4. On voit par-là, qu'un terme du binaire des lignes adjacentes à un angle sera l'excès de la demi-somme des trois côtés sur le côté opposé à cet angle, qui doit contenir un terme de chacun des deux autres binaires; & un terme du binaire des angles opposé à ce terme des lignes sera le supplément de la somme des deux appartenants chacun à un des deux autres binaires. Si on nomme D la demi-somme des trois côtés; on aura AE + BE + DG = D, & DG = D − AE − BE = D − AB = M, comme aussi AF + FD + BG = D, & BG = D − AD = N. On aura aussi ACE + BCE + DCG = 180°, & DCG sera *le* supplément de ACE + BCE, c'est-à-dire de ACB, & par-là = BCI, comme aussi BCG = 180° − ACF − DCF supplément de ACD sera = DCH.

5. Or par la proportion des côtés dans la Trigonométrie plane, & de leurs sinus dans la sphérique, avec les sinus des angles opposés, on aura *la* proportion entre DC, DG, DH, ou de leurs sinus, avec le rayon, & les sinus des DCG, DCH, & de même entre BC, BI, BG avec le rayon, & le sinus des BCI, BCG, qui sont égaux à DCG, DCH. Donc si dans le cas du triangle sphérique on exprime les sinus par leurs arcs; on aura la proportion suivante, DG : DH :: BI : BG, & BI×DH = BG×DG = MN. Or aussi R : *sin.*BAI = $\frac{1}{2}$BAD :: AB : BI, & R : *sin.*DAH = $\frac{1}{2}$BAD :: AD : DH. Donc R^2 :

*sin*².

$sin^2.\frac{1}{2}$BAD :: AB×AD : BI×DH = MN, d' où l' on tire $sin^2.\frac{1}{2}BAD = \frac{MNR^2}{AB\times AD}$, où en faisant R = 1 on a $sin^2.\frac{1}{2}BAD = \frac{MN}{AB\times AD}$.

6. *Cor.* 1. Si l'on fait le rayon R = 1, on aura $log.sin.\frac{1}{2}$BAD = $\frac{1}{2}$(*log.*M + *log.*N + *compl.log.*AB + *compl.log.*AD), ce qui rend le calcul assez court.

7. *Cor.* 2. Si l'on fait D − BD = P; on aura (num. 4) AE = AF = P, & comme on a aussi DG = DF = M, BG = BE = N, on aura BD = M + N, D = P + BD = P + M + N, AD = AF + DF = P + M, AB = AE + BE = P + N. De là on tire AD×AB = (P + M)×(P + N) = P^2 + PM + PN + MN = P(P + M + N) + MN = PD + MN; & puisque on a cette proportion, $AC^2 : CF^2 :: R^2 : sin^2.CAF = sin^2.\frac{1}{2}BAD$; on aura cette autre (num. 5) PD + MN : MN :: $AC^2 : CF^2$ :: (dans le triangle plan) $AF^2 + CF^2 : CF^2 :: \frac{AF^2}{CF^2} + 1 : 1$; d'où l'on tire PD + MN = $MN\times(\frac{AF^2}{CF^2} + 1) = \frac{MN\times AF^2}{CF^2}$ + MN, & ôtant MN, & mettant P pour AF, on aura PD = $\frac{MNP^2}{CF^2}$, & à la fin $CF^2 = \frac{MNP}{D}$. Cela donne pour le triangle plan ce beau théorème. *Si de la demi-somme des trois côtés on ôte les mêmes côtés, l' un après l' autre, & qu' on divise le produit des trois restes par la dite demi-somme; on aura le quarré du rayon du cercle inscrit.*

8. *Cor.* 3. Dans le triangle sphérique on a par les formules connues *tan.*CF = *sin.*AF×*tan.*CAF = *sin.*P×*tan.*CAF, ou *cot.*CF = $\frac{cot.CAF}{sin.P}$, $cot^2.CF = \frac{cot^2.CAF}{sin^2.P}$. Par la nature des sinus on a $cot^2. = \frac{cos^2.}{sin^2.} = \frac{1 - sin^2.}{sin^2.} = \frac{1}{sin^2.} - 1$, d'où l'on tire $\frac{1}{sin^2.CF} - 1 = \frac{1}{sin^2.P\times sin^2.CAF} - \frac{1}{sin^2.P}$, & $\frac{1}{sin^2.CF} = \frac{1}{sin^2.P\times sin^2.CAF}$

$-\frac{1}{sin^2.P}+1=\frac{sin.AB\times sin.AD}{sin^2.P sin.M sin.N}-\frac{1}{sin^2.P}+1$, puiſque l'angle CAF eſt $=\frac{1}{2}$BAD, & $sin^2.\frac{1}{2}BAD$ eſt $=\frac{MN}{AB\times AD}$ (num. 5).

9. Par cette formule on trouve le ſinus de CF, qui eſt le rayon du cercle inſcrit dans un triangle ſphérique. Elle eſt beaucoup plus compliquée, que la précédente, qui appartient au triangle rectiligne; mais je crois, qu'on ne peut pas la ſimplifier beaucoup plus. On peut bien en déduire cette précédente, en ſubſtituant les côtés aux ſinus, qui s'y confondent, quand le rayon de la ſphère devient infini; mais alors dans la valeur de $\frac{1}{sin^2.CF}$ le dernier 1 doit diſparoître devenant infiniment plus petit, que les autres termes, qui pour l'homogénéité doivent être multipliés par le quarré du rayon infini. Alors on aura $\frac{1}{CF^2}=\frac{AB\times AD}{P^2MN}-\frac{1}{P^2}=$ (num. 7) $\frac{PD+MN}{P^2MN}-\frac{1}{P^2}=\frac{PD}{P^2MN}+\frac{MN}{P^2MN}-\frac{1}{P^2}$, & comme $\frac{MN}{P^2MN}-\frac{1}{P^2}$ eſt $=\frac{1}{P^2}-\frac{1}{P^2}=0$, on aura $\frac{1}{CF^2}=\frac{PD}{P^2MN}$, & $CF^2=\frac{MNP}{D}$ comme au num. 7.

10. Mais on trouvera plus aiſément la valeur de ce rayon pour le *triangle* ſphérique, en trouvant l'angle CAF $=\frac{1}{2}$BAD par la formule du num. 5, qui en mettant les ſinus pour les arcs devient $sin^2.CAF=\frac{sin.M sin.N}{sin.AB\times sin.AD}$, & l'arc CF par la formule $tan.CF=sin.AF\times tan.CAF=sin.P\times tan.CAF$; & en prenant le ſinus de cet arc.

11. *Cor.* 4. L'aire du triangle plan BAD $=$ ACD $+$ ACB $+$ BCD ſera la demi-ſomme des trois côtés AD, AB, BD multipliés par la hauteur CF $=$ CE $=$ CG: ainſi ſon quarré ſera $=D^2\times CF^2=D^2\times\frac{MNP}{D}=DMNP$; & par-là cet autre beau théorème: *le quarré de l'aire d'un triangle plan quelconque eſt égal au pro-*

produit de la demi-somme des trois côtés par les trois excès de la même demi-somme sur les mêmes côtés.

12. *Schol.* Il y a une détermination aussi très-simple & très-élégante de l'aire du triangle sphérique, mais elle exige une marche très-différente pour la trouver, & la démontrer. Les méthodes, qu'on y employe ordinairement sont assez compliquées, & sublimes. En voila une bien simple & facile (*). Elle suppose peu de choses du côté des éléments de la sphère, & la première idée de l'intégration des termes les plus simples.

13. Soit (fig. 8) C le centre d'une sphère, AB un axe, D*d*E un cercle du pôle A, qui aura le centre dans l'intersection I de l'axe AB avec son plan, & rencontrera en D, *d* deux demi-cercles ADB, A*d*B, qui ont le diamètre commun AB. Si l'on fait le rayon de la sphère $= 1$, la demi-circonférence du grand cercle $= c$, l'arc AD $= z$, l'angle DA*d* $= a$; on sait, que la surface du grand cercle sera $= c$, la surface de toute la sphère $= 4c$, & que comme AB $= 2$ est à AI $=$ CA $-$ CI $= 1 - cos.z$, ainsi la surface totale $4c$ est à la surface du segment DAE*d*, qui restera $= 2c - 2c\,cos.z$: de même comme quatre angles droits $= 2c$ sont à l'angle DA*d* $= a$, ainsi cette surface $= 2c - 2c\,cos.z$ est à l'aire DA*d* $= a - a\,cos.z$.

14. Soit à présent (fig. 9) BAD un triangle sphérique, dont le côté BD soit augmenté de la quantité D*d* infiniment petite: DA*d* sera la différence de l'aire. Si on fait l'angle BAD $= p$, BDA $= q$, ABD $= r$, le côté AD $= z$, l'aire BAD $= x$; on aura l'angle DA*d* $= dp$, & l'aire DA*d* $= dx = dp - dp\,cos.z$ par le numéro précédent. Que l'on conçoive l'arc DB continué en G du côté de B, & du côté de D jusqu'à la continuation de l'arc DA en F, & que l'angle F*d*E soit égal à l'angle F le point E étant sur l'arc DAF.

15. On sait, que DAF, D*d*F doivent être deux demi-cercles, & com-

(*) On a cette même détermination, trouvée par un procédé bien différent dans l'Opuscule XV du Tome IV sans aucune forme d'intégration, & démontrée avec toute la rigueur géométrique, en faisant voir, que d'avoir négligé des quantités infiniment petites n'y produit aucune erreur pas infiniment petite.

& comme la différence des arcs DE, *d*E doit être moindre de la D*d* infiniment petite, on pourra regarder les arcs DE, EF comme égaux, c'est-à-dire comme un quart de cercle chacun, & AE comme complément de AD. L'angle EDF doit être = EFD = F*d*E, & BDE, B*d*E leurs supplémens aussi égaux. Donc A*d*E sera la diminution de l'angle BDA devenu B*d*A, si DA est moindre de 90°, dans lequel cas son co-sinus est positif, & pour cela le même A*d*E sera $= -dq$. Or prenant les angles infiniment petits pour leurs sinus, on aura la proportion suivante, *sin.*E*d* $= 1$: *sin.*AE = *cos.*AD = *cos.z* :: *sin.*EA*d* = *sin.*DA*d* $= dp$: *sin.*A*d*E $= -dq = dp\,cos.z$. Donc $dq = -dp\,cos.z$, & dx, qui étoit $= dp - dp\,cos.z$, sera $= dp + dq$. L'intégration donnera $x = p + q + m$, la valeur m étant une constante, qu'on détermine très-aisément de la manière suivante.

16. L'angle GBA est $= 180° - ABD = 180° - r$: la valeur x de l'aire BAD doit s'évanouir, quand le point D va en B. Or alors BAD $= p$ devient $= 0$, & BDA $= q$ devient GBA $= 180° - r$. Donc $180° - r + m = 0$, & $m = r - 180°$: ainsi la valeur x de l'aire cherchée, qui étoit $= p + q + m$ sera $= p + q + r - 180°$, d'où l'on tire ce beau théorème. *L'aire d'un triangle sphérique est égale à l'excès de ces trois angles sur 180 degrés.*

17. Cette expression porte l'égalité de cette aire avec un rectangle du rayon de la sphère, que nous avons pris pour unité, & d'un arc du grand cercle, qui mesure cet angle. Pour cela *elle sera égale à un secteur du grand cercle qui aura l'angle double de cet excès*. On pourra aussi énoncer ce beau théorème, en disant, *la surface de la sphère est à l'aire d'un triangle sphérique comme quatre angles droits sont à l'excès de ses trois angles sur deux droits*. Toutes ces expressions reviennent au même.

18. Dans le triangle plan ce sont les trois côtés, qui déterminent l'aire, dans le sphérique les trois angles. Mais comme les trois angles sont déterminés par les trois côtés; on peut dire, qu'ici aussi les trois côtés déterminent l'aire comme dans le triangle plan.

EXTRAIT DU TOME V.

1. Ce dernier Volume contient quatorze Opuscules, dont les sujets ou appartiennent direćtement à l' Astronomie, ou y ont du rapport, comme le dernier, qui appartient direćtement à la Trigonométrie plane, & sphérique, dont on fait un usage continuel dans l'Astronomie. Les quatre premiers occupent plus d trois quarts du total, les autres étant tous très-courts.

§. I.

Du premier Opuscule.

2. L'objet de ce premier Opuscule est la disparition & ap parition de l' anneau de Saturne. Cet anneau est circulaire bien grand, plat, & mince, détaché du globe de la planète de manière que de quatre parties du demi-diamètre de celui-ci l'intervalle vide en contient $2\frac{1}{2}$, & la largeur de l' anneau autant. Il est éclairé par le soleil, comme le globe, mais on ne le voit jamais, que sous une forme elliptique à cause de l'obliquité de sa position par rapport à la terre. La différence de la position de la terre par rapport à son plan rend cette forme plus ou moins rétrécie : elle devient presqu' une simple ligne droite, quand son plan passe par la terre, & alors il disparoît, son épaisseur n'étant pas sensible : il disparoît aussi, quand ce plan est tourné vers le soleil, qui n' éclaire alors sensiblement sa surface plate, & ces sont des positions momentanées. On ne le voit pas aussi quand son plan passe entre le soleil, & la terre, la surface éclairée n'étant tournée alors vers celle-ci. On voit seulement une partie de la surface obscure projetée comme une ombre sur le disque de la planète. Cette position dure quelque temps : la disparition com-

men-

mence toujours & finit par une des deux positions précédentes, & il s'agit de déterminer les moments de la disparition, & de la nouvelle apparition.

3. *M. de Sejour* a traité ce sujet en grand Analyste, en y employant le grand calcul, & il a donné la solution des problêmes, qui y appartiennent, en appliquant encore le calcul numérique aux grandes formules avec un travail immense. Je me suis aperçu, qu'on pouvoit avoir tout beaucoup plus aisément à l'aide de la courbe des sinus, qui donne par sa construction très-aisée les valeurs qu'on cherche peu éloignées des véritables, & on les réduit à l'exactitude par la méthode de la fausse position, qui rend presque toujours la détermination des valeurs cherchées incomparablement plus facile, & qu'on peut employer toujours avec succès, quand on a le moyen de trouver ces valeurs par une construction géométrique, qui les détermine par un à-peu-près. Je n'ai pas divisé cet Opuscule en des paragraphes, comme presque tous les autres; mais en plusieurs problêmes, dont j'ai donné la solution, en y ajoutant des corollaires, & des scholies, avec un Appendice à la fin. Je m'étendrai un peu plus dans cet extrait sur les propriétés de la ligne des sinus en ne faisant, qu'indiquer le reste.

4. La solution du premier problême donne la construction de cette ligne par des points dépendamment du rapport de la circonférence du cercle au rayon, qui par une très-grande approximation est, comme on sait, celui de 355 à 113: dans onze corollaires, avec trois scholies on a plusieurs propriétés de cette courbe, principalement celles, qui doivent servir pour déterminer les temps des apparitions, & disparitions de l'anneau de Saturne, avec quelque usage de la même courbe, & dans le dernier scholie on indique la manière d'appliquer ces propriétés à la recherche de ce qui est l'objet de cet Opuscule. Dans l'Appendice qui se trouve à la fin du même Opuscule on a une espèce de complément de la théorie de la même ligne.

5. On a la construction de la courbe dans les figures 1, & 2 de la planche 1. Dans la première on a un cercle, avec son diamètre

mètre

mètre ACB, & la circonférence ADBD'A, qu' on divisera par une bisſection continuelle en un nombre de parties pas trop petit, & on tirera de chaque division le sinus perpendiculaire à ce diamètre comme FE : à la fig. 2 on prendra les lignes droites AB, BA', qui soient au rayon AC, comme 355 à 113, & on les divisera en autant de parties : par chaque division on tirera une ligne perpendiculaire à la ligne ABA' égale au sinus correspondant de la fig. 1, & dans la même direction comme les EF, E''F'', E'''F''', E'F' de la fig. 2 aux EF, E'F'', E'F''', EF' de la fig. 1. On dessinera par tous les sommets F de ces lignes à la main une ligne continue, qui sera la ligne des sinus cherchée : elle sera une ligne courbe, qui aura deux arcs, un supérieur ADB, l' autre inférieur BD'A', qui répondront aux deux demi-cercles ADB, BD'A de la fig. 1, & auront sur l' axe ABA' les bases AB, BA' égales aux demi-circonférences appartenantes à ces demi-cercles : j' appelle chacun de ceux-là un arc *demi-circulaire*.

6. Comme on peut continuer dans la fig. 1 le mouvement sur la circonférence dans la même direction, & dans l' opposée à l' infini, ainsi on peut continuer dans la fig. 2 les bases d' un côté, & d' autre avec leurs arcs à l' infini, qui seront tous égaux entr' eux : par-là en faisant la délinéation d' un de ces arcs en gros papier, & le coupant, on peut s' en servir, comme d' un modèle pour en dessiner autant qu' on veut, & même il suffit pour cet objet d' en avoir la moitié d' une qui transportée, & tournée à propos donneroit toute la continuation autant qu' un en voudroit : on voit quatre de ces arcs à la fig. 6, qui répondent à deux cercles, & tous ceux de cette planche ont été dessinés avec justesse : on en a indiqué dix aux figures 8, 9, 10, 11 (planche II), mais pour ne pas trop allonger ces figures on les a rétréci en y substituant des demi-cercles.

7. Dans les corollaires, & scholies on fait voir, qu' à l' aide de cette courbe déjà dessinée on peut trouver le sinus d' un arc du cercle égal à une ligne droite donnée, & une ligne droite égale à l' arc qui répond à un sinus donné, ou égale à un arc, dont on a les deux points extrêmes, par où on a non seulement la trisection

d' un

d'un arc ainsi donné, & par-là d'un angle donné, mais on peut le diviser en un nombre de parties égales donné quelconque, & aussi en une *raison donnée* quelconque, même irrationnelle. On démontre, que la sous-tangente de la ligne des sinus est égale à la tangente du cercle dans les points correspondants, comme la ET de la fig. 2 à la FT de la fig. 1, & cette propriété est essentielle pour l'objet de cet Opuscule: il s'ensuit, que la sous-tangente ET (*fig.* 2) de la ligne des sinus est plus grande, que l' abscisse AE, la distance AT de la tangente au premier point de la base étant *égale à l'excès de la tangente de l'arc du cercle, qui répond au sinus FE, sur le même arc*.

8. Non seulement par cette propriété de la sous-tangente on pourra tirer la tangente par un point de la courbe donné quelconque, mais on pourra tirer une tangente *telle*, que la sous-tangente ET ait une raison donnée à l'ordonnée EF: pourtant on voit que le premier terme de cette raison ne doit pas être plus petit *que le second. La raison donnée* détermine l'angle, que la tangente contient avec l'axe, qui à cause de l' excès nécessaire de chaque sous-tangente sur l'ordonnée ne peut jamais être plus grand qu' un demi-droit: il lui sera égal celui d'une tangente tirée par le point premier, ou dernier d'un arc demi-circulaire, où la sous-tangente s' évanouit avec l' ordonnée. Il y a une construction simple au corollaire 9 pour déterminer la tangente, qui aura cette raison donnée de la sous-tangente à l' ordonnée, c' est-à-dire son *angle donné* avec l'axe, & une formule pour la déterminer par un calcul numérique, & cette détermination est essentielle pour l' objet de cet Opuscule.

9. Dans chaque arc demi-circulaire il y aura deux tangentes, qui contiendront avec l'axe un angle égal à un quelconque moindre d' un demi-droit, mais tournées vers les parties opposées, comme dans la fig. 2 les FT, F''T'': il y en aura deux dans chaque supérieur comme celles-là, & deux dans chaque inférieur comme F'T', F'''T''', & chacune d'un des deux sera parallèle à une d' un autre, comme FT à F'T', & F''T'' à F'''T'''. Seulement quand la sous-tangente sera infinie, & l'angle zero, n'y aura qu' une

une seule tangente pour chaque arc demi-circulaire, qui le touchera dans son sommet D, ou D', la tangente devenant *parallèle* à l'axe, & *celle-là* touchera tous les autres arcs *demi-circulaires*, qui se trouveront du même côté par rapport à *l'*axe *dans leur sommet*.

10. La ligne des sinus est par-tout concave vers l'axe, ayant dans chacun de ses points une tangente, qui ne le rencontre dans aucun autre, & laisse l'arc de tous les deux côtés vers l'axe: celle qui le touche dans un de ses deux points extrêmes, où *la* continuation de la courbe coupe *le* même axe, *ne* rencontre jamais plus la courbe entière *continuée à l'infini de deux côtés*, comme la ligne VAO de *la fig. 6*, qui *la* touche en A, & ne peut pas *la* rencontrer *plus* aucune part. Elle la touche, & coupe à *la* fois dans ce point, où la courbe a une inflexion contraire vers les parties opposées. Aucune autre tangente tirée par un autre point de la courbe quelconque ne touche ni cet arc demi-circulaire, ni aucun autre de la courbe *infinie*, *hors de celle*, qui passe par quelqu'un de ces points, où *celle*-ci rencontre l'axe, & de celle, qui passe *par le* sommet *d'un* arc demi-circulaire: celle-là en touche un autre de direction opposée en un point également éloigné, comme la ligne PA*p* (*fig. 8 planche* II), qui la coupe en A, & touche deux arcs opposés en P, & *p*, l'autre *é*tant parallèle à l'axe la touche dans une infinité de points, comme on a dit, qui sont tous les sommets des arcs demi-*circulaires* placés du même côté. Toute autre tangente coupe *l'*axe *hors* de la base de l'arc demi-circulaire touché: elle coupe aussi en un seul point l'arc de la base coupée, & tous les arcs intermédiaires entre le contact & sa rencontre avec l'axe en deux, comme aussi d'autres arcs après. Une ligne droite inclinée à l'axe par un angle plus grand qu'un demi-droit ayant son intersection avec une des bases demi-circulaires, ne coupe que l'arc de celle-ci, & cela dans un seul point. Celle qui forme avec l'axe *un* angle plus petit peut la toucher en un point, & *la* couper en un nombre de points d'autant plus grand, que son angle avec l'axe est plus petit.

11. *Dans*

11. Dans l'Appendice on a une détermination simple de la sous-normale, de la ligne des sinus, celle de son cercle osculateur par la simple Géométrie linéaire, & la quadrature de son aire. Pour trouver *la sous-normale*, qui répond à un point M de la courbe (fig. 4), on tirera l'ordonnée MP, on prendra dans l'axe PP' = AP, on élévera l'ordonnée P'Q, & on prendra PI = P'R = $\frac{1}{2}$ P'Q. La PI sera la sous-normale cherchée, ce qui donne aussi une manière simple de tirer la tangente par un point M donné de la courbe, en tirant sa normale MI, & par M une droite perpendiculaire à celle-ci, qui sera la tangente cherchée.

12. Pour le cercle osculateur on y a plusieurs constructions très-simples tirées d'après la première détermination faite par la Géométrie linéaire: en voici une à l'aide de la normale MI déjà trouvée. *On prolongera* celle-ci, & on y prendra MG = $\frac{MI^3}{MP^4}$, où il faut concevoir le numérateur multiplié par le quarré d' une unité, qui est la ligne CD, ce qui rend l'homogénéité. Le point G sera le centre du cercle osculateur. CD est le rayon du cercle, qui a donné l'origine à la courbe, & pour trouver MG il suffit de trouver la ligne cinquième continuellement proportionnelle après la normale MI, & l'ordonnée MP, & la troisième après celle-ci, & le rayon CD.

13. La quadrature indéfinie en est très-simple par son abscisse AE (fig. 2): le rectangle du sinus verse AE (fig. 1) de l'arc du cercle, qui répond à celle-ci, avec le rayon CD est égal à l'aire AEF (fig. 2) de la courbe: ainsi l'aire ACD est égale au quarré du rayon du cercle, qui a donné l'origine à la courbe, l'aire ABD, qui répond à un arc demi-circulaire entier, à son double.

14. Voici l'idée de l' application de cette courbe à l'objet de cet Opuscule, qui est indiquée dans le dernier scholie de ce premier problême au num. 28, & développée après. Saturne dans son mouvement autour du soleil amène parallélement avec lui son anneau, & l'intersection du plan de celui-ci avec l' écliptique, tandis que la terre fait son mouvement dans son orbite autour du même soleil. Dans la révolution entière de Saturne, qui se fait à-peu-près dans 30 ans,

deux fois cette interſection arrive à l'orbite de la terre, & la traverse toute : sa rencontre avec la terre même & avec le soleil ; donne les deux positions indiquées au num. 2. Soit C (fig. 5) le lieu du soleil, centre de l'orbite de la terre, qu'on considère d'abord comme circulaire, dans laquelle orbite elle fait son mouvement dans la direction MADB, avec un diamètre ACB parallèle à la dite intersection, & MCD perpendiculaire ; qui la rencontre en I', ou I, en rencontrant l'orbite même en F', ou F : on considère le mouvement du point I fait en montant de M jusqu'à D. L'intersection susdite dans chacun de ces deux passages par l'orbite de la terre aura une rencontre avec le soleil, & elle pourra avoir plusieurs rencontres avec la terre, qui sont l'objet de la recherche.

15. On sait déjà la position du plan de l'anneau, & le lieu de Saturne dans son orbite, qui fait passer cette intersection par le soleil, ainsi par les calculs astronomiques à l'aide des tables du mouvement de Saturne on trouve le moment, dans lequel cette planète arrive à ce lieu, & par celle du mouvement apparent du soleil son lieu géocentrique, ce qui donne le lieu héliocentrique de la terre diamétralement opposé, qui se trouvera dans ce moment ou dans la partie inférieure de son orbite comme en T', ou en T dans la supérieure. On considère le mouvement des deux points mobiles le premier I', ou I, qui monte par MCD, & le second F', ou F, qui tourne par MADB, & qui amène avec lui une ligne F'I', ou FI perpendiculaire au diamètre MCD, qui sera son ordonnée au cercle : la rencontre de cette ordonnée avec le premier point, qui monte, est celle qu'on cherche.

16. On prend d'abord pour uniformes tous ces deux mouvements, quoique celui de l'ordonnée soit beaucoup inégal, mais le mouvement du second point, qui est celui de la terre, est bien peu inégal dans toute sa révolution, & l'autre du premier, qui est celui de la dite intersection, est aussi peu inégal, parceque le diamètre MD, qui est à-peu-près la dixième partie du diamètre de l'orbite de Saturne, ne répond qu'à-peu-près à 12 degrès de cette orbite, dans lequel arc l'inégalité de son mouvement n'est pas grande : la supposition de l'uniformité de ces

deux

deux mouvements donnera les valeurs cherchées peu éloignées des vraies, & on corrigera après les erreurs, qui en dérivent. On connoîtra aussi par un à-peu-près le rapport de la vîtesse de ces deux *mouvements*, parcequ' on sait le rapport de la vîtesse moyenne de la terre à celle de Saturne, & celle de cette intersection dans cette position en est peu différente. Ainsi on réduit la recherche au problême suivant, qui est le second de cet Opuscule. *Trouver la rencontre d' un point, qui a un mouvement uniforme dans un diamètre d'un cercle, avec l'ordonnée au même diamètre menée par un point, qui a un mouvement uniforme sur sa circonférence, en supposant connu le rapport des vîtesses de ces deux mouvements, & le lieu du second point sur la circonférence dans le moment que le premier arrive au centre.*

17. Le cas particulier du mouvement de l' intersection susdite rapporté à celui de la terre porte la vîtesse du second point plus grande que celle du premier; mais pour donner la solution générale, on a adapté la figure à l'autre de la vîtesse du second plus petite, & on a considéré le lieu de ce second point, dans la partie supérieure en T: ayant trouvé dépendamment de cette supposition tout ce, qui doit arriver dans tous les cas particuliers, on a adapté la solution au cas particulier du rapport des vîtesses de Saturne, & de la terre dans la solution du problême VII. Cette solution ici a été adaptée à la fig. 5, où on suppose le second point en T dans le moment, que le premier est arrivé en C, la vîtesse plus grande de celui-ci étant à la vîtesse de l' autre comme 1 à *m*: il faut trouver le point F, où le second point ayant parcouru l' arc AF avec son ordonnée FI, sera rattrapé par le premier arrivé en I après avoir parcouru la ligne CI. La condition du problême sera, que l' arc TF soit à la ligne CI, qui est égale au sinus de l' arc AF, comme *m* est à 1.

18. La solution analytique se trouve beaucoup plus bas au num. 97. En faisant l' arc AT $= b$, (AT' seroit $= -b$), AF $= z$, on aura CI $=$ EF $= sin.$AF $= sin.z$, TF $= z - b$ avec la proportion suivante, $1 : m ::$ CI $= sin.z :$ TF $= z - b$, ce qui donne $m sin.z = z - b$. L' équation seroit de la dernière

simplicité, s'il n'y avoit la relation de l'arc circulaire à son sinus, qui n'est pas donnée en termes algébriques que par une série infinie, ce qui forme toute la difficulté de sa résolution pour trouver toutes les racines, & séparer les réelles des imaginaires : mais la ligne des sinus, qui donne cette relation, en rend la construction très-simple, & ses propriétés exposées dans les suites du premier problême donnent le développement très-facile de tous les cas, avec le nombre des racines réelles, qui leurs répondent.

19. Cette construction se trouve au num. 37. On a dans la fig. *6* les deux arcs demi-circulaires ADBMA' de la ligne des sinus les mêmes, que dans la fig. 2, mais tournés, & mis à gauche par rapport à l'origine A, avec les deux A*mbda*' à droite, qui sont la continuation de ceux-là dans la direction BDA. On y prend CL qui soit à CD comme *m* à 1, & AT vers B, ou AT' vers *b* égale à l'arc AT, ou AT' de la fig. 5 : on tire la ligne LD, & par T ou T' sa parallèle, dont la rencontre avec la courbe en F, ou F' donne la solution du problême de manière, qu'en tirant le sinus FE, ou F'E', en prenant dans la fig. 5 l'arc AF, ou AF', qui ait le même sinus = EF, & qui soit égal à l'abscisse AE, ou AE' de la fig. *6*, la rencontre se fera en F après l'arrivée du premier point en C, ou elle se sera fait en F' avant ; parcequ'en appliquant la démonstration au premier cas, on aura dans la fig. 5 l'arc TF = AF — AT égal à la ligne (fig. *6*) TE = AE — AT, & TE sera à EF comme LC à CD, c'est-à-dire comme *m* à 1 : la démonstration est la même pour le point F'.

20. Dans le cas exprimé par la figure la valeur *m* étant plus petite que l'unité, l'angle ETF sera plus grand qu'un demi-droit, & il n'y aura qu'une seule intersection de la ligne menée par T avec la courbe, & par conséquent une seule racine réelle : mais quand *m* est plus grand que l'unité, l'angle que la ligne, qui donne la solution du problême, fait avec l'axe, est plus petit que le demi-droit, & on peut avoir même un très-grand nombre de rencontres de cette ligne avec la continuation de la courbe d'un côté, & de l'autre, qui donnent autant de solutions, c'est-à-dire

à-dire de racines réelles, qui deviennent doubles, quand la rencontre est un contact. Le développement de tous ces cas par la nature, & les propriétés de la courbe des sinus entière sont l'objet *des problêmes* III, & IV, où il y a l'emploi de toutes les figures jusqu'à la fig. 12, pour déterminer le nombre des rencontres, qui donnent les racines réelles, & leur qualité, par où on connoît, si cette rencontre comparée avec le passage du premier point par le centre du cercle appartient à une disparition, ou à une apparition, & il y en a, qui ne donnent, qu'une disparition momentanée, comme il arrive, lorsque la terre en descendant du côté de B (*fig.* 5) y passe dans le même moment, que le point I' en montant passe par C : dans ce cas le soleil se trouve entre la terre, & le plan de l'anneau tant avant, qu'après ce passage, & si l'anneau n'étoit, qu'une simple surface, la terre considérée comme un point ne le perdroit de vue, que dans le moment seul du même passage, dans lequel cette surface seroit tournée vers elle.

21. Mais avant dans le scholie du problême II, il y a la détermination des mêmes objets avec le nombre, & la qualité des rencontres faite sans l'application de la Géométrie par la seule considération du mouvement du premier point uniforme par le diamètre MD comparé avec l'ordonnée, qui est portée par le second avec lui. Quoique la vîtesse circulaire du second point soit toujours la même ; celle de cette ordonnée est bien différente à cause de son parallélisme, & de la courbure de la circonférence du cercle : même dans le cas, où la vîtesse du second point, qui la porte, est immense, l'ordonnée en bas en M commence sa montée par tous les degrès de vîtesse infiniment petits : elle augmente jusqu'à devenir en A égale à celle du second point : elle diminue après de manière, qu'à la fin de la montée en D s'évanouit, & la montée se change en descente. Dans le cas où la vîtesse du second point est plus grande, celle de l'ordonnée tant avant, d'arriver en A, qu'après, arrive à l'égalité avec la vîtesse du premier point, dont celle-là étoit plus petite en M : elle en devient plus grande en A, & redevient plus petite en D.

Les

Les deux points, où elle devient égale, on les appelle ici *limites de l'égalité*. On en détermine la position par la valeur *m*, & la considération de ces limites, comme aussi de la même valeur *m* amène à la détermination tant du nombre que de la *qualité* des rencontres : un grand *m* laisse au second point la liberté de faire même un grand nombre de révolutions entières entre l'entrée du premier point sur le diamètre MD en M, & la sortie en D, avec autant de montées, & autant de descentes de l'ordonnée avec le second point : dans chaque descente il y a une rencontre, & une seule : dans la montée il peut en avoir plusieurs à cause de l'alternation, que la variation de la vîtesse de l'ordonnée introduit dans l'excès d'une de ces deux vîtesses sur l'autre. Tout cela est développé en grand détail dans ce scholie de ce second problême, & dans ce qui appartient aux deux problêmes suivants, on voit bien l'accord des résultats des déterminations trouvées par ces deux méthodes.

22. Dans le problême V il y a la manière de corriger l'effet de l'épaisseur de l'anneau, si on en découvre une sensible : il suffira de substituer la surface antérieure, quand il s'agit de la disparition, & la postérieure pour la nouvelle apparition : dans le problême VI il y a la méthode pour corriger l'effet de l'inégalité des deux mouvements. L'égalité supposée donne les rencontres cherchées par un à-peu-près : la fausse position amène à l'exactitude. On doit calculer d'après les tables astronomiques le lieu de la terre, & celui de Saturne avec la position de son anneau par rapport à l'intersection de son plan avec le plan de l'écliptique. Si l'on n'avoit rien négligé, on trouveroit le même lieu du premier point, & de l'ordonnée portée par le second pour le moment déterminé par les méthodes proposées ci-dessus. L'inégalité négligée fera trouver une différence. On calculera les mêmes lieux pour un temps peu éloigné, & on trouvera une seconde erreur : la règle ordinaire qu'on employe dans les fausses positions en donnera la correction.

23. Dans le problême VII on applique à la fin toute la théorie exposée aux phénomènes, qu'on doit observer de la terre. On

On commence par déterminer le rapport 1 à *m* des deux vîtesses, qui est le même, que celui de la vîtesse moyenne de Saturne à celle de la terre : la vîtesse de celui-là est à la vîtesse de celle-ci en raison réciproque des racines quarrées de leurs distances au soleil, qui est celle de 1 à $\sqrt{9,53937} = 3,089$. On voit par-là, que dans le temps, que le premier point employe à parcourir le diamètre entier, dans lequel seul on peut avoir sa rencontre avec l'ordonnée, qui ne sort pas du cercle, le second point, qui est la terre, n'achève pas une révolution entière autour du soleil : ainsi toute la suite des phénomènes ne peut pas dépasser la durée d'un an. Come ce temps s'y approche ; la terre dans le moment, que le premier point arrive dans la fig. 5 au centre C, peut se trouver dans un point quelconque T', ou T de la demi-circonférence inférieure, ou supérieure, & la même suite dépend de sa position dans ce moment. L'angle, que la ligne, qui doit résoudre le problême fait avec l'axe, se trouve aigu, & la figure 7 est adaptée à tous les cas, qu'on peut rencontrer. Ses deux arcs demi-circulaires suffisent avec les deux bases BA, A*b*, puisque dans le temps d'une seule année la terre doit se trouver dans un des leurs points. L'angle trouvé donne pour la ligne susdite la direction exprimée par les lignes T'F, F'T, qu'on y détermine : les points *r* sont employés pour marquer le lieu, dans lequel la terre peut se trouver dans le moment, où le premier point arrive au soleil. On y voit les lignes tirées par chacun de ces points, dont la rencontre avec la courbe donne la solution, & il y a une seule intersection, ou une intersection avec un seul contact, ou trois intersections, ce qui porte une seule racine réelle, ou deux, dont une double, ou trois toutes inégales. Par-là on développe tous les cas & la suite des phénomènes, c'est-à-dire des disparitions & apparitions de l'anneau, qui dépend de la position que la terre a dans le moment de l'arrivé du plan de l'anneau au soleil, & en considérant le rapport des temps périodiques de la terre, & de Saturne, on trouve, que quoique ces phénomènes doivent arriver tous les quinze ans, la suite ne revient jamais exactement la même,

ni

ni même par un à-peu-près, *dans un grand nombre de milliers d'années*.

24. Dans *la solution* du dernier *problême*, & dans ses scholies on a *la manière* de *déterminer* par *les observations* de ces mêmes *phénomènes* le lieu du nœud de l' anneau *de Saturne tant* dans l'écliptique, que dans *l' orbite*, & même d'avoir *des conjectures* sur l'épaisseur de l'anneau. L'Opusculo finit par *l' Appendice*, dont nous avons *déjà parlé*. On y voit par-tout le grand avantage, que la Géométrie a sur le grand calcul pour la solution de cette espèce de problêmes, ce qui arrive très-souvent en Astronomie, comme aussi le développement, qu'on a ici des propriétés de la ligne des *sinus*, *qui est une ligne transcendante*, fait voir le grand *profit*, *qu'on peut tirer*, *même* pour cette espèce *d'éléments*, *de la simple Géométrie linéaire*, en y employant les quantités infiniment petites.

§. II.

Du second Opuscule.

25. CET Opuscule contient *la théorie* de *la révolution* du soleil sur son axe avec l'application à *des observations*, & le résultat des calculs numériques, qui ont *donné les trois éléments cherchés*, c'est-à-dire *le lieu du nœud* ascendant, qui est l' intersection de l' équateur solaire avec son écliptique, par laquelle le même équateur en allant vers l' orient passe de l' hémisphère austral au boréal, son inclinaison à l' équateur, & le temps de la révolution. On y a d'abord *une longue Préface*, avec l' indication d' une Dissertation *ancienne imprimée* à Rome l' an 1737, où on avoit *déjà exposé le* fond de cette méthode, & d' un autre petit Mémoire donné par l' Auteur à M. de l' Isle à son premier voyage à Paris l'an 1760, dont M. de La-Lande a donné un extrait dans son Astronomie : on y ajoute après l' occasion de faire ces observations, le lieu, les instruments employés. C' est l'année 1777, où on avoit parlé beaucoup à Paris des taches du soleil, dans le château de Noslon près de Sens, où

Son

Son Eminence Mons.[gr] le Cardinal de Luynes grand amateur, & protecteur de l' Astronomie a une méridienne très-exacte, & avec ses instruments, qu'on a fait ces observations à sa présence : il y en a un *petit* journal à la fin de l' Opuscule. Dans *la* Préface même on a toutes les formules appartenantes à l' application de *la* théorie aux observations pour en tirer les éléments cherchés dégagées des démonstrations, qu' on trouve dans la suite de l' Opuscule même.

26. Dans le premier paragraphe on voit les observations choisies parmi *celles* de ce journal, pour faire cette application, telles qu' elles *ont été données par* un excellent micromètre filaire appliqué à une *bonne lunette montée sur une machine* parallatique, & par une excellente *pendule à correction placée à côté de cet instrument dans* le même cabinet, où *il* y a une *ligne méridienne* tirée par Son Eminence avec la dernière exactitude, & vérifiée encore dans ce temps-là sans y trouver pas une seconde d' erreur. Ces observations ont été répétées cinq fois chaque jour pour chaque tache, en y trouvant toujours un très-grand accord. Dans le second paragraphe on *en tire la* position géocentrique en employant pour *la différence de l'* ascension droite de la tache & du centre du soleil, *l'intervalle* de temps entre *l' arrivée* au *fil* horaire de celle-*là* & *des deux* bords *de celui-ci*, & *pour la différence* de la déclinaison de la distance du *fil fixe parallèle au mouvement* diurne portée sur la tache au mobile amené à l' attouchement du limbe boréal du même soleil.

27. Dans le §. III on *expose* la méthode de réduire chaque position géocentrique *à l' héliocentrique*, en proposant, & démontrant les formules, qui donnent la *longitude*, & *latitude héliocentrique* d'après la position géocentrique *déterminée* dans le §. II. On y fait voir la nécessité de la dernière exactitude dans *la détermination* de cette position à cause d' une très-grande *multiplication* d'erreur, qui se trouve en passant de celle-*là* à la position héliocentrique, *qui* devient immense, quand on s' approche du bord du soleil à cause de la très-grande obliquité de sa surface à côté de ce bord, ce qui empêche d' employer pour cet objet des ta-

ches, qui n'en soient assez *éloignées*. Dans le §. IV il y a la méthode de *déterminer le* lieu du nœud *par le retour* d'une tache à la même *latitude héliocentrique* ou observé *immédiatement*, ou trouvé par interpolation. On pouvoit bien employer cette méthode dans la suite des observations proposées, ce qu'on ne peut pas faire toujours, parceque cette latitude peut aller en augmentant, ou diminuant dans tout le temps des observations : pour cela il y a au §. VII une méthode générale pour trouver cet élément, & l'inclinaison de l'équateur par trois observations quelconques.

28. Mais en attendant il y a au §. V *la méthode pour* trouver ce second élément d'après *cette manière de déterminer* le premier par *deux observations de la même tache*, & dans le §. VI il y en a *une pour déterminer le* temps de la révolution, qui est *le troisième élément*, dépendamment du second déjà trouvé, avec une autre pour le même objet indépendante de celui-là, & qui donne une autre méthode pour trouver le second élément dépendamment du troisième trouvé par cette seconde *méthode*. Dans une note de ce même paragraphe il y a une méthode, qui simplifie les opérations pour *la détermination* du temps périodique, avec les formules, qui ayant *été trouvées* après, *ont* été ajoutées dans cette note. On a déjà énoncé ci-dessus l'*objet* du §. VII. On y a la manière *de déterminer* les deux premiers *éléments* tant par une *construction* graphique, que j'avois imaginée la première il y a déjà presqu'un demi-siècle avant d'être Professeur de Mathématique, & qu'on trouve avec l'autre trigonométrique dans cette première Dissertation réduite *ici* à des formules beaucoup plus commodes.

29. Le §. VIII contient des réflexions sur plusieurs suppositions, dont on s'est servi pour trouver les formules des paragraphes précédents : la première est, que les taches sont sur la surface même du soleil, ou insensiblement éloignées : on fait voir l'inefficacité de quelque raison apportée par quelqu'Auteur pour en prouver un éloignement considérable : on *indique la* méthode de décider cette question par quatre observations, si l'on pouvoit déterminer les lieux géocentriques avec assez de précision : on a sup-

ſuppoſé l'immobilité des taches par rapport au local de la ſurface du ſoleil : *ſi elles étoient une eſpèce de nuages de l'atmoſphère du ſoleil*, *il pourroit* y avoir quelque mouvement reſpectif, mais il ne ſeroit pas aſſez grand pour rendre ſenſiblement fautives les formules fondées ſur cette ſuppoſition : à cet occaſion on examine quelques opinions ſur leur nature, & origine : on employe des phénomènes du journal, qui paroiſſent déciſifs, pour prouver fauſſe l'opinion, qui croit le ſoleil une maſſe obſcure entourée d'un fluide lumineux, qui en s'abaiſſant laiſſe à découvert *les parties plus élévées* en forme de taches noires. Il y a de la *raſſemblance de leur forme étendue* & plate, de la ſéparation d'une en *pluſieurs*, *de la réunion de pluſieurs* en une, avec nos nuages ; mais il y a de la *différence*, qui *fait douter* encore de cette origine.

30. Le cinq paragraphes ſuivants ſont employés pour faire l'application du calcul numérique à toutes les formules propoſées dans les paragraphes précédents : elle eſt exprimée en douze tables, qui ſe trouvent après le dernier paragraphe immédiatement avant l'Appendice qui contient le journal. La forme, & la marche de ce calcul eſt expoſée dans le plus grand détail par l'explication de toutes ces tables ligne par ligne de manière, qu'il ſera très-aiſé d'en faire d'autres à l'imitation de celui-là, & on fait voir la néceſſité d'en faire beaucoup pour avoir quelque choſe de moins incertain. On voit dans chaque paragraphe le réſultat de la partie, qui lui répond, tiré toujours d'un bon nombre de combinaiſons ; mais il y a de la difficulté ſur celui du troiſiéme élément, qui eſt le temps de la révolution. On a dans le paragraphe XIV, qui eſt le dernier, des réflexions ſur tous ces réſultats, & leur comparaiſon entr'eux, & avec des réſultats trouvés par d'autres Aſtronomes.

31. Pour le lieu du nœud en prenant le milieu entre dix réſultats tirés d'autant de différentes combinaiſons au §. X on trouve 2ſ. 13°. 9' ; mais il y en a deux trop différents des autres, qu'il faut écarter pour des raiſons, qu'on y apporte : les huit autres donnent pour le milieu 2ſ. 11°. 32', qui ne s'éloigne

pas trop d'aucun particulier : mais en *écartant* deux autres, qui sont *le* moins d'accord avec ce milieu, *on trouve* 2ˢ. 10°. 21'. Pour l'*inclinaison la* première méthode a *donné le* milieu entre cinq *résultats* d'autant de combinaisons 7°. 44'. Le résultat de la dernière, qui employe trois observations à la fois, & qui est ici unique a donné pour le nœud 2ˢ. 14°. 3', & pour l'inclinaison 6°. 49'. La différence entre ces résultats paroît excessive : mais elle ne paroîtra pas même assez grande, si l'on considère la grande multiplication des erreurs, qui se fait dans le passage de la position géocentrique à l'*héliocentrique*, *comme on* l'a fait déjà remarquer ci-dessus. On *trouve dans ce paragraphe* plusieurs déterminations d'autres *Auteurs*, *qui sont* beaucoup moins d'accord *entr' eux*, *qu'avec celles* qu'on trouve ici, & que celles-ci entr' elles.

32. Pour la détermination du temps de la révolution on a six résultats ici à la Table X tirés d'autant de différentes combinaisons, qui s'accordent très-bien entr' eux, & pourtant ils donnent considérablement plus, que tous les autres Auteurs. On considère deux espèces de *révolutions*, une *absolue* périodique, l'autre synodique relative à *la* terre, qui *dépend* de celle-là. On trouve ici pour *la* première à la Table X *en jours* 26, 77, & par *la seconde* 28, 89 *à la* Tab. XI, tandis que communément le temps de *la* première est à-peu-près de 25$\frac{1}{2}$. Il est bien vrai, qu'il est plus aisé de se tromper sur cet élément, quand on n'a que des observations faites dans l'intervalle d'une seule apparition : on le détermine beaucoup mieux, quand on reconnoît une tache, qui revient, & on en a reconnu même au second retour pour la troisième apparition. Pourtant il mérite quelqu'attention le grand accord, qu'on trouve entre les six résultats susdits, comme aussi tout ce qu'on trouve sur cet article dans ce paragraphe.

33. Il y a dans ce même d'autres articles, qui méritent aussi de l'attention, particuliérement ce qui appartient aux temps de l'année les plus propres pour faire des observations de cette espèce, & l'autre de la forme du mouvement apparent des taches,

qui

qui résulte de la combinaison de leur mouvement absolu circulaire autour de l'axe de l'équateur solaire, & du mouvement de la terre autour de l'axe de l'écliptique. On y trouve le mouvement apparent du même axe de cet équateur projeté sur le disque du soleil, & de ses pôles, dont l'un se trouve alternativement dans l'hémisphère tourné vers la terre, & l'autre dans l'opposé. On y détermine le temps, dans lequel ils se levent, pour ainsi dire, sur cette espèce d'horizon, qui est le limbe du disque, & s'y couchent, & les temps dans lesquels la route apparente d'une tache tourne la concavité ou la convexité au centre du même disque.

§. III.

De l'Opuscule III.

34. Il s'agit dans cet Opuscule d'une méthode pour déterminer avec la *plus* grande exactitude possible la longueur d'un pendule *simple*, qui fait chaque oscillation en une seconde du temps moyen. *Il y a d'abord une Introduction*, dans laquelle on donne l'*idée de l'objet proposé*, & de ce qu'il faut faire pour y parvenir. On *expose dans les dix-sept* premiers paragraphes tout ce qu'*il faut pratiquer pour avoir l'*exactitude réquise, avec la *description très-détaillée de tous les instruments qu'il faut y* employer. Dans le suivant on exprime l'usage de cette observation, qui est très-intéressante à plusieurs égards, si on la fait avec cette grande exactitude : *dans le vingtième* il y a une espèce de pièce *justificative toute géométrique* sur le centre d'oscillation, avec la *démonstration* exacte de toutes les formules, dont on a eu besoin dans l'Opuscule pour l'objet proposé. On y a à la fin une Appendice, qui contient une instruction pratique, avec le détail de toutes les opérations nécessaires dégagées de toutes les démonstrations, & réflexions, qui en sont le fondement, mais qui ne servent point pour l'usage pratique.

35. Dans les six premiers paragraphes il y a ce qui appartient à la forme, suspension, mesure du pendule qui fait les oscillations

par

par rapport à *toutes les parties*, qui *le composent*. Dans la planche V on voit *l'appareil* nécessaire pour *ces objets*, & les deux premières *figures* de la planche VI y *appartiennent aussi*. La fig. 7 représente le *total*. On y voit le globe A *soutenu* par le fil double GFG' attaché à une machine, dont on a l' explication dans plusieurs des premiers paragraphes. On y parle de la matière, de la forme, de la grandeur de la masse suspendue : la matière la plus propre est le laiton bien battu, la forme celle d'un globe, la grandeur d'une couple de pouces de diamètre. Il faut avoir la mesure de celui-ci avec la dernière exactitude : *la machine* pour l'obtenir est représentée aux *fig.* 1, & 2, & *expliquée* avec tout le détail au §. *III*. *On y voit dans la première le chassis* quadrangulaire, & *la barre FE représentée* aussi en perspective dans la seconde, *qui à l'* aide d' un mouvement micrométrique donné par *la* vis MNL doit donner la mesure du diamètre ST : en tournant le globe, on doit s' assurer de l' exactitude de la figure, s' il y a quelque petite imperfection en connoître le défaut, & ayant pris le milieu entre différentes déterminations en connoître l'effet par le changement de *la* suspension, & le corriger. On doit mettre le chassis dans *une position horizontale* à la hauteur du centre du globe, & on le réduira *à cette position* par des doubles *coins* de la *forme indiquée* à *la* fig. 3.

36. Dans *les paragraphes* IV, & V il y a ce qui appartient au fil, qui doit soutenir le globe, & la manière d'en faire la suspension. On pourroit employer un fil de métal, qui entreroit par son bout supérieur dans le trou T de la pièce de la fig. 4, & par l' inférieur entreroit dans un trou *pratiqué* sur le globe de la fig. 7 en F : mais on donne la préférence au double fil de soye GFG' de cette même figure. La machine de la fig. 4 auroit pour soutien les deux pièces inférieures de la fig. 11, qui devroient être fixées sur *la* partie supérieure, & celle-ci sur une pièce KHH'K' de la fig. 7, qui par une vis P pourroit être élévée, & abaissée. Le double fil y est comprimé entre deux *règles* BB', allongées en HDD'H', & fixées de même sur la même pièce : les fig. 5, & 6 indiquent la manière d'attacher le fil au globe : la première par

une pièce circulaire de taffetas ABED collée sur le globe : un autre double fil court sortant du centre C de cette pièce recevroit le fil GFH : *dans la fig. 6* le globe seroit entouré par deux fils, qui en se croisant en haut recevroient le fil GFH, & en bas seroient fixés sur un autre BDB'D', qui laisseroit dégagé le fond du globe en C, pour faire qu'il puisse être abaissé dans la fig. 7 par la vis P jusqu'à l'attouchement avec un plan horizontal VV' en *f*. On ne peut faire qu'indiquer légérement tous ces objets dans cet extrait : il faut les voir expliqués en détail dans ces paragraphes, avec toute la machine de la fig. 7, dont on voit la partie, qui forme *le gros soutien, dessinée* en perspective à la fig. 8.

37. Au §. VI il y a *la manière de déterminer* avec la dernière exactitude la distance I*f* du point *I*, qu'on *prend pour celui* de la suspension, au fond *f* du globe, qui en ôtant le rayon A*f* laisse la distance du même point I au centre du globe : en écartant le globe, on appuye sur le plan VV' un bout d'une règle, dont on a bien connu la longueur, & on fait descendre par la vis P la pièce BB' jusqu'à sa surface inférieure, en marquant l'état de l'index O, qui tourne avec la même vis sur la circonférence d'un cercle dessiné dans la surface supérieure de la pièce NN', & divisée comme on fait dans les micromètres. Les figures 9, & 10 représentent deux pièces appartenantes à la fig. 7, & y marquées avec les mêmes lettres : la première est un parallélepipède concave, dans lequel entre le second convexe, qui élévé, ou abaissé par la vis P de la fig. 7, élève & abaisse tout le pendule. Les divisions NN' de la fig. 9, & PP' de la fig. 10 comparées entr'elles, & avec celles du micromètre de la fig. 7 marquées par son index O font voir combien après avoir ôté la règle, & abaissé le point I, la distance de celui-ci au plan est plus courte, que la même règle. Pour cet objet on laisse au globe sa position libre, & on abaisse le point I de la manière indiquée par la vis P jusqu'à l'attouchement du globe en *f* avec le plan, & pour le voir avec plus de précision & d'évidence on y employe en VV' un miroir placé bien horizontalement. Par l'état de l'index O on connoît la distance I*f* exacte

dans

dans le moment de l'*attouchement* : on élève le point I avec le globe par la même vis, ce qui lui laisse la liberté de faire ses oscillations, avec la connoissance exacte de la distance de la suspension au centre du globe, qu'on peut varier en allongeant le double fil pour faire l'observation avec plusieurs de ces distances bien connues, par lesquelles on trouve après la longueur du pendule simple isochrone à chacun de ceux-là, & on en tire à la fin la longueur de celui, dont les oscillations ont la durée égale aux secondes de temps moyen, qui est l'objet de toute cette recherche.

38. Dans le §. VIII *il y a la manière de déterminer* le nombre des *oscillations faites par le pendule en un* certain temps connu : *mais pour ne pas se fatiguer* dans une très-longue numération avec le danger de s'y tromper, on y propose une méthode employée autres fois par M. Mairan, de comparer les oscillations du pendule avec celles d'une pendule ordinaire, qui les ait un peu différentes, & y marquer la période, après laquelle elles reviennent à l'accord n'en ayant perdu, ou gagné qu'une. Par la première période observée d'abord, & un petit nombre d'autres faites de la manière exposée dans ce paragraphe on peut faire continuer le mouvement, même pendant 24 heures, sans revenir à observer, qu'après des très-longs intervalles de temps. En faisant durer les oscillations par le temps d'une entière révolution diurne d'une étoile fixe ou de plusieurs, dont on observe le retour à une lunette fixe, on ne dépend pas de l'égalité du mouvement d'une pendule. Mais il faut tenir compte même des parties d'une oscillation au moment de l'arrivée de la fixe au fil de la lunette. Comme les oscillations se diminuent, & les inégales dans différents arcs circulaires ne sont pas de la même durée, il faut en marquer de temps en temps l'étendue pour réduire le nombre des observées à celles, qu'on auroit eu, si toutes étoient infiniment petites, & dans le §. IX on expose la manière de la déterminer à l'aide d'un instrument indiqué à la fig. 12 & 13.

39. Les oscillations sensibles ne durent pas si long temps, surtout

tout si l'on n'en fait faire au commencement des bien grandes, qu'on doit éviter: ainsi il faut donner de temps en temps des nouvelles impulsions, dans lesquelles on change un peu le temps de la première, qu'on a après le coup donné: il y a au §. X la manière de donner cette impulsion par un instrument exposé sur la fig. 15, & placé dans la machine de la fig. 7 en X, & dans le §. XI celle de connoître exactement la partie du temps gagnée, ou perdue par cette altération de mouvement dans la première oscillation après l'impulsion: on la déduit par l'altération introduite dans la longueur de la période des accords: cette méthode est un des articles nouveaux de cet Opuscule, & très-essentiel pour avoir l'exactitude de la détermination de son objet poussée beaucoup au de-là de ce qu'on peut obtenir par les méthodes connues.

40. Le §. XII donne la manière de réduire les oscillations observées aux infiniment petites, c'est-à-dire de trouver le nombre de celles-ci, qu'on auroit eu dans le même temps. On employe pour cet objet un théorème, qui donne la différence du temps, qui répond à la descente par un petit arc circulaire quelconque au temps de l'infiniment petit: une petite table tirée de ce théorème, la grandeur des arcs déterminée par observation à des intervalles de temps connus, & la méthode des interpolations, qui donne l'aire d'une courbe par un calcul numérique très-simple, font tout l'effet. On ajoute au §. XIII la démonstration de plusieurs vérités, qu'on avoit supposé dans les paragraphes précédents.

41. Dans le paragraphe XIV il y a la détermination du centre d'oscillation de toute la masse employée. Les pendules plus courts font leurs oscillations dans un temps plus court: ainsi les parties même du seul globe différemment éloignées de la suspension exigeroient un temps différent: les plus hautes accélerent le mouvement des plus baisses, & en sont rétardées. Il y a un point, dans lequel si toute la matière du globe, du fil &c. étoit réunie, l'oscillation se feroit dans le même temps, qui est employé par le pendule composé de tant de particules. Celui-là s'appelle, comme on sait, le centre d'oscillation commun. Le grand Géo-

mètre Huygens a été le premier à résoudre ce problème, & en tirer une formule générale. On a reconnu tout de suite la justesse de cette formule : pourtant dans la démonstration il y avoit un principe supposé, qui ne paroissoit pas bien évident : on en a donné d'autres après, qui ne laissent pas d'avoir des difficultés. Ici il y a l'emploi de cette formule appliquée à toutes les parties du total, qui fait ici ses oscillations. Dans le dernier paragraphe indiqué ci-dessus il y a une démonstration tirée de ma Théorie de la Philosophie Naturelle, qui a pour fondement la seule composition ordinaire des forces, & des mouvements.

42. Dans le §. XV *on donne la manière de tirer du nombre des oscillations faites en un nombre donné de secondes par un pendule, dont on a eu une mesure* exacte, la longueur de celui, qui feroit le nombre d'oscillations égal au nombre de secondes : on trouve cette longueur par le théorème élémentaire, que le quarré du nombre d'oscillations des pendules simples dans un temps donné est réciproquement proportionnel à leur longueur. Si l'on a employé différentes longueurs, & que les fils en G, G' de la fig. 7 *ont été bien pliables de manière, que le centre des arcs décrits a été dans son point I*; le résultat doit être le même : si l'on trouve de la *différence plus grande que celle, qui puisse être produite par les petites erreurs des observations, on peut l'attribuer au défaut de flexibilité dans le fil*, & il y a dans le même paragraphe la manière de déterminer la vraie longueur en ayant égard à l'effet de ce déplacement du centre.

43. Dans les paragraphes XVI il y a ce *qui appartient à un double effet de l'action de l'air, qui d'un côté par sa gravité diminue la force de celle de la masse du pendule, & de l'autre fait une résistance à son mouvement* : il y a dans le §. XVII ce qui appartient au choix qu'on doit faire du lieu propre pour faire cette espèce d'observations, où l'on parle encore de l'effet de l'attraction des montagnes, & de la masse d'eau, qui change de place par le flux, & reflux de la mer : on fait voir, qu'il n'y a rien à craindre de ce côté-là pour la longueur du pendule;

dule ; mais qu'il y a une action latérale capable de détourner sensiblement un pendule assez long fixé au bord de la mer là, où la marée monte assez haut, comme à 50 pieds de hauteur, & de faire voir la quantité de la masse de notre globe terrestre par rapport aux corps, que nous avons ici sur la surface, & connoître sa densité moyenne, avec un indice de sa constitution intérieure, c'est-à-dire, si elle est toute remplie de matière, ou si c'est un vide entouré d'une croûte solide.

44. Dans le paragraphe XVIII on examine les différents usages qu'on peut faire de cette observation poussée à la dernière exactitude. On a commencé à faire des observations de cette espèce pour connoître la différence de la force de la gravité dans les différents lieux de la terre : on a trouvé que vers l'équateur elle est plus foible, que vers les pôles : on s'est aperçu, que l'origine de cette différence n'est pas la seule différence de la force centrifuge, mais qu'il y entre l'effet de la somme des attractions différentes dans les différents points de la surface d'un solide pas exactement sphérique. S'il n'y avoit pas des irrégularités dans la surface de la terre, & dans sa densité intérieure ; la longueur des pendules isochrones au temps moyen réduit en secondes détermineroit sa figure aussi bien, que la mesure des degrés du méridien : deux longueurs du pendule dans deux différentes latitudes suffiroient pour avoir la figure, autant que deux degrés. L'irrégularité dérange l'une, & l'autre méthode : mais on s'approche de l'exactitude en multipliant les observations pour prendre un milieu, & les longueurs des pendules à secondes sont beaucoup plus propres, & beaucoup plus faciles à déterminer que les degrés. C'est le principal avantage, qu'on peut avoir par cette espèce d'observations poussées à l'exactitude proposée dans cet Opuscule. On examine ici quelqu'autre usage, principalement celui d'avoir, comme on a prétendu, par ce moyen une mesure universelle pour tous les lieux, & tous les siècles : on fait voir combien cette mesure pourroit être changée par une quantité de causes physiques rapportées ici, sur-tout dans une longue suite de siècles.

45. Dans le paragraphe XIX, qui est le dernier, il y a la théorie du centre d'oscillation d'une masse quelconque, ou d'un assemblage de masses, qui forme un pendule composé, & dans l'Appendice toute la suite des opérations pratiques à employer pour l'objet proposé dans cet Opuscule dégagées de toutes démonstrations, & réflexions. On a indiqué ces deux objets au commencement de cet extrait.

§. IV.

De l'Opuscule IV.

46. ON ne peut pas faire un extrait de cet Opuscule, qui est un abrégé lui-même des notices principales appartenantes à l'Astronomie, fait pour se rappeller les premiers éléments de la sphère, & avoir une notion générale des différentes espèces d'astres, de leur nature, leurs distances, leurs mouvements, avec quelqu'idée des instruments, qu'on y employe. L'objet principal est ce qui dans l'Astronomie a de la relation à la Marine. Dans la Préface il y a l'occasion à laquelle cet Opuscule a été fait, c'est pour le service de Son Altesse Sérénissime Monseigneur le Duc de Chartres, qui avant d'aller à commander une division de l'armée navale m'a fait l'honneur de s'entretenir avec moi sur tous ces objets, qu'il a parcouru avec une attention, & une pénétration incroyable.

47. Pour tout extrait il suffit de parcourir l'index du même Opuscule, qui se trouve au commencement de ce Volume avec ceux de tous les autres. Cet Abrégé peut être bien utile même à ceux qui ont étudié l'Astronomie à fond, pour se rappeller les idées principales. Ceux qui n'y sont pas initiés, & qui ne cherchent d'acquérir une connoissance intime de cette Science, peuvent en tirer beaucoup de profit, en parcourant l'Opuscule avec quelqu'un, qui connoît assez bien cette partie: il en aura une notice suffisante, qu'il pourra acquérir sans peine à la manière d'une conversation agréable: celui-ci fera à la main des figures nécessaires pour donner une connoissance plus intime d'une quantité d'

objets

objets intéressants, & il y aura beaucoup plus de profit, & d'agrément, s'il peut avoir sous les yeux les instruments mêmes pour en voir mieux l'usage, ce qu'on peut faire aisément, où il y a quelqu' Observatoire : cela lui donnera beaucoup d'amusement.

§. V.

De l' Opuscule V.

48. Cet Opuscule expose la manière employée à Venise pour avoir avec une très-grande exactitude la hauteur du pôle dans un petit Observatoire dépourvu d'instruments, qui paroissoient nécessaires pour cet objet. Il n'y avoit, qu'une méridienne filaire, avec le trou, qu'on voit à la fig. 1 de la planche VIII, pratiqué en AA' dans une plaque LL' inclinée pour le passage du rayon, un quart de cercle mauvais & mal divisé, & une pendule à secondes pas plus que médiocre. Le pavé n'étant ni bien uni, ni bien horizontal, on y a employé une poutre exprimée pour une partie de sa longueur aux figures 2, 5, 6. L'ayant suffisamment applanie dans la surface supérieure, & placée dans la direction de la méridienne filaire, on a vérifié celle-ci par les hauteurs correspondantes à l'aide de ce quart de cercle, qui pour cet effet n'a pas besoin d'une égalité des divisions, avec cette pendule, qui quoique très-médiocre va assez également dans l'intervalle de quelques heures, ainsi on a trouvé la direction exactement la même par un bon nombre de ces hauteurs, dont on a pris en trois jours consécutifs plusieurs couples par fois, quoique la dernière exactitude dans cette direction n'est pas nécessaire à cause du changement de la distance du soleil au zénith insensible bien près du midi.

49. Pour avoir le pied du gnomon on a baissé du fond du trou le fil AP (fig. 2) qui soutenoit le petit poids P, en lui donnant le passage par l'ouverture IKK'I'. La coupe oblique FH de cette pièce a donné le lieu pour placer ce poids, qui entroit dans un verre d'eau indiqué à la fig. 3 pour en empêcher l'agitation : on

on y voit la forme *du carton amené doucement* jusqu' à l'attouchement de son côté GI perpendiculaire à *la* direction de la méridienne, & *le fil aP* en B, que l' on voyoit avec *la* dernière évidence à l'aide de l' ombre BH produite par la bougie RS, ce qui détermine le pied cherché du gnomon en B. Il y a sur le carton un point I dans la direction GI : le carton se trouvant sur la fig. 2 c'est le premier point de la division faite sur la surface de la poutre en transportant en 1, 2, 3 &c. les intervalles pris sur une échelle avec un compas à verge.

50. On voit à *la* fig. 4 deux longues règles de bois avec une pointe en Q, dont l'inférieure *appuyée sur la* surface de la poutre, *la* supérieure *poussée avec sa pointe jusqu'en* A donnoit la *hauteur du gnomon*, & *on la déterminoit* de la manière exposée *dans l'Opuscule* avec la dernière exactitude en transportant cet assemblage sur la surface horizontale, & employant une petite pièce de bois, qu' on voit en AB, transportée après en B'A'. La surface de la poutre n'étant pas exactement horizontale, mais inclinée comme la BN de la fig. 1, on a déterminé sa distance GI, G'I' à l'horizontale BM *dans les lieux* de l'image du soleil par la méthode proposée *dans l'Opuscule II du* Tome IV, & répetée ici, à l' aide du canal d' eau de la *fig. 6*, de son bateau, du fil d' archal LVG, & *du coin micrométrique bg* de la fig. 7. *Par-là on a déterminé les* petites lignes IF, I'F', qu' il falloit ôter des distances inclinées BG, BG', pour les réduire aux horizontales BF, BF' : la première divisée par AB a servi pour avoir la tangente de l'angle BAF égal à la distanse apparente au zénith du limbe supérieur S du soleil. Le diamètre AA' du trou, & l' inclinaison de la plaque ont donné les petites lignes BB', & B'D, dont la première ôtée de la BF, & la seconde ajoutée à la BA ont donné les deux autres B'F', A'B' pour la tangente de l'angle B'A'F' égal à la distance du limbe inférieur S' au zénith.

51. De cette manière on a eu dans trois jours différents ces distances, avec le milieu arithmétique pour la distance du centre au même zénith : on y a appliqué la réfraction tirée de ce qu' on avoit dans le Tome II sur cet objet, la parallaxe, la déclinaison, & on

& on a dans l'Opuscule tout le détail des observations, des réductions, & de tous les autres calculs. On a obtenu trois résultats différents, par un très-petit nombre de secondes, dont le milieu ne pourroit avoir d'incertitude, que de deux ou trois secondes, s'il n'y en avoit un peu dans la détermination des réfractions, & dans les déclinaisons prises des tables du soleil. Ayant réduite la hauteur du pôle trouvée pour cet Observatoire à celle du gran clocher de S. Marc, le dernier résultat a été de 45°. 27'. 2"; tandis que la Connoissance des temps, & généralement les Éphémérides mettent 45°. 25'. 0": mais je suis bien persuadé, qu'on ne peut pas craindre dans cette détermination, quoique faite avec cette espèce d'instruments, pour ainsi dire supplémentaires, une erreur de 10", & peut être pas même de 5".

§. VI.

Des Opuscules VI, & VII.

52. DANS le premier de ces deux Opuscules on détermine quel doit être le limbe éclairé de la lune, qu'on doit attendre au fil vertical, quand elle arrive au méridien, & quel au fil horizontal du foyer de la lunette. Pour le premier il n'y a point de difficulté: c'est l'occidental depuis la nouvelle jusqu'à la pleine lune, & l'oriental dans le reste du mois lunaire: pour déterminer le second il faut employer la résolution d'un triangle sphérique; & ce second est le plus intéressant, parcequ'il faut disposer la lunette avant pour faire que le bord, qui doit être touché par le fil horizontal se trouve, quand la lune entre dans le champ de la lunette, peu loin de son centre, où il n'y a aucun danger de la parallaxe de l'œil. Si l'on ne prépare bien la lunette avant, ou il faut, que cet attouchement se fasse loin de ce centre, ou il faut donner trop de mouvement & trop vîte à l'alidade qui porte la lunette, ou au même fil horizontal pour l'amener à ce contact.

53. Dans les figures 1 & 2 (planche IX) T est le centre de la terre, PTP' l'axe de l'équateur d'une sphère concentrique

à la

à la même terre, dont *la surface passe par le* centre L de la lune : PLP' est un *demi-cercle du méridien*, *qui* passe aussi par le zénith Z : *SP S'* est un demi-cercle de *déclinaison*; qui rencontre en S *la ligne tirée* du centre de la terre vers celui du soleil, dont le lieu dans cette surface devient S. AOBM est le disque circulaire de la lune. Le cercle AGBG' sépare l'hémisphère de la lune éclairé de l'obscur, & le demi-cercle AGB projeté pour l'œil, qui est en T, sur le disque AOBM par des *lignes* sensiblement perpendiculaires au même disque, & parallèles entr'elles devient une demi-ellipse. La partie éclairée *du disque* est enfermée entre le demi-cercle AOB *tourné vers le soleil*, & cette demi-ellipse AGB. Le *demi-cercle AOB est celui*, qui est tourné *vers le soleil*, *l'occidental dans le* premier demi-mois *lunaire*. *La partie éclairée* est plus grande qu'un demi-cercle dans le second & troisième quartier, comme dans les cas représentés à la fig. 1, & plus petite dans le premier & dernier, comme *dans* les représentés à la fig. 2, la différence étant l'aire *de la demi-ellipse* AGB.

54. Les points C & D sont *les* rencontres du méridien avec le limbe du disque, *le supérieur*, & *l'inférieur*. Or on fait voir dans l'Opuscule, que le point éclairé *sera le supérieur* C, quand l'angle PLS *sera aigu*, *comme à la fig.* 1, *& l'inférieur* D, quand *cet angle sera obtus*, comme à la fig. 2. Pour trouver cet angle *il faut* résoudre le triangle sphérique SPL, où on a les *deux* côtés PS, PL, qui sont les distances du soleil, & de la *lune* au notre pôle boréal P, c'est-à-dire $90° \pm$ *decl.*, & l'angle en P, qui est la différence de leurs ascensions droites. A' la place du calcul trigonométrique on peut trouver cet angle par la seule construction graphique exposée dans le Mémoire Correlatif premier du premier Opuscule du Tome III, qui est très-simple & facile pour la pratique, & suffit pour cet objet.

55. Dans l'Opuscule VII il y a une méthode pour employer le retour de Vénus à la même longitude *par la rétrogradation* pour la détermination des éléments moins certains de son orbite. Quand on a écrit cet Opuscule, les lieux de Vénus calculés sur les

tables

tables de Vénus les plus estimées s'écartoient trop excessivement des observés : on y a fait après des corrections, mais elles ne sont pas encore assez d'accord. L'élément, qui paroît bien sûr, est la distance moyenne au soleil tirée du temps périodique selon la troisième règle de Kepler : les plus incertains sont l'excentricité, le lieu de l'aphélie, & quelqu'époque du mouvement moyen. On peut avoir peu de doute sur le lieu du nœud, & l'inclinaison de l'orbite : pourtant dans cet Opuscule on propose la manière d'employer la distance moyenne avec ce temps périodique pour corriger tous les autres.

56. Dans *la fig. 3* T, T', T'' sont trois lieux de la terre, V, V', V'' trois de *Vénus*, *dans leurs* deux orbites autour du soleil. Le retour à *la même longitude* rend *les directions* TV, T''V'' parallèles entr'elles : celles-ci sont coupées en L, & L' par l'intermédiaire T'V', qui donne une longitude plus grande, que la première antérieure, & la troisième postérieure à la rétrogradation. La différence de la longitude intermédiaire aux extrêmes égales entr'elles donne les angles T'LT, T'L'T'', la théorie de la terre les cordes T'T, T'T'', & les angles TT'S, T''T'S, qui combinés avec l'angle ST'L différence des longitudes géocentriques du soleil, & de Vénus dans la seconde observation donnent les angles TT'L, T''T'L', d'où l'on tire les lignes TL, T'L, T''L', T'L'. En prenant pour *la seconde observation le temps du* milieu entre les deux extrêmes, les rayons ST', SV' doivent couper les cordes TT'', VV'' par le milieu en *t*, & *u*, ce qui rend la ligne *tu* parallèle aux deux TV, T''V''. Cela avec des quantités prises d'abord des *tables de Vénus*, où elles sont des différences *sur lesquelles on ne peut pas se tromper* que très-peu, donnent le moyen de déterminer les distances raccourcies SV' & T'V' au soleil & *à la terre*, & la direction SV', c'est-à-dire la longitude héliocentrique. Ces deux distances raccourcies avec la latitude géocentrique observée en T' donnent *la latitude héliocentrique*, dont la tangente est le quatrième terme géométriquement proportionnel après SV', T'V', & la tangente de la latitude géocentrique : la distance SV' avec la latitude héliocentrique donne le rayon vecteur.

57. On peut avoir ces objets par le retour après la première station, & les pareils après la seconde : alors on a dans la fig. 4 les deux longitudes héliocentriques dirigées aux deux points B, B' de l'écliptique solaire, avec les latitudes héliocentriques BV, B'V': on en tire le lieu du nœud N de l'interſection VNV' du plan de l'orbite avec l'écliptique BB', l'angle BNV qui est l'inclinaiſon de l'orbite, & l'arc VV' qui est la différence des deux longitudes héliocentriques.

58. C'est le même arc VV' de la fig. 5, où on a aussi les deux rayons vecteurs SD, SD'. Les deux excès du grand axe, qui est donné, étant égal au double de la distance moyenne, sur les rayons SD, SD' donnent les deux distances DF, D'F au foyer supérieur de l'orbite elliptique de Vénus : en prenant les points D, D' pour centres avec les ouvertures égales à ces deux excès on trouveroit ce foyer : mais il faut trouver par un calcul numérique SF, qui est le double de l'excentricité SC, & la direction de cette ligne, qui donne la position de l'aphélie. On expoſe dans l'Opuscule la manière de faire tous ces calculs, par lesquels on trouve tous les éléments cherchés : on peut les corriger par une répétition d'opérations : on peut trouver alors l'époque auſſi : mais ici il ſuffit d'avoir donné une idée legère de cette méthode.

§. VII.

Des Opuscules VIII, IX, X.

59. CES trois Opuscules ont des objets analogues, & sont fondés sur la solution d'un problême, dont on avoit déjà fait usage pour un objet pareil dans le Tome III ; mais ici il est proposé directement, & dégagé de toutes autres méthodes & considérations, avec lesquelles il y étoit confondu. Les trois objets sont de corriger l'orbite parabolique d'une comète, quand on a la longitude du nœud, & l'inclinaison de l'orbite par un à-peu-près, de trouver l'orbite elliptique, quand la parabolique ne s'accorde assez avec les observations, de corriger l'orbite d'une planète

par

par trois observations. Le titre du second a été énoncé un peu différemment dans le catalogue publié des Opuscules de ce cinquième Volume, au commencement de l'édition; mais celui-ci devoit être son vrai titre. Voici le problême, sur lequel tous les trois sont fondés : on le trouve au commencement du premier. *La longitude du nœud, & l'inclinaison de l'orbite étant données, trouver la longitude & latitude héliocentrique, & la distance au soleil d'une comète, dont on a la longitude & latitude géocentrique à un temps donné.*

60. On a sa solution à la fig. 6 (planche IX). S est le lieu du soleil, T de la terre, C de la comète dans son orbite inclinée à l'écliptique, P sa projection sur le plan de l'écliptique faite par la ligne CP perpendiculaire au plan de celle-ci, qui doit tomber sur la direction TE de la longitude géocentrique : ainsi TP est la distance raccourcie à la terre, SP la distance raccourcie au soleil, SC la distance entière, PTC la latitude géocentrique, PSC l'héliocentrique : SN est la direction de la ligne des nœuds, PDC un plan perpendiculaire à cette ligne, qui en est rencontrée en D : ainsi la longitude, qui répond à la direction DP, est celle du nœud augmentée ou diminuée de trois signes, PDC l'inclinaison de l'orbite. On a par hypothèse la longitude de la direction SN, qui est celle d'un des deux nœuds : on a celle de la direction TE, l'inclinaison de l'orbite PDC, & la latitude géocentrique PTC. On cherche la distance SC au soleil, la latitude, & longitude héliocentrique : celle-ci considérée dans l'écliptique répond à la direction SP, & dans l'orbite à la SC : on doit trouver la première par l'angle DSP, la seconde par le DSC, en comparant ceux-ci avec la longitude de la direction SN : il faudra trouver ces deux angles pour les ajouter à la longitude d'un des deux nœuds, ou les en ôter.

61. On a dans le triangle TPD l'angle en P; cet angle est la différence des longitudes, qui répondent aux directions des lignes TP, DP, c'est-à-dire de la longitude géocentrique de la comète, & de celle d'un des nœuds $\pm 90°$, on y a encore la raison des côtés TP, DP, qui est celle des tangentes de l'inclinaison de

l' orbite PDC, & de la *latitude* géocentrique PTC. Ainsi on y trouve l'angle PTD : on a aussi l' angle STP, qui est la différence des longitudes géocentriques du soleil & de la comète, on tire de ces deux l' angle STD : on a l' angle TSD différence des longitudes héliocentriques de la terre & du nœud avec le côté ST, distance de la terre au soleil : on en tire TDS supplément de la somme des deux TSD, STD. Après plusieurs substitutions, on trouve les quatre formules suivantes, qui donnent tout ce qu' on cherche : $tan.\mathrm{DSP} = \frac{sin.\mathrm{TSD} \times sin.\mathrm{PTD}}{sin.\mathrm{TPD} \times sin.\mathrm{STD}}$,

$tan.\mathrm{DSC} = \frac{tan.\mathrm{DSP}}{cos.incl.}$, $\mathrm{SC} = \frac{\mathrm{ST} \times sin.\mathrm{STD}}{sin.\mathrm{TDS} \times cos.\mathrm{DSC}}$, $sin.\mathrm{PSC} = \frac{sin.\mathrm{TSD} \times sin.\mathrm{TDP} \times cos.\mathrm{DSC} \times tan.lat.}{sin.\mathrm{TPD} \times sin.\mathrm{STD}}$. Les deux premières avec la longitude d'un des nœuds donne les longitudes héliocentriques dans l' écliptique, & dans l' orbite, la troisième donne la distance au soleil, qui est le rayon vecteur, & la dernière la latitude héliocentrique.

62. Après cette solution du problême il y a son application à l' objet de l' Opuscule. En employant la méthode de l' Opuscule I du Tome III, on aura trouvé le lieu du nœud, & l'inclinaison de l' orbite au moins par une approximation : on s' en servira pour trouver par la méthode exposée ici les deux longitudes de la comète dans l' orbite pour les temps de deux observations éloignées avec les deux distances au soleil. On en tirera par la méthode de ce même Opuscule du Tome III la directrice, l' axe, la distance périhélie : ces éléments donneront la longitude, & latitude pour le temps d' une troisième observation éloignée : on comparera ces deux résultats avec ce qu' on a eu par l' observation : les différences qu' on trouvera seront les deux erreurs, qu' on détruira en changeant un peu d' abord la seule longitude du nœud, & après la seule inclinaison de l' orbite, en marquant la diminution de chacun de ces deux erreurs produite par chacun de ces changements, & considérant négative la valeur de l' augmentation, si on la trouve à la place de la diminution. En appellant x &

x' le

x' le deux changments, qui doivent détruire ces erreurs, on trouvera l' expression analytique des diminutions qu' ils produiront, d' où l' on tirera deux équations du premier degré, & celles-ci donneront ces inconnues : par leur moyen on aura la correction de ces deux éléments, qui étant corrigés donneront tout le reste aussi corrigé.

63. On pourroit employer pour une des deux erreurs celle du temps entre la seconde observation, & la nouvelle qu'on trouve aisément tant par le calcul trigonométrique, que par la construction graphique : ce temps comparé avec l' observé donne une erreur. *Celle-ci* avec les deux de la longitude, & de la latitude donne trois *binaires* à *employer*, comme on *le* propose ici : on ne peut pas y employer *le* temps entre *la* première, & *la* seconde observation, qu' on a déjà employé pour trouver *les éléments*, dont on a tiré le lieu de la troisième, qui par conséquent doit s' accorder avec celui, qu' on tireroit de l' orbite trouvée en l' employant *pour la* trouver.

64. On voit dans l'Opuscule cette méthode, qui est analogue à ce qu' on avoit déjà vu aussi dans *le* Tome III : mais ici elle est beaucoup plus simplifiée. Il y a aussi la manière de résoudre *le* problême proposé par une construction graphique exposée ici, qui rendra *beaucoup* plus facile tant la solution même que l' application à la correction de l' orbite, & si l' on fait la construction avec un peu de soin, elle seule sera bien suffisante pour obtenir une correction satisfaisante.

65. L'*objet* de l'Opuscule IX est le même, que celui du Mémoire Correlatif *III du premier* Opuscule du Tome III ; mais la méthode, qu' on propose ici, est différente de celle, qu' on a proposé dans ce Mémoire, plus facile à saisir, & même plus expéditive pour l'exécution : pourtant celle-ci, comme aussi l'autre proposée dans le paragraphe précédent pour son objet, exige des latitudes pas trop petites : heureusement les comètes en ont ordinairement d' assez grandes : voici cette méthode.

66. On aura déjà trouvé par les observations employées les éléments de l' orbite parabolique, qu' on n' aura pas trouvé assez d' ac-

d'accord avec les autres, & l'arc elliptique, dans lequel la comète est visible, ne s'éloigne jamais trop de la forme parabolique : le lieu du nœud, & l'inclinaison de l'orbite qu'on aura trouvé, n'auront pas trop de différence de ce qui convient à cette forme elliptique toujours très-allongée : ainsi on pourra employer ces deux éléments pour appliquer ici aussi la solution du problême de l'Opuscule précédent. Cette solution avec trois observations les plus éloignées entr'elles donnera trois longitudes héliocentriques dans l'orbite avec les trois distances au soleil. Cela suffit, comme on sait, pour trouver l'orbite elliptique : on trouvera dans celle-ci le temps périodique, l'aire totale de l'ellipse, & les aires des deux secteurs interceptés entre le premier rayon vecteur & le second, & entre le second & le troisième : l'aire totale, le temps périodique, & chacune des deux aires des secteurs donneront deux temps, qui devroient y répondre : en comparant ceux-ci avec les temps tirés des observations on trouvera les deux erreurs à corriger comme dans l'Opuscule précédent par les deux changements du lieu du nœud, & de l'inclinaison de l'orbite, faits l'un après l'autre : ceux-ci donneront les deux équations du premier degré à employer pour la correction de ces deux éléments, qui étant corrigés donneront le reste.

67. La figure 7 de la même planche IX sert pour voir la méthode de trouver l'orbite par les trois rayons vecteurs SC, SC', SC'' donnés de grandeur, & de direction. Si dans les rayons SC', SC'' on prend les segments SL, SL' égaux au rayon SC, & que l'on tire les LC, L'C, & par S les lignes parallèles à celles-ci jusqu'à la rencontre avec les cordes C'C, C''C en H, & H', la ligne M'M tirée par ces deux points sera la directrice ; parcequ'on démontre aisément, que si l'on tire les lignes CG, C'G', C''G'' perpendiculaires à celle-ci, les lignes SC', SC'' seront aux C'G', C''G'' comme la SC est à la CG, ce qui est la propriété essentielle des sections coniques. Si l'on tire SE perpendiculaire à la même M'M, & qu'on prend $SV = \frac{SE \times SC}{CG + SC}$ vers E, & SA $= \frac{SE \times SC}{CG - SC}$ vers la partie opposée : on aura le grand axe AV avec l'aphé-

l'aphélie en A, & le périhélie en V. En coupant cet axe par le milieu en I on aura l'excentricité SI.

68. On pourra se servir même de la construction graphique ; parceque dans l'orbite elliptique d'une comète la directrice n'ira pas trop loin, comme elle iroit à une distance immense dans celle d'une planète à cause de l'excentricité trop petite, & les rayons vecteurs SC', SC'', SC''' ne sont pas trop longs dans l'arc, où la comète est visible : on les a fait ici bien longs pour rendre la figure plus claire. Pourtant pour une recherche si délicate il faut absolument employer plutôt le calcul trigonométrique. On en expose le procédé dans cet Opuscule pour cet objet, & pour tout le reste, qui appartient à cette recherche. La figure 8 sert pour expliquer la manière de calculer les aires des secteurs : on l'avoit exposé dans ce Mémoire du Tome III, & on la rappelle ici aussi.

69. Dans l'Opuscule X on propose deux méthodes pour corriger les éléments d'une planète. La première est la même, qui a été employée dans l'Opuscule précédent pour les orbites des comètes : il y a seulement la différence qu'ici on peut prendre la longitude du nœud, & l'inclinaison de l'orbite comme on les trouve au moins très-peu éloignées des véritables dans les éléments de l'Astronomie, tandis que pour les comètes il faut les chercher par la méthode beaucoup plus pénible du Tome III. Mais ici il y a beaucoup moins de sureté dans les résultats à cause de la petitesse des latitudes : ainsi il faut se servir des observations faites, quand celles-ci sont les moins petites, & heureusement on détermine beaucoup plus exactement les latitudes, qui dépendent très-peu du temps, que les longitudes, qui pour les planètes ont présque les mêmes erreurs, que les ascensions droites.

70. Pourtant on fait voir, qu'on peut employer cetre méthode avec beaucoup plus d'espérance de succès pour Vénus, qui arrive à avoir des latitudes suffisamment fortes. Pour elle on peut se contenter de deux seules observations, qui donnent deux seuls rayons vecteurs avec leurs longitudes par l'usage du problême de l'Opuscule VIII ; parcequ'on pourra supposer connu le temps pério-

riodique, & la distance moyenne, qu'on en tire, en employant ces deux valeurs comme dans l'Opuscule VII. On pourroit bien supposer connue la distance moyenne même pour les autres planètes par le temps périodique, qui est toujours moins incertain. Pour Vénus la longitude du nœud, & l'inclinaison de l'orbite paroissent assez sûres, pour pouvoir espérer d'avoir son orbite bien corrigée après le premier calcul appuyé sur les deux rayons vecteurs, & sur leurs longitudes sans en employer la *répétition* après les changements des deux éléments, qui font la base de la méthode. On peut espérer que les erreurs, qu'on auroit dû corriger par les deux équations, se trouveront *nulles*, ce qui *épargneroit* la plus grande *partie du travail*.

71. La seconde *méthode proposée* dans cet Opuscule est beaucoup plus longue, & pénible; mais elle est sûre, & générale pour toutes les planètes. En comptant le temps périodique, & la distance moyenne pour un seul élément, qu'il faut corriger, parceque l'un de ces deux dépend de l'autre, *il y a pour chaque* planète seulement six éléments, dont on doit chercher *la correction*, le lieu du nœud, l'inclinaison de l'orbite, la distance moyenne, l'excentricité, *la longitude de l'aphélie*, & la longitude moyenne à un temps donné. On en *connoît déjà* les valeurs au moins assez peu *éloignées* des véritables: en *employant* ce qu'on a dans les éléments de l'Astronomie, on trouvera les longitudes, & latitudes pour le temps de trois observations bien *choisies*, & bien exactes, même assurées par une interpolation *d'un* bon nombre d'autres peu éloignées, & en les comparant avec les observées on trouvera six erreurs. En faisant un petit changement à un seul de ces éléments, & retenant les autres, on refera le calcul, & on trouvera la diminution de chacune de ces erreurs. On reprendra l'élément changé comme *il* étoit avant, & on changera le second seul: on changera les autres de même l'un après l'autre. On trouvera l'expression analytique de la diminution, que chaque changement x de chaqu'*élément* produira sur chaque erreur: on en tirera la somme des six diminutions produites sur chaqu'erreur par les six changements x, & chaque som-

somme donnera une équation de premier degré : les six équations feront connoître les six valeurs x, & les éléments resteront corrigés par l'application de chaque valeur trouvée à son élément. Comme les éléments, qu'on a déjà, sont bien peu fautifs, on peut espérer, que la correction sera complette après ce premier calcul sans avoir besoin de le répéter.

72. Si l'on craint la petitesse des latitudes ; on peut substituer à quelqu'une d'entr'elles une autre longitude d'une quatrième, ou cinquième observation : mais la correction de la longitude du nœud, & de l'inclinaison de l'orbite exige aussi des latitudes. La méthode est bien longue, & fatigante : mais la marche en est claire & assurée sans la peine inutile des vains tâtonnements.

§. VIII.

Des quatre derniers Opuscules.

73. L'Opuscule XI contient la projection d'une orbite sur le plan de l'écliptique. On avoit exposé dans le premier Opuscule du Tome III ce qui appartient à cet objet par rapport à la seule parabole : ici il y a quelqu'addition même pour elle, & on y ajoute aussi quelque chose pour l'ellipse, & l'hyperbole. On commence par faire voir, que la courbe produite par la projection d'une section conique quelconque restera de la même espèce, soit qu'on fasse cette projection par des lignes perpendiculaires, ou inclinées à un angle donné quelconque, bien entendu, que le cercle soit considéré, comme une ellipse à axes égaux : on fait voir, que dans l'ellipse, les projections des deux sommets de l'axe, qui passe par le foyer, se trouveront dans une droite, qui y passe aussi : la démonstration est la même pour l'hyperbole, & pour la parabole : il s'ensuit, que la projection de son axe passe aussi par le foyer, & est toujours un diamètre, quelle que soit sa position par rapport à la ligne des nœuds.

74. Il y a après une construction sur la fig. 1. (planche X) différente de celles du Tome III pour trouver le foyer, & le sommet de la parabole projetée : il y en a une autre encore plus

simple sur la fig. 2, & une troiſième auſſi aſſez ſimple ſur la même fig. 1 : à la fin il y a la conſtruction pour trouver les deux diamètres conjugués de l'ellipſe, & de l'hyperbole.

75. Dans l'Opuſcule XII il y a la détermination de la courbe produite par la projection d'une orbite ſur un autre plan quelconque. La différence qu'on y a provient de la poſition de l'interſection des deux plans, qui dans le cas de l'Opuſcule précédent paſſoit par le foyer, puiſque le ſoleil ſe trouve dans l'un, & l'autre plan, & ici elle en peut être éloignée. On trouve qu'ici auſſi la ſection conique projetée reſte de la même eſpèce, en comptant le cercle parmi les ellipſes. On détermine la courbe projetée, quand on a l'interſection des deux plans, & l'inclinaiſon, en déterminant pour la parabole la directrice, le foyer, la poſition de l'axe, & ſon ſommet, pour l'ellipſe & l'hyperbole les deux axes. Quand on a l'interſection, on trouve l'inclinaiſon, qui donnera immédiatement l'axe, & dans la fig. 3 l'interſection & l'inclinaiſon, qui changera l'ellipſe en un cercle.

76. Dans l'Opuſcule XIII il y a l'uſage d'une projection, qui change le cercle en une ellipſe, qu'on y détermine. Il a pour objet l'aberration de la lumière, & il contient quatre paragraphes. Dans le premier on en expoſe la nature, & deux eſpèces: la première eſt produite par la combinaiſon du mouvement de la lumière avec le mouvement de la terre, qui rend la direction de la ligne viſuelle apparente inclinée à celle de la direction, avec laquelle le rayon arrive à l'œil, & la ſeconde par le mouvement que l'objet même ait dans le temps, que la lumière employe pour arriver à l'œil, dont il provient, qu'abſtraction faite de la réfraction, on ne reçoit pas le rayon dirigé au lieu occupé par l'objet, quand la lumière arrive, mais au lieu qu'il occupoit, quand elle en eſt partie. Dans le ſecond paragraphe on conſidère l'effet de la ſeule aberration de la première eſpèce, qui répond au mouvement annuel de la terre, découverte par Bradley, qui en a donné l'origine, & les loix, & qui eſt la ſeule conſidérée dans les étoiles fixes: dans le troiſième celui de la ſeule aberration de la ſeconde eſpèce: dans le quatrième l'effet combiné de toutes les deux.

77. Pour l'aberration de la première espèce on en donne l'idée à la fig. 4 de la même manière qu'elle a été donnée par Bradley même. Si abstraction faite de la réfraction la lumière arrive par la ligne droite CT', tandis que la terre parcourt l'arc AT', en portant avec elle un tube TD, ou une alidade avec deux dioptres, dont les trous soient en D, & T; pour faire que la particule de la lumière entrée en D puisse sortir par l'autre trou, & arriver à l'œil, il faut que cette alidade ne soit pas dirigée vers l'objet C, mais inclinée de manière, que la ligne T'D dirigée vers cet objet soit au petit arc TT', comme la vîtesse de la lumière est à celle de la terre: alors seulement la particule de la lumière passée par D, ayant parcouru la ligne DT', tandis que la terre s'est avancée dans l'orbite ATB par le petit arc TT', sortira par le second trou en T', & arrivera à l'œil. Comme la ligne visuelle, selon laquelle on prend toutes les mesures, a la direction de ces trous, & cette direction dans un temps immensement petit est allée parallélement en T'D', il est évident, que cette ligne à la place de se diriger vers l'objet C se dirigera à un autre point E, & l'aberration de la première espèce sera l'angle CT'E. Mais si dans le temps, que le rayon a parcouru la ligne CT', l'objet a eu un mouvement par CC'; sa position à la place d'être celle de la direction T'C dans le moment qu'on le voit sera T'C', & l'aberration de la seconde espèce sera l'angle CT'C': mais comme la direction vraie de sa position sera T'C', & l'apparente T'E, l'aberration composée sera l'angle ET'C'.

78. Pour celle de la première espèce, si l'on conçoit la petite corde TT' prolongée indéfiniment en T'I, qui se confond avec une tangente tirée per le point T', & une ligne tirée par C parallèle à cette tangente, qui rencontre la direction apparente T'D' en E; on trouve, que la ligne droite CE est parallèle au plan de l'écliptique, que, comme la tangente du mouvement annuel de la terre change continuellement sa direction, & la vîtesse de la lumière est toujours la même, celle de la terre presque la même, le lieu apparent E décrit dans l'année un cercle autour du lieu vrai, & on trouve que sa position dans ce cercle par rap-

port au centre C est plus occidentale de trois signes, que la position du soleil par rapport à la terre.

79. Si dans la fig. 5 ABDE est l'écliptique d'une ſphère géocentrique, BPE le colure des ſolstices avec les pôles P, P' de l'écliptique & de l'équateur, C le lieu de la fixe, PCG un quart de cercle de latitude, qui détermine en G la longitude de la même fixe, gLKM le cercle parallèle à l'écliptique décrit par le lieu apparent de l'aberration de la première eſpèce; on trouve, que la projection de celui-ci ſur la ſurface de cette ſphère eſt une ellipſe gNKO, dont le grand axe gCK égal au diamètre du cercle eſt perpendiculaire à l'arc PCG, & *égal au double de la plus grande aberration qui ſe trouve de 20''*, le petit NCO ſur le même arc étant au grand, comme le ſinus de la latitude GC de la fixe eſt au rayon. Le lieu apparent de la fixe eſt en g, quand le lieu géocentrique du ſoleil eſt en G, plus occidental par rapport à celui-ci de trois ſignes. Si l'on conçoit le même petit cercle appliqué ſur la même ſurface de la ſphère, & *que le lieu du ſoleil étant dans l'écliptique en* H, on prenne l'arc gh ſemblable à GH dans la même direction, & on conçoive l'arc Ph, qui rencontre l'ellipſe du côté du point h en I; on trouve, que ce point eſt le lieu apparent de la fixe: la rencontre du même arc Ph avec le grand axe gK étant Q, *l'aberration de longitude eſt l'angle* CPQ, *en latitude l'arc* QI. Si l'on conçoit l'autre arc P'I avec le CR perpendiculaire ſur lui; l'aberration en aſcenſion droite eſt l'angle CP'R, en déclinaiſon l'arc RI. Il s'agit de trouver *les* expreſſions analytiques de ces aberrations, qui répondent à la poſition permanente de la fixe, & variable du ſoleil.

80. On trouve ici ces formules, qui ſont plus ſimples pour la longitude & latitude, plus compoſées pour l'aſcenſion droite & la déclinaiſon. On les tire des précédentes d'abord directement par un procédé géométrique, & après par l'application des formules différentielles de Trigonométrie, dont on a donné la théorie générale dans l'Opuſcule XV du Tome IV, & c'eſt pour faire voir le grand uſage, dont elles ſont dans toute l'Aſtronomie, qu'on a ſuivi la route propoſée ici pour la détermination

de

de ces aberrations, quoiqu'il y en a des plus faciles pour l' exécution des calculs dans des éléments connus d' Astronomie.

81. Pour déterminer l'aberration de la seconde espèce, il faut connoître la distance de l'objet, qui doit donner le temps, que la lumière met pour arriver, & la direction & vîtesse de son mouvement, qui donne la direction & la longueur de la ligne CC' de *la fig.* 4, & c'est l'objet du second paragraphe. Pour l'aberration composée non seulement la détermination pour les planètes, & comètes n' en est pas plus difficile, comme il paroît d'abord; mais elle est beaucoup plus aisée. On trouve, qu'elle est une partie de la route apparente de l'objet, qui répond au temps employé par la lumière pour arriver de lui à la terre. On démontre ce beau théorème au §. *IV sur la fig.* 6. Comme le temps employé par la lumière dans ce trajet est bien court, il n' est que de deux heures & demi par rapport à la nouvelle planète, dont la distance est double de celle de Saturne, on prend le mouvement de la terre, & de l' astre pour rectiligne & uniforme, & on néglige le changement de la distance dans un temps si court. Soit A le lieu de la terre, C celui de l'astre dans le moment du départ de la lumière, T', C' dans le moment de l'arrivée, *a* & *c* les lieux dans le moment d'un autre départ, *t'*, & *c'* dans celui de l'arrivée, & les lignes CC'', *ce* parallèles, & égales aux T'*t'*, *at'*: on démontre, que le point *e* se trouve sur la ligne C''*c'*, que le mouvement apparent pour le temps employé pour aller de T' & C' en *t'* & *c'* est l' angle C''*t'e*, l' aberration composée l'angle *et'c'*, & que celle-ci est au mouvement apparent C''*t'e* comme le temps du mouvement de la lumière par *ct'* est au temps employé par la terre dans sa route T'*t'*. Comme on peut avoir le mouvement apparent pour un temps donné par deux observations faites, & on trouve la distance indépendamment de l' aberration sans craindre une erreur sensible par rapport au total, même pour les comètes, ainsi on trouve le temps employé par la lumière, & la quantité de l'aberration.

82. On trouve, que l'aberration de la première espèce provenante du mouvement diurne est insensible à cause de la lenteur de ce mouve-

vement par rapport à celui de la lumière, & que pour les objets terrestres les deux aberrations sont contraires & égales, ce qui rend nulle la composée : nous voyons ceux-ci où ils sont, quand la lumière arrive à l'œil, quoique par un rayon dont la direction va là, où ils étoient quand celui-ci en est parti. Dans la lune aussi, qui a le mouvement annuel commun avec la terre, la première aberration est nulle, la seconde est insensible à cause de son voisinage, qui rend presque momentanée le mouvement de la lumière dans ce trajet. Pour les étoiles fixes on ne peut rien savoir de la seconde aberration. Si les moins éloignées n'ont aucune parallaxe sensible, comme on croit, pas d'une seconde dans tout le grand mouvement de la terre d'un bout de son orbite à l'autre opposé ; leurs distances sont si énormes, que la lumière doit employer six ans pour arriver à la terre, & si parmi les télescopiques presqu'insensibles il y en a des mille fois plus éloignées, comme il est très-croyable ; il pourroit se faire, que nous vissions des étoiles éteintes depuis quelques milliers d'années, comme si la voix pouvoit arriver de la lune à la terre avec la même vîtesse, qu'elle a ici dans l'air, elle employeroit à-peu-près quatorze jours à arriver à nous, & nous pourrions entendre la voix de quelqu'un, qui seroit déjà mort depuis dix, ou douze jours.

83. Le dernier Opuscule intéresse les éléments de Trigonométrie. Il contient des démonstrations beaucoup plus simples, que les communément employées, de plusieurs théorèmes. On démontre principalement le premier pour le triangle sphérique d'une manière assez compliquée. Ici il y a une démonstration pour le plan, & sphérique très-simple, & faite sur la même figure, presqu'avec les mêmes mots pour tous les deux, en substituant seulement pour celui-ci les sinus des arcs, aux lignes droites de celui-là designées par les mêmes lettres. Ce premier théorème est celui, qui détermine les angles par les trois côtés donnés : il porte que le produit de la multiplication de deux côtés dans le triangle plan, ou des leurs sinus dans le sphérique, est au produit des deux excès de la demi-somme de tous les trois sur chacun de ces deux côtés, ou des

sinus

sinus de ces excès (comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de la moitié de l'angle intercepté. C'est principalement la très-grande simplicité de cette démonstration, & son uniformité pour les deux Trigonométries, qui peut rendre intéressant cet Opuscule.

84. Ce theorème est d'un très-grand usage : il y en a deux autres pour le triangle plan, qui ne le sont pas tant ; mais ils ont beaucoup d'analogie avec celui-là dans les expressions des leurs valeurs, & entr'eux : les voici. Le produit des trois excès de la demi-somme des tous les trois côtés sur chacun d'eux divisé par cette demi-somme est égal au quarré du rayon du cercle inscrit à ce triangle, & ce même produit multiplié par la même demi-somme est égal au quarré de son aire. On y a ajouté pour conserver l'analogie, la détermination du même rayon pour le triangle sphérique, & on fait voir, comment en faisant infini le rayon de la sphère, l'expression du rayon du cercle inscrit dans le triangle sphérique se réduit à celle, qu'on avoit trouvée pour le plan. Pour l'aire du triangle sphérique on démontre ici aussi d'une manière très-simple, quoiqu'en employant les premières idées du calcul intégral, le beau théorème dont on avoit donné une démonstration très-exacte, & assez simple dans l'Opuscule XV du Tome IV, en y employant la simple Géométrie linéaire, que l'aire du triangle sphérique est égale à l'excès de ce trois angles sur deux droits, en entendant pour cet excès le produit du rayon de la sphère fait = 1 par son arc, qui mesure cet excès. Ainsi l'aire du triangle plan est donnée immédiatement par les trois côtés, celle du triangle sphérique par les trois angles : mais comme les trois angles sont donnés par les trois côtés, c'est ici aussi que les trois côtés déterminent l'aire.

FIN DU TOM. V.

ER-

pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE.
2	29	secti sunt illi radii	sectæ sunt binæ *semicircumferentiæ*.
22	7	tantum momentanea	continuata.
28	34	punctum secundum	punctum primum.
41	29	sinui	cosinui.
45	21, 22	secundi ... primum	primi ... secundum.
46	14	secundo	primo.
47	5	primi	secundi.
65	34	instrumenti	annuli.
80	18	l' autre	le bord du soleil.
ibid.	19	bord du soleil	au même bord.
90	23	observations	lignes.
130	15	partie seconde	troisième partie.
223	4	12 (Tab. VI)	*13 (Tab. VI) F, G, F'.*
250	11	temporis	penduli.
273	23	le Capricorne	*le Capricorne*, le Verseau.
275	18	ayant	a
279	17	vers celles des	vers les.
290	2	sud, ou entre le pole, & le zenith	sud.
369	16	obtus, ou aigu	aigu, ou obtus.
375	18	vecteur	vecteur raccourcie.
376	3	l' angle SVV', & SVV''	l' angle SVV''.
382	2	l' excentricité	la double excentricité.
386	1	première	troisième.
399	17	Juillet	Août.
408	13	in arcu N'VN	pro arcubus, qui concipiantur continuati per N'V'N, N'*u*'N.
409	18	& erectionem perpendicularem lineæ demissæ in planum eclipticæ	& rectam perpendicularem eidem plano.
411	31	puncta	ejus puncta.
414	13	primigeniæ	genitæ.
419	19	luminis ... terræ	terræ ... luminis.
425	14	declinationis	latitudinis.
ibid.	34	rectæ CR	$\frac{CR}{P'C}$ pro CR.
ibid.	35	adeoque erit	nimirum.

NOI

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

Avendo veduto per la fede di reviſione, ed approvazione del P. F. *Gio. Tommaſo Maſcheroni* Inquiſitor Generale del Santo Offizio di Venezia nel Libro intitolato: *Rogerii Joſephi Boſcovich Opera nova pertinentia ad Opticam, & Aſtronomiam ec. ms.* non vi eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per atteſtato del Segretario noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi, concediamo licenza a *Giuſeppe Remondini* Stampator di Venezia, che poſſa eſſere ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 27. Settembre 1783.

(*Andrea Tron Cav. Proc. Rif.*
(*Niccolo' Barbarigo Rif.*
(*Alviſe Contarini* 2°. *Cav. Proc. Rif.*

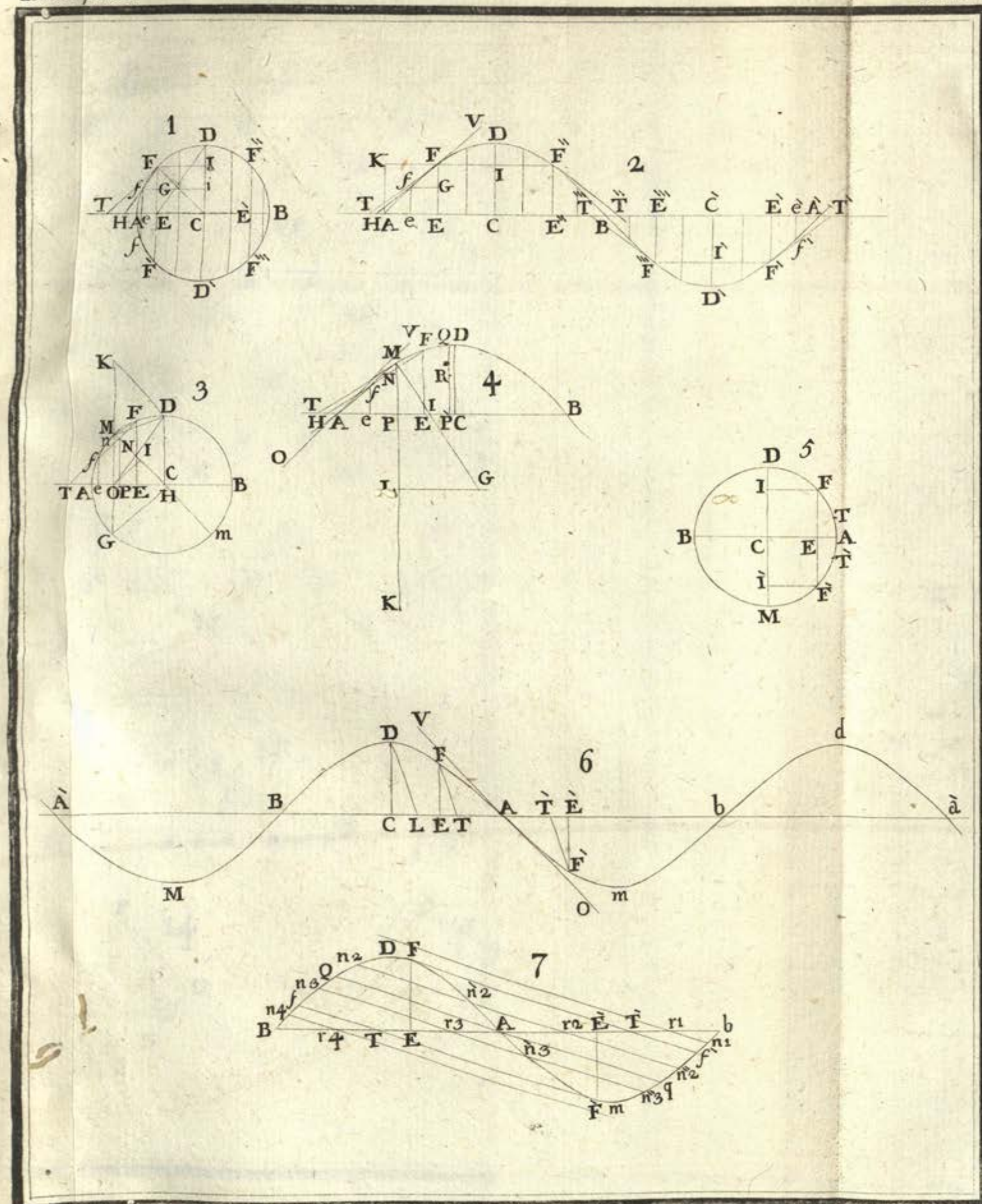
Regiſtrato in Libro a Carte 97. al Num. 903.

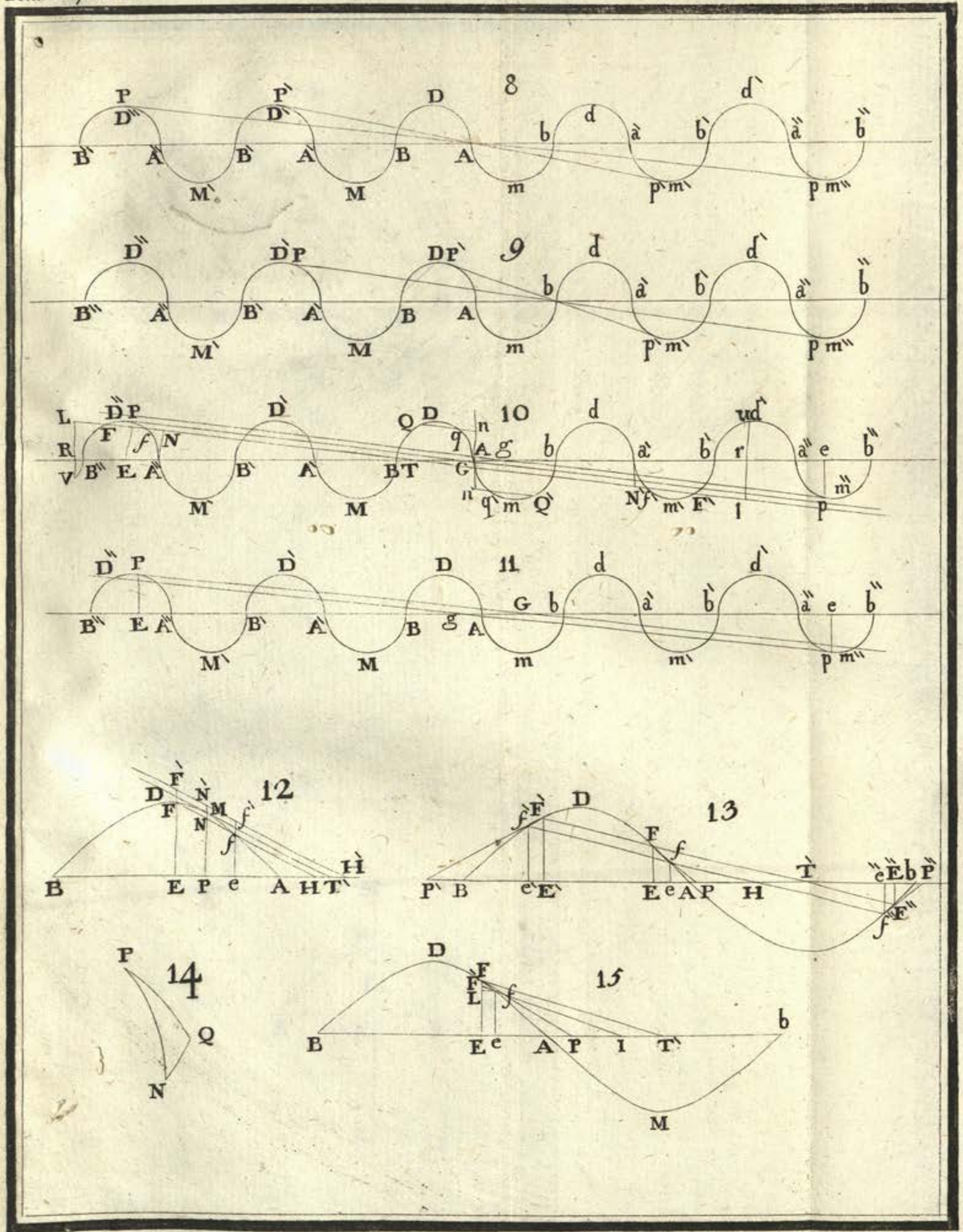
Davidde Marcheſini Segr.

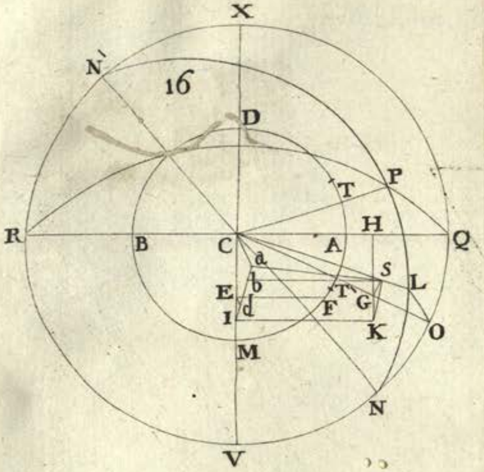
Addì 28. Settembre 1783.

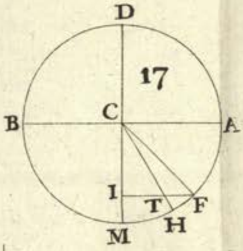
Regiſtrato nel Magiſtrato Eccellentiſs. contro la Beſtemmia a C. 116.

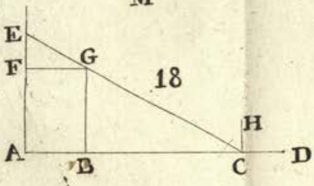
Andrea Sanfermo Segr.

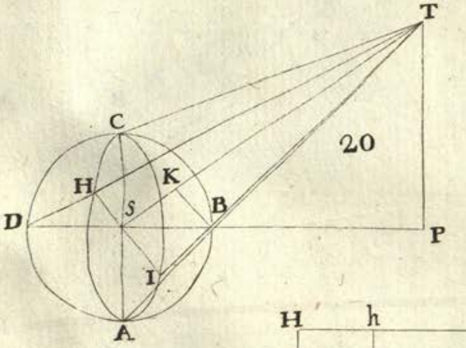

1
2
3
4
5
6
7

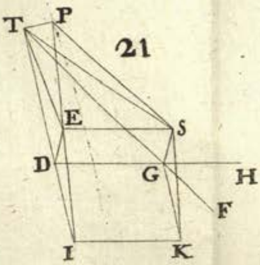

8
9
10
11
12
13
14
15

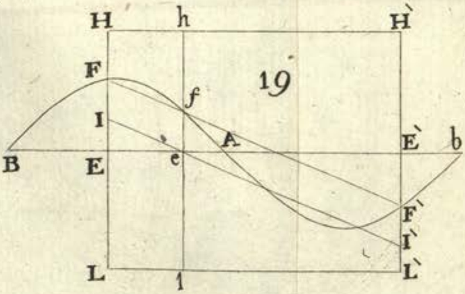

16
X
N`
D
T
P
R
B
C
A
H
Q
a
s
L
E
b
T`
G
I
d
F
K
O
M
N
V

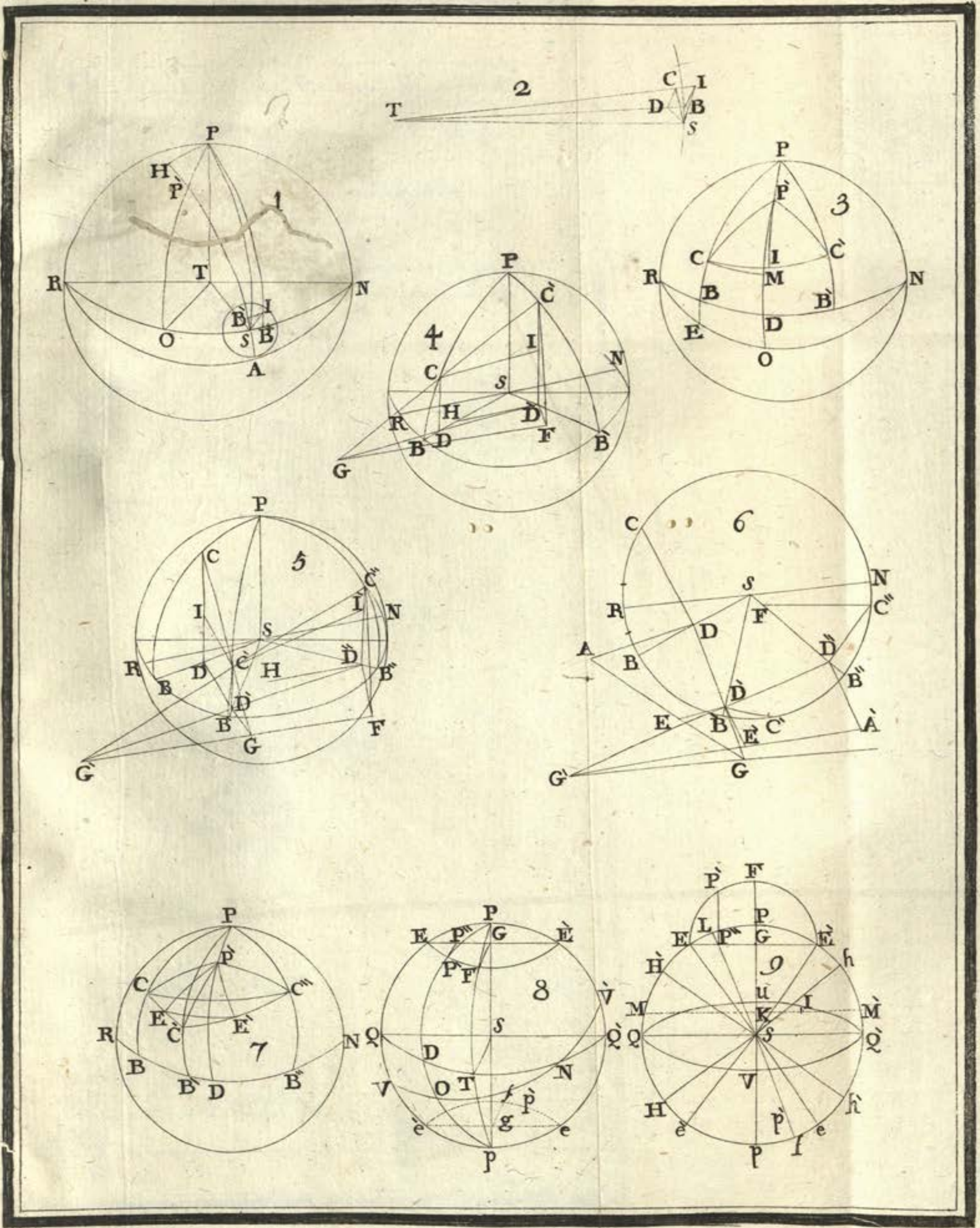

17
D
B
C
A
I
T
F
M
H

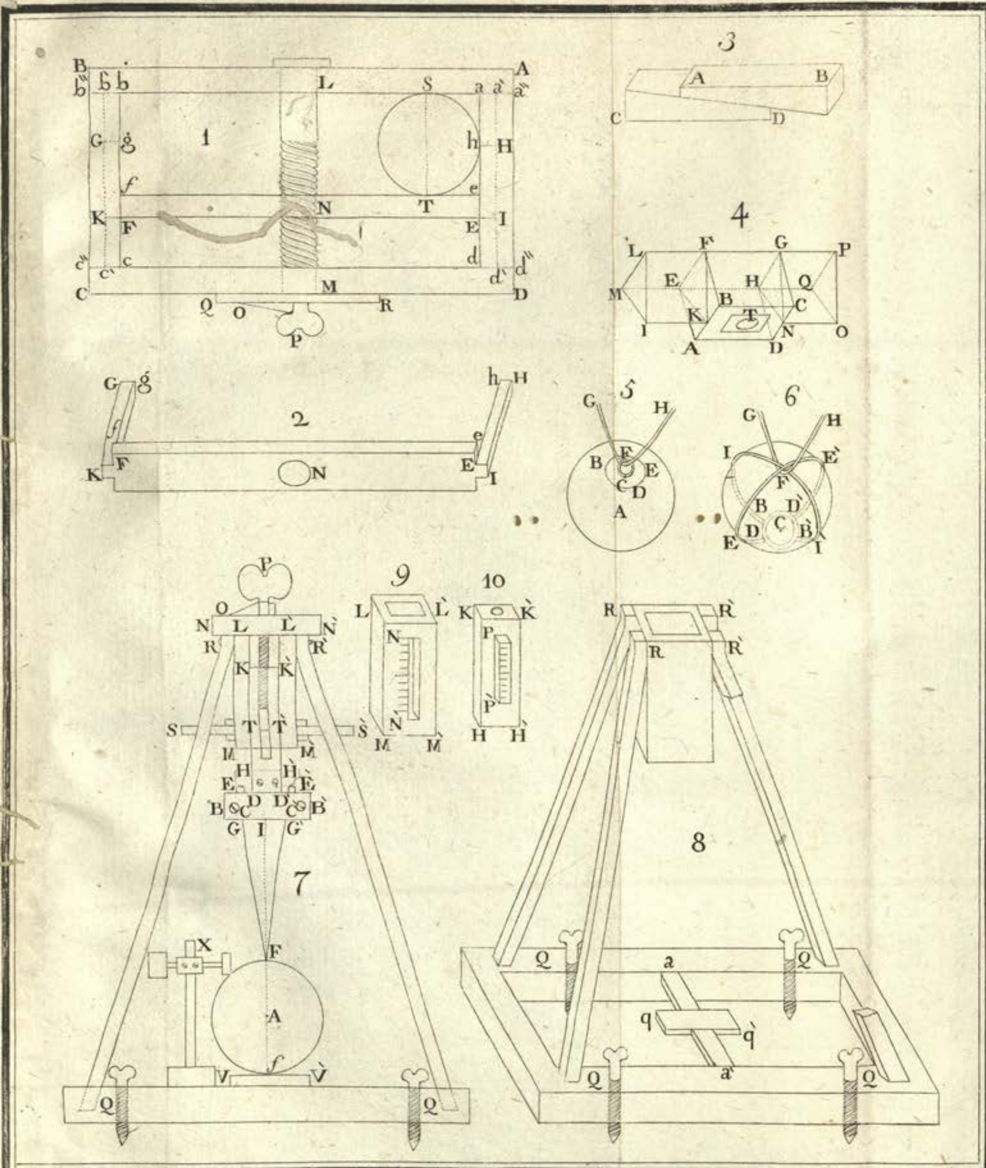

18
E
F
G
H
A
B
C
D

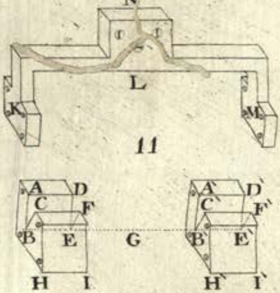

20
T
C
H
K
s
D
B
P
I
A

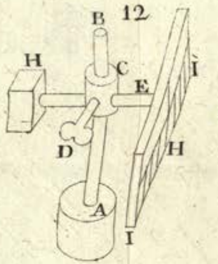

21
T
P
E
S
D
G
H
F
I
K

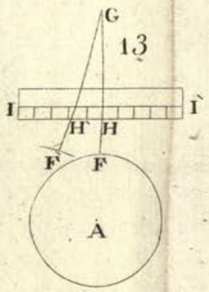

19
H
h
H`
F
f
I
A
E`
b
B
E
e
F`
I`
L
l
L`

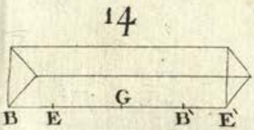

1
2
3
4
5
6
7
8
9

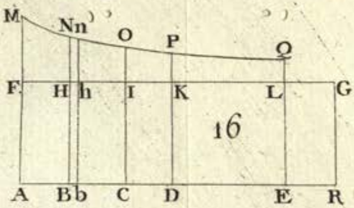


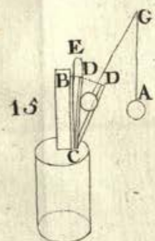

11
N
L
K
M
A D
C F
B E G B E
H I H I

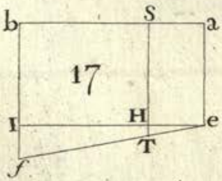

12
B
H
C
E
I
D
H
A
I

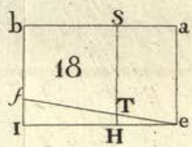

13
G
I I
H H
F F
A

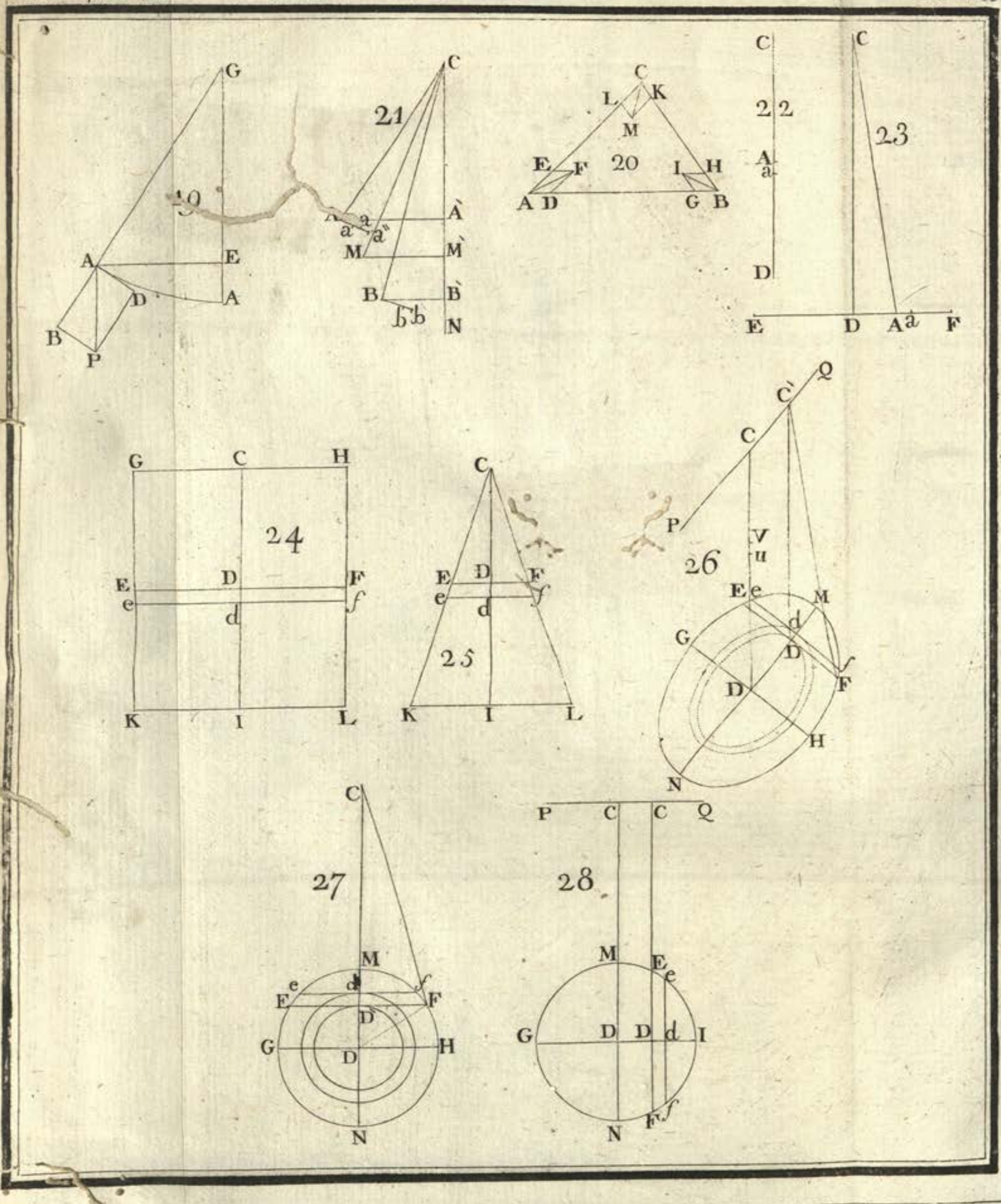

14
G
B E B E

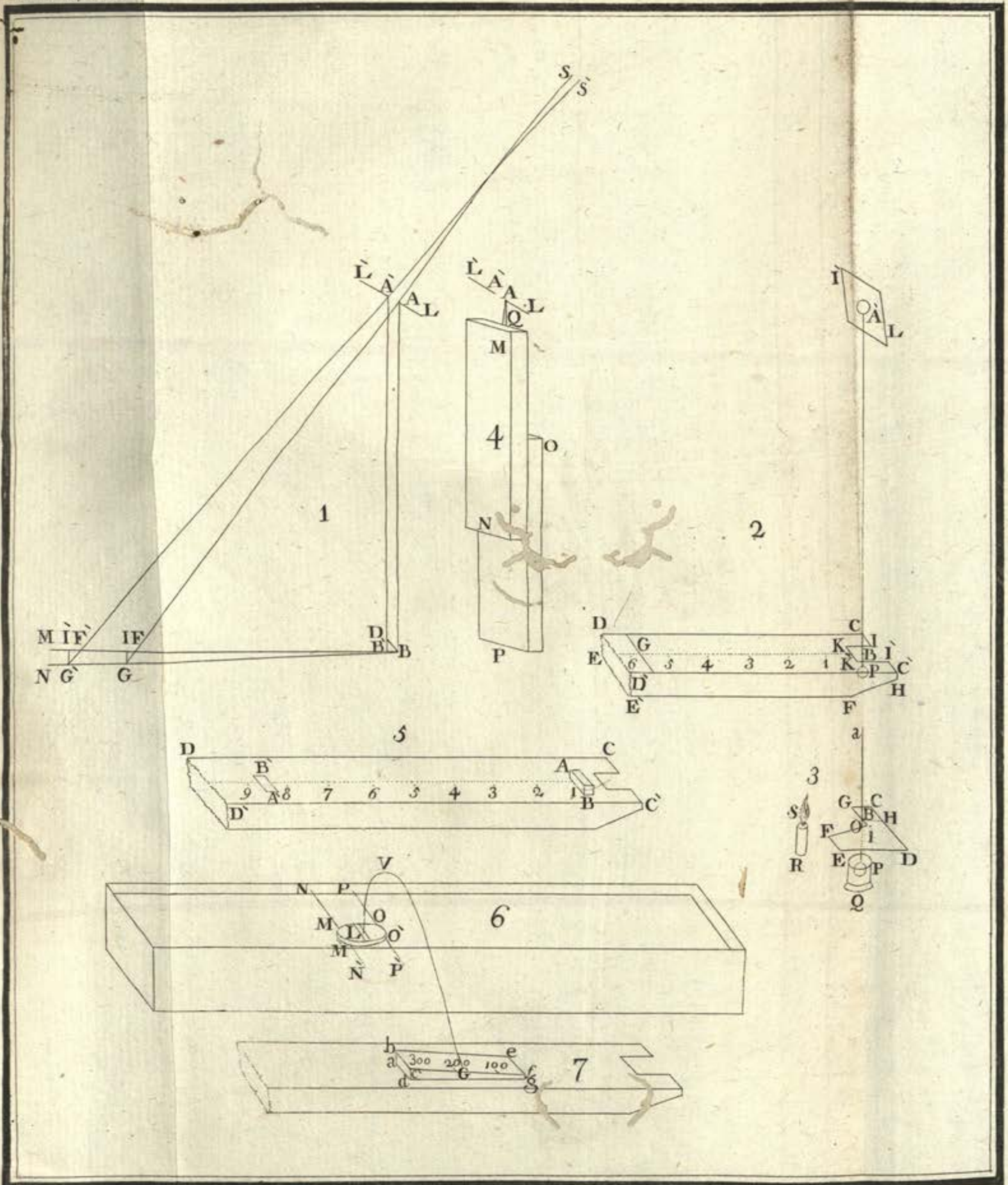

M Nn O P Q
F H h I K L G
16
A Bb C D E R

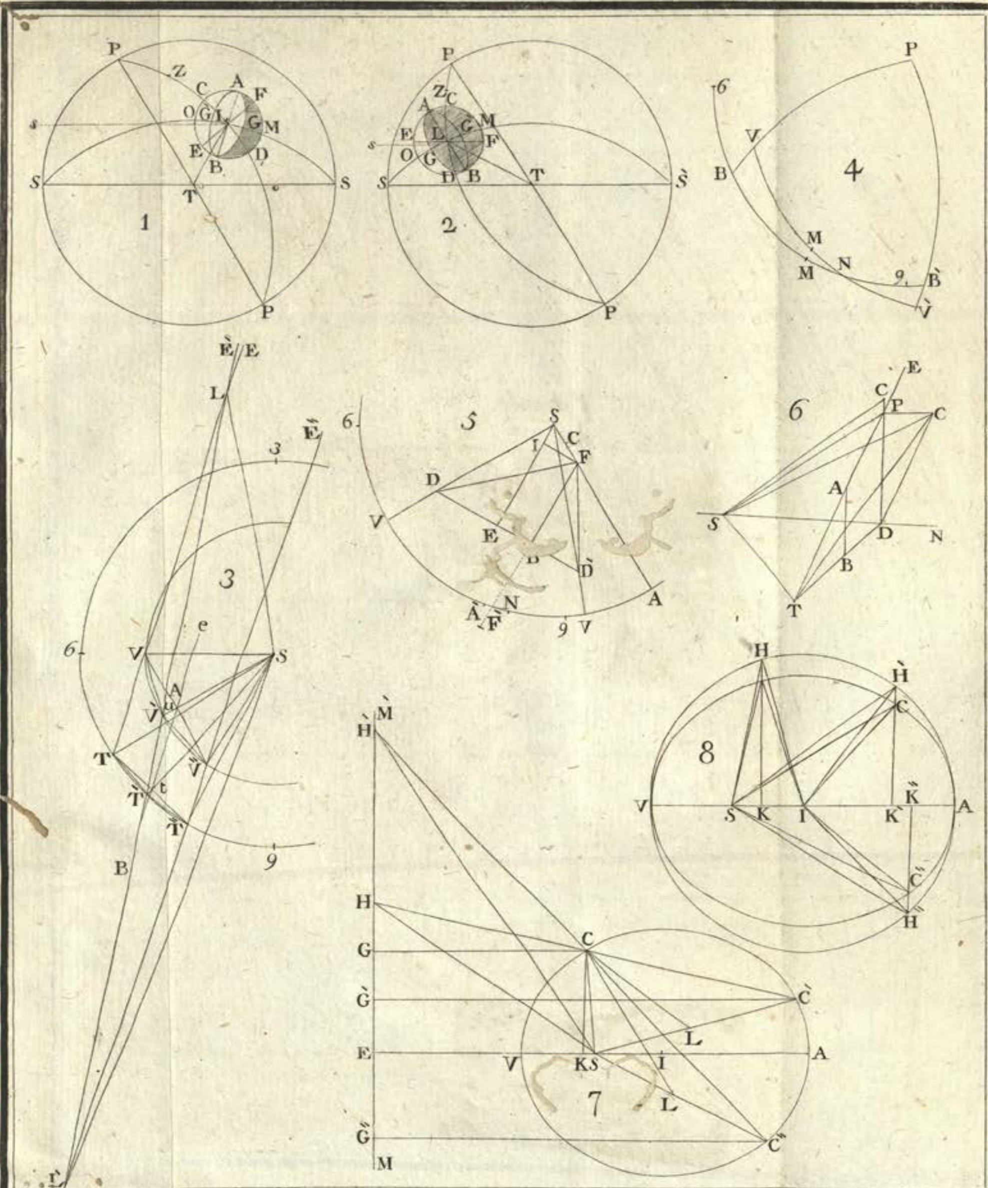

15
G
E
B D D
A
C

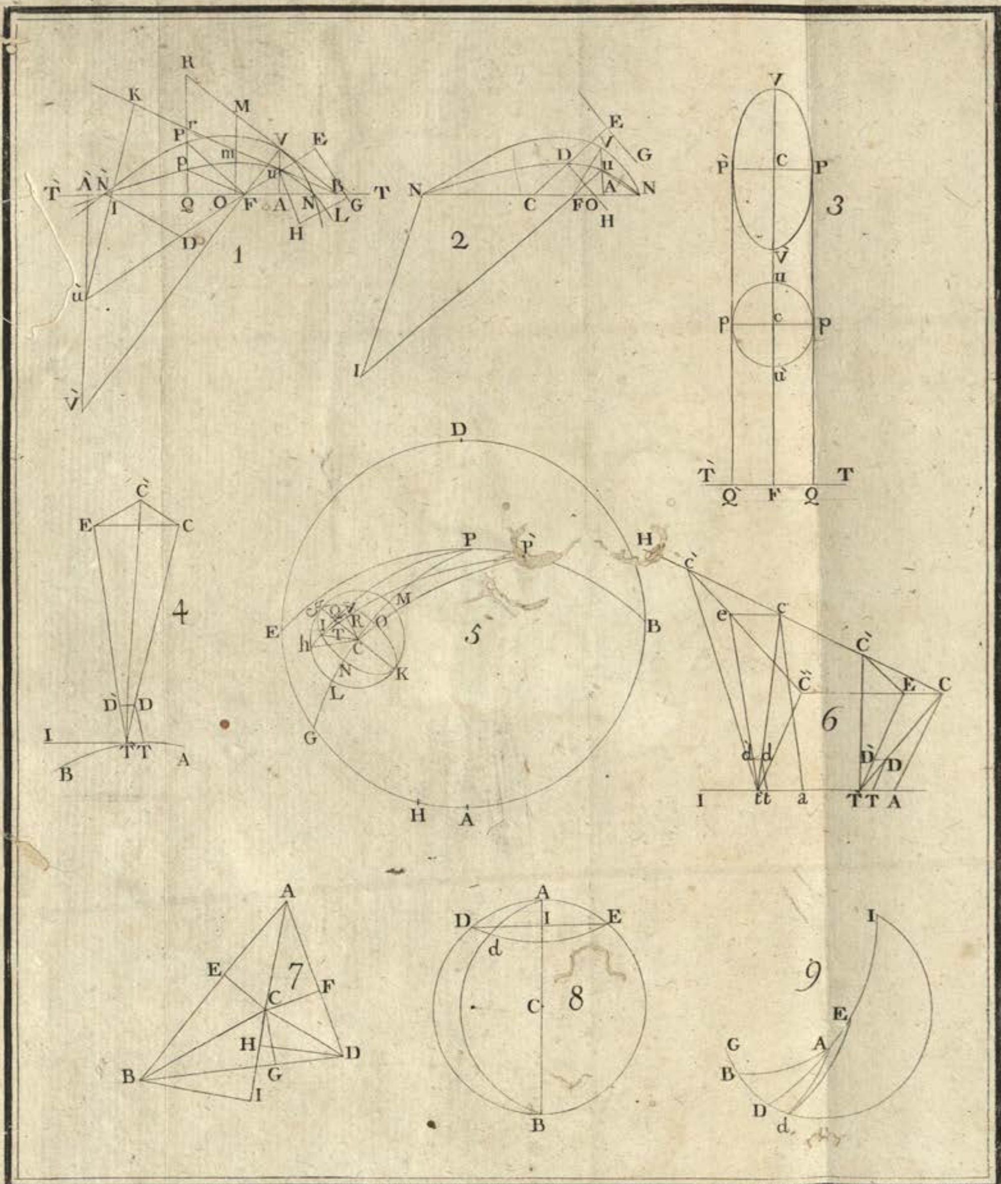

b S a
17
I H e
T
f


b S a
18
f
T
I H e


19
G
A E
D A
B P
21
C
A a A`
a' a''
M M`
B B`
b b N
20
C
L K
M
E F I H
A D G B
22
C
A
a
D
23
C
E D A a F
24
G C H
E D F
e d f
K I L
25
C
E D F
e d f
K I L
26
Q
C`
C
P
V
u
E e M
d
G
D
D
F
H
N
27
C
M
e d f
E F
D
G H
D
N
28
P C C Q
M E e
G D D d I
N F f


1
2
3
4
5
6
7
S
S`
L`
A`
A
L
M
N
O
P
Q
D
B
B`
G
G`
IF
M IF`
N G`
300
200
100


1
2
4
3
5
6
8
7


1
2
3
4
5
6
7
8
9

00049878

Digitized with financial assistance from
Observer Research Foundation
on 17 May, 2019